Training Mathematik

Band 1
Grundlagen

Von
Dr. Gert Heinrich
und
Dipl.-Math. Thomas Severin

R. Oldenbourg Verlag München Wien

Für

Anja, Susanne,

Felicitas, Sabine und Tim

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Heinrich, Gert:
Training Mathematik / von Gert Heinrich und Thomas Severin.
- München ; Wien : Oldenbourg
NE: Severin, Thomas:
Bd. 1. Grundlagen. - 1997
ISBN 3-486-23887-6

Gesamtherstellung: R. Oldenbourg Graphische Betriebe GmbH, München

ISBN 3-486-23887-6

Vorwort

Während unserer Lehrtätigkeiten (Universität, Berufsakademie, Volkshochschulen) im Fach Mathematik mußten wir, besonders in den letzten Jahren, immer deutlicher feststellen, daß ein hoher Prozentsatz der Schüler die erforderlichen Studienvoraussetzungen im Fach Mathematik nicht oder nur sehr unvollständig besitzt.

Diese vierteilige Buchreihe (Grundlagen, Analysis, Lineare Algebra und Analytische Geometrie sowie Stochastik und Statistik) soll Schülern und Studenten helfen, die Grundkenntnisse der elementaren Mathematik zu erlernen und durch Üben zu festigen.

Die gesamte Buchreihe ist so aufgebaut, daß zu Beginn eines jeden Kapitels die jeweilige Theorie kurz dargeboten wird. An einer Vielzahl von Beispielen werden Anwendungsmöglichkeiten gezeigt. Diese Beispiele decken den theoretisch behandelten Stoff vollständig ab. Auf die Beweise zu den Sätzen wird bewußt verzichtet, da es sich bei diesem Buch um eine **Beispiel- und Aufgabensammlung** handelt und nicht um ein Lehrbuch im herkömmlichen Sinne. Das Kernstück bilden dann **Übungsaufgaben**. Sämtliche Aufgaben sind mit **vollständigem Lösungsweg** versehen.

Im hier vorliegenden **Band 1, Grundlagen** werden die notwendigen Hilfsmittel bereitgestellt, die für die weiterführenden Disziplinen Analysis, Lineare Algebra und Analytische Geometrie sowie Stochastik und Statistik unentbehrlich sind. Behandelt werden Mengenlehre, Zahlenbereiche und Rechenregeln, Potenzen, Wurzeln, binomische Formeln und Logarithmen, Beträge, Termumformungen, Prozent-, Zins- und Mischungsrechnung, Gleichungen und Ungleichungen, Geometrie in der Ebene und Körper im Raum.

Für die kritische Durchsicht des Manuskripts bedanken wir uns bei den Herren cand. math. Martin Severin und cand. math. Jochen Severin, die auch den größten Teil der Aufgaben nachgerechnet haben, bei Herrn Dipl.-Ing. Elekrotechnik, Fachrichtung Informationsverarbeitung (FH) Sven Rudisch für das Anfertigen der Abbildungen in den Kapiteln 1, 2 und 10 und bei Frau Susanne Heinrich für das unermüdliche Korrekturlesen. Unser Dank gilt auch Herrn Dipl. Volkswirt Martin Weigert vom Oldenbourg-Verlag für die angenehme Zusammenarbeit und weitestgehende Freiheit bei der Gestaltung dieses Buches.

Für Hinweise auf Fehler und Verbesserungsvorschläge sind wir jedem Leser dankbar.

Fellbach, Rechberghausen

Gert Heinrich
Thomas Severin

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Mengenlehre

1.1 Mengen und Elemente

Die Mengenlehre, so wie wir sie heute kennen, wurde von dem deutschen Mathematiker **Georg Cantor** (1845-1918) begründet. Sie spielt in vielen mathematischen Gebieten eine bedeutende Rolle z. B. in der Analysis, in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und in der Stochastik.

Definition 1.1.1
Eine **Menge** *ist eine Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Objekten zu einem Ganzen. Diese Objekte werden* **Elemente** *genannt.*
Eine Zusammenfassung von nicht notwendigerweise verschiedenen Objekten zu einem Ganzen nennt man ein **System.**

Mengen werden auf unterschiedliche Weisen dargestellt. Die erste Möglichkeit hierzu ist die **aufzählende Darstellung.** Dabei werden die Elemente zwischen zwei geschweifte Klammern $\{\ldots\}$ geschreiben.
Gehört ein Element a zu einer Menge A, so schreibt man dafür:
$a \in A$ und spricht: a ist Element von A.
Gehört ein Element a nicht zu einer Menge A, so schreibt man:
$a \notin A$ und spricht: a ist kein Element von A.

Beispiel 1.1.1
Die Menge $A = \{1, 2, 3\}$ beinhaltet die drei Elemente 1, 2 und 3.
Im Gegensatz dazu ist $B = \{1, 2, 3, 2, 2, 3\}$ keine Menge, sondern ein System, da die Elemente 2 und 3 mehrfach vorkommen und dadurch nicht unterschieden werden können.

Beispiel 1.1.2

1.) Die Menge $A = \{\square, \diamond, \triangle\}$ enthält die Elemente $\square$, $\diamond$ und $\triangle$.

2.) Die Menge $B = \{1, 2, 3\}$ enthält die Elemente 1, 2 und 3, d. h. es gilt $1 \in B$, $2 \in B$ und $3 \in B$. Desweiteren gilt z. B. $4 \notin B$.

3.) Die Menge $C = \{\text{VW}, \text{Opel}, \text{Ford}, \text{Audi}\}$ enthält die Elemente VW, Opel, Ford und Audi, d. h. VW $\in C$, Opel $\in C$, Ford $\in C$, Audi $\in C$. Es gilt aber auch Toyota $\notin C$ oder $3 \notin C$.

4.) Die Menge $D = \{2, 4, 6, 8, \ldots 1\,000\}$ enthält alle geraden natürlichen Zahlen zwischen 2 und 1 000.

5.) Die Menge $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ enthält alle Primzahlen zwischen 2 und 13.

6.) Die Menge $F = \{7\}$ enthält nur die Zahl 7.

7.) Die Menge $G = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ enthält die vier Elemente $\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit$ und $\spadesuit$. Dies sind die vier Farben des französischen Kartensatzes.

8.) Die Menge $H = \{\text{Sabine}, \text{Anja}, \text{Susanne}\}$ enthält weibliche Vornamen.

9.) Die Menge $L = \{\}$ enthält überhaupt kein Element.

Bemerkung:
Hier ist ein Verweis auf Kapitel 2 angebracht. Dort werden zwei der wichtigsten Zahlenmengen vorgestellt:

- Die Menge der **natürlichen Zahlen** $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- Die Menge der **ganzen Zahlen** $\mathbb{Z} := \{\ldots, 0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots\}$.

Eine zweite Möglichkeit der Darstellung von Mengen ist die **beschreibende Form**. Eine Menge wird dabei durch Kennzeichnung der Eigenschaften ihrer Elemente in Worten beschrieben und zwar wie folgt:

$$M = \{a \,|\, a \text{ hat die Eigenschaft E}\}.$$

Die Sprechweise hierfür ist: M ist die Menge aller a für die gilt: a hat die Eigenschaft E.

Beispiel 1.1.3

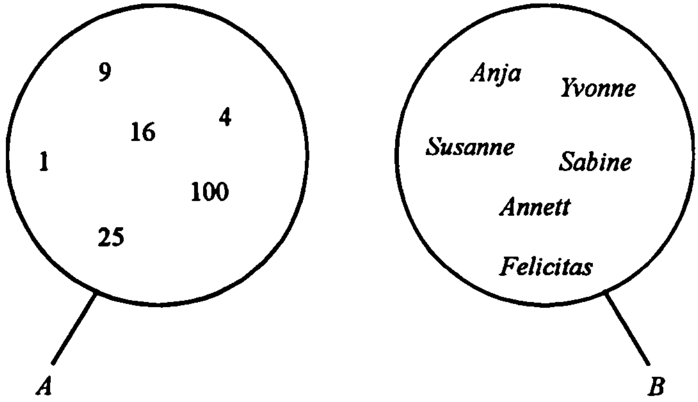
1.) $A = \{a \,|\, a \text{ ist eine gerade natürliche Zahl, die kleiner gleich 100 ist}\}$.

2.) $B = \{b \,|\, b \text{ ist ein weiblicher Vorname}\}$.

3.) $C = \{c \,|\, c \text{ ist ein Tier}\}$.

Eine graphische Möglichkeit zur Darstellung von Mengen stellen die **Venn-Diagramme** dar. Dabei werden die Elemente als Punkte innerhalb einer geschlossenen Kurve dargestellt.

Abbildung 1.1.1
Venn-Diagramme



Zwei wichtige Mengen werden in der folgenden Definition vorgestellt:

Definition 1.1.2
Die **leere Menge** *enthält überhaupt kein Element. Sie wird mit $\emptyset$ oder einfach mit $\{\}$ bezeichnet.*
Die **Grundmenge** *G enthält alle betrachteten Elemente.*

Das folgende Beispiel zeigt die Bedeutung der Grundmenge.

Beispiel 1.1.4

1.) Seien $G = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ und $A = \{a \,|\, a \text{ ist kleiner gleich } 3\}$.
Dann gilt: $A = \{1, 2, 3\}$.

2.) Seien $G = \{3, \ldots, 10\}$ und $A = \{a \,|\, a \text{ ist kleiner gleich } 3\}$.
Dann gilt: $A = \{3\}$.

3.) Seien $G = \{5, 6, 7, \ldots, 10\}$ und $A = \{a \,|\, a \text{ ist kleiner gleich } 3\}$.
Dann gilt: $A = \{\}$.

1.2 Teilmengen

Definition 1.2.1
Eine Menge U heißt eine **Teilmenge** *oder auch* **Untermenge** *einer Menge O, falls jedes Element der Menge U auch ein Element der Menge O ist. Die Bezeichnung ist $U \subset O$ und die Sprechweise lautet: U ist Teilmenge von O. O bezeichnet man auch als* **Obermenge** *von U. Die Bezeichnung ist $O \supset U$ und die Sprechweise hierfür lautet: O ist Obermenge von U.*

Zwei Mengen A und B sind **gleich** ($A = B$), wenn jedes Element der Menge A auch ein Element der Menge B ist und umgekehrt. Mithilfe der Definition 1.2.1 kann die Gleichheit zweier Mengen folgendermaßen beschrieben werden: Die Mengen A und B sind gleich, genau dann, wenn A Teilmenge von B und B Teilmenge von A ist. In Formeln bedeutet dies:

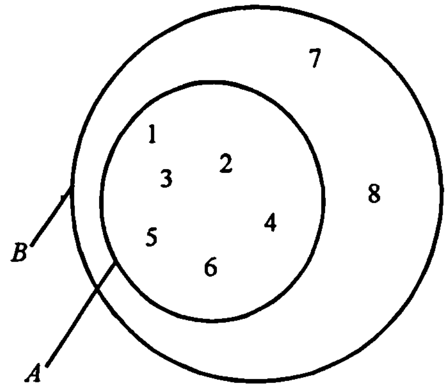
$$A = B \underset{\textbf{genau dann, wenn}}{\Longleftrightarrow} A \subset B \quad \text{und} \quad B \subset A.$$

Sind die Mengen A und B **nicht gleich**, so schreibt man $A \neq B$. Gilt $A \subset B$ und $A \neq B$, dann nennt man A eine **echte Teilmenge** von B.

Beispiel 1.2.1
Die leere Menge $\emptyset$ ist Teilmenge einer jeden Menge A, d. h. $\emptyset \subset A$ für jede Menge A. Jede Menge A ist eine Teilmenge von sich selbst, d. h. $A \subset A$.

Beispiel 1.2.2
Seien $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ und $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Dann ist A eine echte Teilmenge von B, da alle Elemente von A auch in B sind, aber B zusätzlich noch die Elemente 7 und 8 enthält.

Abbildung 1.2.1
Teilmengen im Venn-Diagramm.



Beispiel 1.2.3
M sei die Menge, die aus den Elementen a und b besteht, also $M = \{a, b\}$. Es gilt somit

- $a \in M$, da a ein Element der Menge M ist.
- $a \not\subset M$, da a keine Teilmenge von M, sondern ein Element von M ist.
- $\{a\} \subset M$, da $\{a\}$ eine Teilmenge von M ist.
- $\{a\} \notin M$ da $\{a\}$ kein Element, sondern eine Teilmenge von M ist.
- $a \neq \{a\}$, denn a ist ein Element der Menge M und $\{a\}$ ist eine Teilmenge von M.

Dieses Beispiel zeigt, daß man stets beachten sollte, ob man Teilmengen oder Elemente einer Menge betrachtet.

Satz 1.2.1
Besitzt eine Menge M genau m verschiedene Elemente, so ist die Anzahl der verschiedenen Teilmengen genau 2^m.

Die leere Menge und die Menge selbst werden bei der Anzahl der möglichen verschiedenen Teilmengen mitgezählt.
Die Anzahl der Elemente einer Menge M wird mit $|M|$ bezeichnet.

Beispiel 1.2.4

1.) Die leere Menge $\emptyset$ enthält keine Elemente. Sie enthält also nur $2^0 = 1$ Teilmenge und zwar $\emptyset$, d.h. sich selbst.

2.) Die Menge $A = \{a\}$ enthält ein Element. Die Menge A besitzt somit $2^1 = 2$ verschiedene Teilmengen. Diese sind $\emptyset$ und $A = \{a\}$.

3.) Die Menge $B = \{1,2,3\}$ besitzt $2^3 = 8$ verschiedene Teilmengen und zwar: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, B$.

Definition 1.2.2
M sei eine beliebige Menge. Dann heißt die Menge aller Teilmengen von M die **Potenzmenge** *von M,*

$$\mathcal{P}(M) = \{T \,|\, T \subset M\}.$$

Beispiel 1.2.5
Die Potenzmenge der Menge $B = \{1,2,3\}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, B\}.$$

1.3 Mengenoperationen

Betrachtet werden nun zwei Mengen M und N **mit derselben Grundmenge** G. Für diese Mengen werden nun Rechenregeln erklärt.

Definition 1.3.1
Die **Vereinigungsmenge** *V der Mengen M und N ist die Menge aller Elemente, die zu M oder zu N gehören. Dabei ist das hier verwendete* oder *kein* entweder-oder! *Die Mengenschreibweise hierfür lautet:*

$$N \cup M = M \cup N = \{x \,|\, x \in M \ \textit{oder}\ x \in N\}.$$

Die Sprechweise ist: M vereinigt mit N.

Beispiel 1.3.1
Es seien $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$, $C = \{1\}$ und $D = \{5,6\}$.
Dann gilt: $A \cup B = \{1,2,3,4\}$, $A \cup C = A$, $A \cup D = \{1,2,3,5,6\}$,
$B \cup C = \{1,2,3,4\}$, $B \cup D = \{2,3,4,5,6\}$, $C \cup D = \{1,5,6\}$.

A und B seien beliebige Mengen in einer Grundmenge G und T sei eine Teilmenge von A. Dann gilt:

$$\begin{array}{lll} A \cup \emptyset = A, & A \cup A = A, & A \cup G = G, \\ A \cup T = A, & A \subset (A \cup B), & B \subset (A \cup B). \end{array}$$

Es gilt also: $\qquad M \cup N = N \iff M \subset N.$

Die Vereinigung von $n \in \mathbb{N}$ Mengen M_i, $1 \leq i \leq n$ bezeichnet man mit

$$\begin{aligned} M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n &= \bigcup_{i=1}^{n} M_i \\ &= \{x \,|\, x \text{ liegt in mindestens einer der Mengen } M_i,\ 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

Die Vereinigung von unendlich vielen Mengen M_i bezeichnet man mit

$$\begin{aligned} M_1 \cup M_2 \cup \ldots &= \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \\ &= \{x \,|\, x \text{ liegt in mindestens einer der Mengen } M_i,\ i \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Definition 1.3.2
Die **Schnittmenge** *S der Mengen M und N ist die Menge aller Elemente,*

die gleichzeitig in der Menge M und in der Menge N enthalten sind. Die Mengenschreibweise hierfür lautet:

$$N \cap M = NM = MN = M \cap N = \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}.$$

Die Sprechweise ist: M geschnitten mit N.

Zwei Mengen M und N, die kein gemeinsames Element besitzen, heißen **elementefremd** oder **disjunkt**. Es folgt somit: M und N sind disjunkt, genau dann, wenn $M \cap N = \emptyset$ gilt.

Beispiel 1.3.2
Es seien $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$, $C = \{1\}$ und $D = \{5,6\}$. Dann gilt: $A \cap B = \{2,3\}$, $A \cap C = C$, $A \cap D = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$, $B \cap D = \emptyset$, $C \cap D = \emptyset$. Die Mengen A und D, B und C, B und D, sowie die Mengen C und D sind elementefremd oder disjunkt.

A und B seien beliebige Mengen in einer Grundmenge G und T sei eine Teilmenge von A, dann gilt:

$$\begin{array}{lll} A \cap \emptyset = \emptyset, & A \cap A = A, & A \cap G = A, \\ A \cap T = T, & (A \cap B) \subset A, & (A \cap B) \subset B. \end{array}$$

Es gilt also: $M \cap N = M \iff M \subset N.$

Den Schnitt von $n \in \mathbb{N}$ Mengen M_i, $1 \leq i \leq n$ bezeichnet man mit

$$\begin{aligned} M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n &= \bigcap_{i=1}^{n} M_i \\ &= \{x \mid x \text{ liegt in allen Mengen } M_i,\ 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

Den Schnitt von unendlich vielen Mengen M_i bezeichnet man mit

$$\begin{aligned} M_1 \cap M_2 \cap \ldots &= \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i \\ &= \{x \mid x \text{ liegt in jeder Menge } M_i,\ i \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Definition 1.3.3
Die **Differenzmenge** *D ist die Menge aller Elemente, die zu M, aber nicht zu N gehören. Die Mengenschreibweise hierfür lautet:*

$$M \setminus N = \{x \mid x \in M \textit{ und } x \notin N\}.$$

Die Sprechweise ist: M ohne N.

Beispiel 1.3.3
Es seien $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$, $C = \{1\}$ und $D = \{5,6\}$.
Dann gilt: $A \setminus B = C$, $B \setminus A = \{4\}$, $A \setminus C = \{2,3\}$, $C \setminus A = \emptyset$, $A \setminus D = A$, $D \setminus A = D$, $B \setminus C = B$, $C \setminus B = C$, $B \setminus D = B$, $D \setminus B = D$, $C \setminus D = C$, $D \setminus C = D$.

Ist N eine **Teilmenge** von M, so kann man auch das **Komplement** der Menge N bezüglich der Menge M bilden ($K = \complement_M N = N^{\complement_M}$). Man spricht hier auch von der **Komplementmenge**. Das Komplement von N bezüglich M besteht aus den Elementen, die zu M aber nicht zu N gehören.
In der Mengenschreibweise erhält man für $N \subset M$:

$$\complement_M N = N^{\complement_M} = M \setminus N = \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}.$$

Die Vereinigungs-, Schnitt- und Differenzmenge der Mengen $A = \{1,2,3\}$ und $B = \{2,3,4\}$ in Venn-Diagrammen.

Abbildung 1.3.1
Die Vereinigungsmenge $C = A \cup B = \{1,2,3,4\}$.

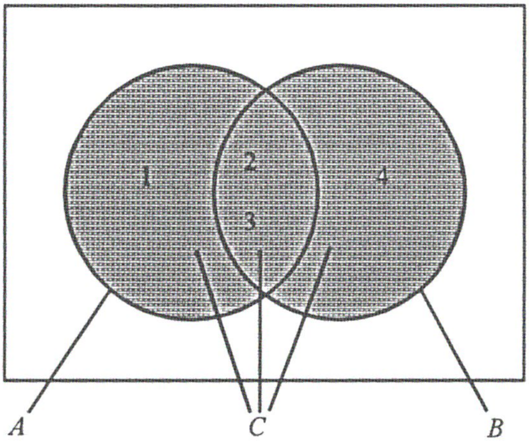


Abbildung 1.3.2
Die Schnittmenge $D = A \cap B = \{2,3\}$.

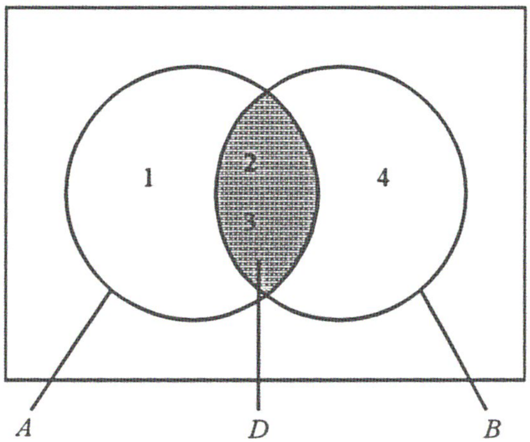
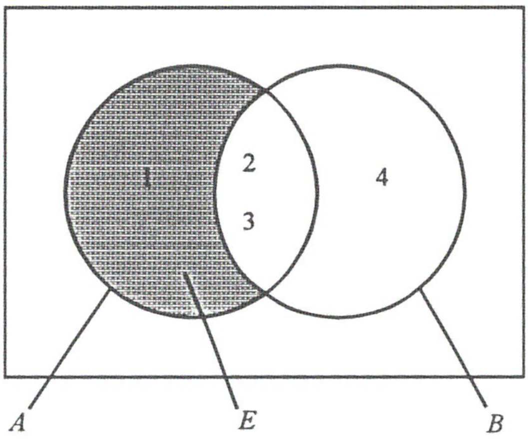


Abbildung 1.3.3
Die Differenzmenge $E = A \setminus B = \{1\}$.



Beispiel 1.3.4
Es seien $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$, $C = \{1\}$ und $D = \{5,6\}$. Dann gilt: $C^{\mathrm{C}_A} = \{2,3\}$. Weitere Kombinationen sind hier aufgrund der geforderten Teilmengenbeziehung nicht möglich.

A und B seien beliebige Mengen in einer Grundmenge G und T sei eine Teilmenge von A, dann gilt: $G \setminus A = \mathrm{C}_G A = A^{\mathrm{C}_G} = A^{\mathrm{C}}$, d.h. bei der

Komplementbildung bezüglich der Grundmenge läßt man das tiefgestellte Mengenzeichen der Grundmenge G bei C_G einfach weg. Weiter gilt:

$$\begin{array}{lll} A \setminus \emptyset = A, & \emptyset \setminus A = \emptyset, & A \setminus A = \emptyset, \\ A \setminus G = \emptyset, & A \setminus T = T^{C_A}, & T \setminus A = \emptyset, \\ (A^C)^C = A, & \emptyset^C = G, & G^C = \emptyset, \\ A^C \cup A = G, & A^C \cap A = \emptyset, & A \setminus B = A \cap B^C. \end{array}$$

Für Mengen gelten folgende Gesetze und Regeln:

- **Disjunkte Zerlegung:**
  $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- **Assoziativgesetz:**
  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- **Kommutativgesetz:**
  $A \cup B = B \cup A$,
  $A \cap B = B \cap A$.
- **Distributivgesetz:**
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- **De Morgansche Regeln:**
  $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$,
  $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$,
  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Für zwei endliche Mengen A und B ist die Anzahl der Elemente der Vereinigungsmenge gegeben durch:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

und die Anzahl der Elemente der Differenzmenge $A \setminus B$ kann mithilfe von

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$$

berechnet werden.

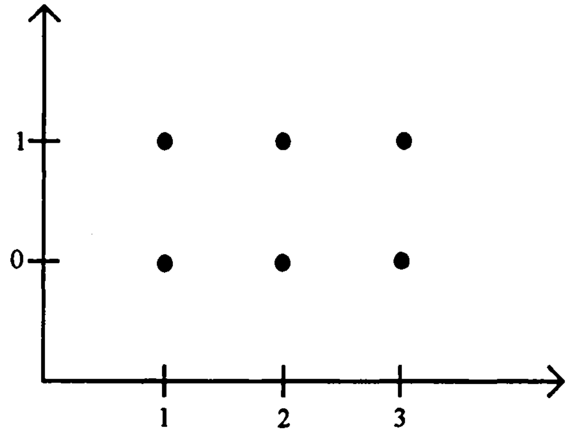
1.4 Direktes Produkt von Mengen

Definition 1.4.1
Die Menge aller **geordneten** *Paare* (a, b) *mit* $a \in A$ *und* $b \in B$ *heißt* **direktes Produkt** *oder* **kartesisches Produkt** *der beiden Mengen* A *und* B. *Man bezeichnet es mit* $A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A \text{ und } b \in B\}$. *Die Sprechweise hierfür ist: A Kreuz B.*

Ist nun $A \neq B$, $A, B \neq \emptyset$, so ist die Bildung des kartesischen Produkts nicht kommutativ, d. h. $A \times B \neq B \times A$. Ist eine der Mengen die leere Menge, so setzt man $A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset$.

Beispiel 1.4.1
Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{0, 1\}$.
Somit gilt: $A \times B = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$,
$B \times A = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$,
also $A \times B \neq B \times A$. Die Menge $A \times B$ wird im folgenden Schaubild dargestellt. Die einzelnen Elemente werden dabei als Punkte dargestellt.

Abbildung 1.4.1
Kartesisches Produkt zweier Mengen.
Die sechs Punkte stellen die Menge $A \times B$ des vorhergehenden Beispiels dar.



Satz 1.4.1
Sind die Mengen A und B endliche Mengen, dann gilt für die Anzahl der Elemente des direkten Produktes $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Für den n-dimensionalen Fall gilt:

Definition 1.4.2
Gegeben seien die Mengen A_1, $A_2, \ldots, A_n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann nennt man $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in A_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ ein **n-Tupel**. *Die Menge aller n-Tupel nennt man das* **direkte oder kartesische Produkt** *der Mengen A_1, $A_2, \ldots, A_n$. Man bezeichnet es mit*

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,|\, a_i \in A_i \text{ für } 1 \leq i \leq n\}.$$

Gilt $A_i = A$ für alle $1 \leq i \leq n$, so setzt man $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = A^n$.

Satz 1.4.2
Sind die Mengen A_1, $A_2, \ldots, A_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ endliche Mengen, dann gilt für die Anzahl der Elemente des direkten Produktes

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|.$$

1.5 Aufgaben zu Kapitel 1

Aufgabe 1.5.1

Es sei $B = \{b \mid b \text{ ist Bundesland der BRD}\}$. Beschreiben Sie die Menge B, indem Sie alle Elemente angeben.

Lösung:

B = {Baden-Württemberg, Bayern, Berlin, Brandenburg, Bremen, Hamburg, Hessen, Mecklenburg-Vorpommern, Niedersachsen, Nordrhein-Westfalen, Rheinland-Pfalz, Saarland, Sachsen, Sachsen-Anhalt, Schleswig-Holstein, Thüringen}.

Aufgabe 1.5.2

$N = \{n \mid n \text{ ist Mitglied der NATO (Stand 1994)}\}$. Beschreiben Sie die Menge N, indem Sie alle Elemente angeben.

Lösung:

N = {Belgien, BRD, Dänemark, Frankreich, Griechenland, Großbritannien, Island, Kanada, Luxemburg, Niederlande, Norwegen, Portugal, Spanien, Türkei, USA}.

Aufgabe 1.5.3

Geben Sie die Menge der Buchstaben folgender Worte an:

a) Tag,

b) MATHEMATIK,

c) UHU,

d) Mississippi.

Lösung:

a) $A = \{\mathrm{T}, \mathrm{a}, \mathrm{g}\}$,

b) $B = \{\mathrm{M}, \mathrm{A}, \mathrm{T}, \mathrm{H}, \mathrm{E}, \mathrm{I}, \mathrm{K}\}$,

c) $C = \{\mathrm{U}, \mathrm{H}\}$,

d) $D = \{\mathrm{M}, \mathrm{i}, \mathrm{s}, \mathrm{p}\}$.

Aufgabe 1.5.4

Beschreiben Sie folgende Menge durch die Angabe ihrer Elemente.

a) $A = \{a \mid a$ ist eine durch 7 teilbare natürliche Zahl$\}$.

b) $B = \{b \mid b$ ist eine Primzahl zwischen 4 und 6$\}$.

c) $C = \{c \mid c$ ist eine Primzahl zwischen 24 und 28$\}$.

d) $D = \{d \mid 2 \cdot d$ ist eine natürliche Zahl, die durch 2 teilbar ist$\}$.

e) $E = \{e \mid e + 1$ ist eine natürliche Zahl, die durch 5 teilbar ist$\}$.

f) $F = \{f \mid f - 1$ ist eine negative ganze Zahl, die durch 3 teilbar ist$\}$.

Lösung:

a) $A = \{7, 14, 21, 28, 35, \ldots\}$.

b) $B = \{5\}$.

c) $C = \{\} = \emptyset$, da es keine Primzahl zwischen 24 und 28 gibt.

d) $D = \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

e) $E = \{4, 9, 14, 19, 24, \ldots\}$.

f) $F = \{-2, -5, -8, -11, -14, \ldots\}$.

Aufgabe 1.5.5

Beschreiben Sie die Menge $E = \{$Belgien, BRD, Frankreich, Italien, Luxemburg, Niederlande, Dänemark, Großbritannien, Irland, Griechenland, Spanien, Portugal$\}$ durch die Eigenschaft(en) ihrer Elemente.

Lösung:

$E = \{e \mid e$ ist Mitglied der EWG (Stand 1994)$\}$.

Aufgabe 1.5.6

Beschreiben Sie folgende Mengen durch die Eigenschaften ihrer Elemente.

a) $A = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$.

b) $B = \{17, 19, 23, 29, 31\}$.

c) $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$.

d) $D = \{7, 21, 35, 49, \ldots\}$.

e) $E = \{3, 7, 11, 15, 19, \ldots\}$.

Lösung:

a) $A = \{a \mid a \text{ ist eine durch 3 teilbare natürliche Zahl}\}$.

b) $B = \{b \mid b \text{ ist eine Primzahl zwischen 17 und 31}\}$ oder
$B = \{b \mid b \text{ ist eine Primzahl zwischen 14 und 36}\}$ oder
$B = \{b \mid b \text{ ist eine Primzahl zwischen 15 und 32}\}$ usw. .

c) $C = \{c \mid c \text{ ist eine Primzahl kleiner gleich 13}\}$.

d) $D = \{d \mid d + 7 \text{ ist eine natürliche Zahl, die durch 14 teilbar ist}\}$.

e) $E = \{e \mid e + 1 \text{ ist eine natürliche Zahl, die durch 4 teilbar ist}\}$.

Aufgabe 1.5.7

Geben Sie mindestens zwei Grundmengen zu den nachfolgenden Mengen an.

a) $\emptyset$.

b) $C = \{\text{Adler, Bussard, Habicht, Milan}\}$.

c) $D = \{\text{Mercedes-Benz, Volkswagen}\}$.

d) $E = \{\text{Hund, Katze}\}$.

e) $A = \{a \mid a \text{ ist eine durch 3 teilbare Zahl}\}$.

Lösung:

a) Jede beliebige Menge ist möglich, z. B. $G = \{1, 2\}$ oder die Menge aller italienischen Bekleidungshersteller.

b) Menge aller Raubvögel, Menge aller Vögel.

c) Menge aller deutschen Automobilmarken, Menge aller europäischen Automobilmarken.

d) Menge aller Haustiere, Menge aller Säugetiere.

e) Mögliche Grundmengen sind z. B. $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 1.5.8

Geben Sie für folgende Mengen die Teilmengenbeziehungen an.

$$\begin{aligned} A &= \{a \mid a \text{ ist ein Land}\}, \\ B &= \{\text{Italien}\}, \\ C &= \{c \mid c \text{ ist ein Land in Europa}\}, \\ D &= \{\text{Neuseeland}\}. \end{aligned}$$

Lösung:

$B \subset C$, $B \subset A$, $C \subset A$, $D \subset A$.

Aufgabe 1.5.9

Geben Sie für folgende Mengen sämtliche Teilmengen und mindestens zwei Obermengen an, die Teilmengen einer gegebenen Grundmenge sind.

a) $A = \{\text{Vogel}\}$ (Die Grundmenge sei die Menge aller Tierarten.)

b) $B = \{\text{schwarz, weiß}\}$ (Die Grundmenge sei die Menge aller Farben.)

c) $C = \{a, b, c\}$ (Die Grundmenge sei die Menge aller kleinen Buchstaben des Alphabets.)

d) $D = \{1, 2, 3, 4\}$ (Die Grundmenge sei die Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.)

Lösung:

a) $2^1 = 2$ Teilmengen: $\emptyset$, $A = \{\text{Vogel}\}$. Mögliche Obermengen sind z. B. $A_1 = \{\text{Vogel, Insekt}\}$ oder $A_2 = \{\text{Vogel, Säugetier, Amphibium}\}$.

b) $2^2 = 4$ Teilmengen: $\emptyset$, $B = \{\text{schwarz, weiß}\}$, $\{\text{schwarz}\}$, $\{\text{weiß}\}$. Mögliche Obermengen sind z. B. $B_1 = \{\text{schwarz, weiß, grau}\}$ oder $B_2 = \{\text{schwarz, weiß, grau, rot, blau, gelb}\}$.

c) $2^3 = 8$ Teilmengen:
$\emptyset$, $C = \{a, b, c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$.
Mögliche Obermengen sind z. B. $C_1 = \{a, b, c\}$ oder $C_2 = \{a, b, c, z\}$ oder $C_3 = \{a, b, c, d, e, \ldots, x, y, z\}$.

d) $2^4 = 16$ Teilmengen: $\emptyset$, $D = \{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$. Alle möglichen Obermengen, die gleichzeitig Teilmengen der angegebenen Grundmenge sind, sind $D = \{1, 2, 3, 4\}$, $D_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $D_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Aufgabe 1.5.10
Eine Menge M besitzt unter anderem folgende Teilmengen:
$A = \{2, 5, 7\}$, $B = \{4, 6, 9\}$, $C = \{2, 4, 7, 8\}$ und $D = \{1, 3\}$.

a) Geben Sie mindestens drei Mengen M an, die die angegebenen Mengen als Teilmengen besitzen.

b) Die Menge M mit obigen Teilmengen enthalte genau 9 Elemente. Geben Sie die gesuchte Menge M an.

Lösung:

a) Die gesuchten Mengen müssen mindestens die Elemente der angegebenen Teilmengen enthalten, also die natürlichen Zahlen von 1 bis 9. Also muß die Menge $M_0 = \{1, 2, \ldots, 9\}$ Teilmenge dieser Mengen sein. Die Mengen A, B, C und D sind Teilmengen der Menge M_0. Somit ist M_0 bereits eine geforderte Menge. Weitere Mengen mit der gewünschten Eigenschaft wären z. B. $M_1 = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $M_2 = \mathbb{N}$, $M_3 = \mathbb{Z}$, $M_4 = \{-1, 0, 1, 2, \ldots, 9, 10, 19, 445\}$.

b) Die gesuchte Menge ist die Menge $M_0 = \{1, 2, \ldots, 9\}$ aus Teilaufgabe a), da diese als einzige genau 9 Elemente besitzt und die geforderten Eigenschaften bezüglich der Teilmengen erfüllt.

Aufgabe 1.5.11
Die Einwohner einer Kleinstadt können in zwei Gruppen eingeteilt werden. In Personen, die ihr Fahrzeug selber reparieren und in Personen, die ihr Fahrzeug zum ortsansässigen Kfz-Mechaniker bringen. Zu welcher Gruppe gehört der Kfz-Mechaniker?

Lösung:
Der Kfz-Mechaniker gehört zu beiden Gruppen, also gehört er zur Schnittmenge dieser Gruppen.

Aufgabe 1.5.12
Stellen Sie folgende Mengen als endliche Vereinigung einelementiger (disjunkter) Mengen dar.

a) $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

b) $\{2, 4, 6, \ldots, 2n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

c) $\{1, 3, 5, \ldots, (2n-1)\}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

a) $\{1, 2, 3, \ldots, n\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{i\}$.

b) $\{2, 4, 6, \ldots, 2n\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{2i\}$.

c) $\{1, 3, 5, \ldots, (2n-1)\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{2i-1\}$.

Aufgabe 1.5.13

Stellen Sie folgende Mengen als unendliche Vereinigung einelementiger (disjunkter) Mengen dar.

a) $\mathbb{N}$.

b) Menge der geraden natürlichen Zahlen.

c) Menge der ungeraden natürlichen Zahlen.

Lösung:

a) $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{i\}$.

b) $\{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{2i\}$.

c) $\{1, 3, 5, \ldots, (2n-1), \ldots\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{2i-1\}$.

Aufgabe 1.5.14

Gegeben seien die Grundmenge $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, sowie $A = \{0\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$, $D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ und $E = \{2, 3, 5, 7\}$.

a) Beschreiben Sie die Mengen durch die Eigenschaften ihrer Elemente.

b) Welche oben angegebenen Mengen sind Teilmengen von B?

c) Bilden Sie $B \cup C$, $B \cap C$, $C \cup D$, $C \cap D$, $C \cup E$ und $D \cup E$.

d) Bilden Sie A^{C}, B^{C}, C^{C}, D^{C}, E^{C} und G^{C}.

e) Bilden Sie $G \setminus A$, $G \setminus B$, $B \setminus A$, $B \setminus C$, $B \setminus D$, $G \setminus E$, $C \setminus E$ und $E \setminus C$.

f) Bilden Sie $(C \cup D) \cap E$, $(D \cup C) \cap A$ und $(E \cup C) \cap D$.

g) Bilden Sie $(C \cap D) \cup E$, $(D \cap C) \cup A$ und $(E \cap C) \cup D$.

h) Bilden Sie $(C \cup D)^{\mathrm{C}}$, $(B \cup C)^{\mathrm{C}}$, $(B \cup D)^{\mathrm{C}}$, $(B \cup E)^{\mathrm{C}}$, $(G \cup A)^{\mathrm{C}}$, $(E \cup D)^{\mathrm{C}}$, $(E \cup C)^{\mathrm{C}}$, $(E \cup A)^{\mathrm{C}}$, $(A \cup B)^{\mathrm{C}}$, $(A \cup C)^{\mathrm{C}}$ und $(A \cup D)^{\mathrm{C}}$.

i) Bilden Sie $(C \cap D)^{\mathrm{C}}$, $(B \cap C)^{\mathrm{C}}$, $(B \cap D)^{\mathrm{C}}$, $(B \cap E)^{\mathrm{C}}$, $(C \cap E)^{\mathrm{C}}$, $(D \cap E)^{\mathrm{C}}$ und $(G \cap A)^{\mathrm{C}}$.

j) Bilden Sie $(D \cap E)^{\mathrm{C}} \setminus C$ und $(C \cap E)^{\mathrm{C}} \setminus D$.

k) Bilden Sie $B \setminus (C \cup E)$, $(B \setminus C) \cap (B \setminus E)$, $B \setminus (C \cap E)$ und $(B \setminus C) \cup (B \setminus E)$.

Lösung:

a) G ist die Menge der ganzen Zahlen von Null bis 9.
A ist die Menge, die nur die Null enthält.
B ist die Menge der natürlichen Zahlen kleiner gleich 9.
C ist die Menge der geraden natürlichen Zahlen kleiner gleich 8.
D ist die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen kleiner gleich 9.
E ist die Menge der (natürlichen) Primzahlen kleiner gleich 7.

b) C, D, E.

c) $B \cup C = B$, $B \cap C = C$, $C \cup D = B$, $C \cap D = \emptyset$,
$C \cup E = \{2,3,4,5,6,7,8\}$ und $D \cup E = \{1,2,3,5,7,9\}$.

d) $A^{\mathrm{C}} = B$, $B^{\mathrm{C}} = A$, $C^{\mathrm{C}} = \{0,1,3,5,7,9\}$, $D^{\mathrm{C}} = \{0,2,4,6,8\}$,
$E^{\mathrm{C}} = \{0,1,4,6,8,9\}$ und $G^{\mathrm{C}} = \emptyset$.

e) $G \setminus A = B$, $G \setminus B = A$, $B \setminus A = B$, $B \setminus C = D$, $B \setminus D = C$,
$G \setminus E = \{0,1,4,6,8,9\}$, $C \setminus E = \{4,6,8\}$ und $E \setminus C = \{3,5,7\}$.

f) $(C \cup D) \cap E = B \cap E = E$, $(D \cup C) \cap A = B \cap A = \emptyset$ und
$(E \cup C) \cap D = \{2,3,4,5,6,7,8\} \cap \{3,5,7\} = \{3,5,7\}$.

g) $(C \cap D) \cup E = \emptyset \cup E = E$, $(D \cap C) \cup A = \emptyset \cup A = A$ und
$(E \cap C) \cup D = \{2\} \cup \{1,3,5,7,9\} = \{1,2,3,5,7,9\}$.

h) $(C \cup D)^{\mathrm{C}} = B^{\mathrm{C}} = A$, $(B \cup C)^{\mathrm{C}} = B^{\mathrm{C}} = A$,
$(B \cup D)^{\mathrm{C}} = B^{\mathrm{C}} = A$, $(B \cup E)^{\mathrm{C}} = B^{\mathrm{C}} = A$,
$(G \cup A)^{\mathrm{C}} = G^{\mathrm{C}} = \emptyset$,
$(E \cup D)^{\mathrm{C}} = \{1,2,3,5,7,9\}^{\mathrm{C}} = \{0,4,6,8\}$,
$(E \cup C)^{\mathrm{C}} = \{2,3,4,5,6,7,8\}^{\mathrm{C}} = \{0,1,9\}$,
$(E \cup A)^{\mathrm{C}} = \{0,2,3,5,7\}^{\mathrm{C}} = \{1,4,6,8,9\}$, $(A \cup B)^{\mathrm{C}} = G^{\mathrm{C}} = \emptyset$,
$(A \cup C)^{\mathrm{C}} = \{0,2,4,6,8\}^{\mathrm{C}} = D$ und
$(A \cup D)^{\mathrm{C}} = \{0,1,3,5,7,9\}^{\mathrm{C}} = C$.

i) $(C \cap D)^{\mathrm{C}} = \emptyset^{\mathrm{C}} = G$, $(B \cap C)^{\mathrm{C}} = C^{\mathrm{C}} = \{0,1,3,5,7,9\} = A \cup D$,
$(B \cap D)^{\mathrm{C}} = D^{\mathrm{C}} = \{0,2,4,6,8,\} = A \cup C$,
$(B \cap E)^{\mathrm{C}} = E^{\mathrm{C}} = \{0,1,4,6,8,9\}$,
$(C \cap E)^{\mathrm{C}} = \{2\}^{\mathrm{C}} = \{0,1,3,4,5,6,7,8,9\}$,
$(D \cap E)^{\mathrm{C}} = \{3,5,7\}^{\mathrm{C}} = \{0,1,2,4,6,8,9\}$ und
$(G \cap A)^{\mathrm{C}} = \{0\}^{\mathrm{C}} = A^{\mathrm{C}} = B$.

j) $(D \cap E)^{\mathrm{C}} \setminus C = \{3,5,7\}^{\mathrm{C}} \setminus C = \{0,1,2,4,6,8,9\} \setminus \{2,4,6,8\} = \{0,1,9\}$ und $(C \cap E)^{\mathrm{C}} \setminus D = \{2\}^{\mathrm{C}} \setminus D = \{0,1,3,4,5,6,7,8,9\} \setminus \{1,3,5,7,9\} = \{0,2,4,6,8\}$.

k) $B \setminus (C \cup E) = B \setminus \{2,3,4,5,6,7,8\} = \{1,9\}$,
$(B \setminus C) \cap (B \setminus E) = D \cap \{1,4,6,8,9\} = \{1,9\}$,
$B \setminus (C \cap E) = B \setminus \{2\} = \{1,3,4,5,6,7,8,9\}$ und
$(B \setminus C) \cup (B \setminus E) = D \cup \{1,4,6,8,9\} = \{1,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Aufgabe 1.5.15

Gegeben seien die Grundmenge $G = \{a, b, bb, c, cc, ccc, d, dd, ddd, dddd\}$, sowie $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{bb, cc, dd\}$, $C = \{ccc, ddd\}$, $D = \{dddd\}$ und $E = \{a, bb, ccc, dddd\}$.

a) Bilden Sie $B \cup C$, $B \cap C$, $C \cup D$, $C \cap D$, $C \cup E$ und $D \cup E$.

b) Bilden Sie A^{C}, B^{C}, C^{C}, D^{C}, E^{C} und G^{C}.

c) Bilden Sie $G \setminus A$, $G \setminus B$, $B \setminus A$, $B \setminus C$, $B \setminus D$, $G \setminus E$, $C \setminus E$ und $E \setminus C$.

d) Bilden Sie $(C \cup D) \cap E$, $(D \cup C) \cap A$ und $(E \cup C) \cap D$.

e) Bilden Sie $(C \cap D) \cup E$, $(D \cap C) \cup A$ und $(E \cap C) \cup D$.

f) Bilden Sie $(C \cup D)^{\mathrm{C}}$, $(B \cup C)^{\mathrm{C}}$, $(B \cup D)^{\mathrm{C}}$, $(B \cup E)^{\mathrm{C}}$ und $(G \cup A)^{\mathrm{C}}$.

g) Bilden Sie $(C \cap D)^C$, $(B \cap C)^C$, $(B \cap D)^C$, $(B \cap E)^C$ und $(G \cap A)^C$.

h) Bilden Sie $(D \cap E)^C \setminus C$ und $(C \cap E)^C \setminus D$.

i) Bilden Sie $B \setminus (C \cup E)$, $(B \setminus C) \cap (B \setminus E)$, $B \setminus (C \cap E)$ und $(B \setminus C) \cup (B \setminus E)$.

Lösung:

a) $B \cup C = \{bb, cc, dd, ccc, ddd\}$, $B \cap C = \emptyset$, $C \cup D = \{ccc, ddd, dddd\}$, $C \cap D = \emptyset$, $C \cup E = \{a, bb, ccc, ddd, dddd\}$ und $D \cup E = E$.

b) $A^C = \{bb, cc, ccc, dd, ddd, dddd\}$, $B^C = \{a, b, c, d, ccc, ddd, dddd\}$, $C^C = \{a, b, c, d, bb, cc, dd, dddd\}$, $D^C = \{a, b, c, d, bb, cc, dd, ccc, ddd\}$, $E^C = \{b, c, d, cc, dd, ddd\}$ und $G^C = \emptyset$.

c) $G \setminus A = A^C = \{bb, cc, dd, ccc, ddd, dddd\}$,
$G \setminus B = B^C = \{a, b, c, d, ccc, ddd, dddd\}$,
$B \setminus A = B$, $B \setminus C = B$, $B \setminus D = B$,
$G \setminus E = E^C = \{b, c, d, cc, dd, ddd\}$, $C \setminus E = \{ddd\}$ und
$E \setminus C = \{a, bb, dddd\}$.

d) $(C \cup D) \cap E = \{ccc, ddd, dddd\} \cap \{a, bb, ccc, dddd\} = \{ccc, dddd\}$,
$(D \cup C) \cap A = \{ccc, ddd, dddd\} \cap \{a, b, c, d\} = \emptyset$ und
$(E \cup C) \cap D = \{a, bb, ccc, ddd, dddd\} \cap \{dddd\} = \{dddd\} = D$.

e) $(C \cap D) \cup E = \emptyset \cup E = E$, $(D \cap C) \cup A = \emptyset \cup A = A$ und
$(E \cap C) \cup D = \{ccc\} \cup D = \{ccc, dddd\}$.

f) $(C \cup D)^C = \{ccc, ddd, dddd\}^C = \{a, b, c, d, bb, cc, dd\}$,
$(B \cup C)^C = \{bb, cc, dd, ccc, ddd\}^C = \{a, b, c, d, dddd\}$,
$(B \cup D)^C = \{bb, cc, dd, dddd\}^C = \{a, b, c, d, ccc, ddd\}$,
$(B \cup E)^C = \{a, bb, cc, dd, ccc, dddd\}^C = \{b, c, d, ddd\}$,
$(C \cup D)^C = \{ccc, ddd, dddd\}^C = \{a, b, c, d, bb, cc, dd\}$ und
$(G \cup A)^C = G^C = \emptyset$.

g) $(C \cap D)^C = \emptyset^C = G$, $(B \cap C)^C = \emptyset^C = G$, $(B \cap D)^C = \emptyset^C = G$,
$(B \cap E)^C = \{bb\}^C = G \setminus \{bb\} = \{a, b, c, d, cc, dd, ccc, ddd, dddd\}$,
$(C \cap D)^C = \emptyset^C = G$ und
$(G \cap A)^C = A^C = G \setminus A = \{bb, cc, dd, ccc, ddd, dddd\}$.

h) $(D \cap E)^C \setminus C = D^C \setminus C = \{a, b, c, d, bb, cc, dd, ccc, ddd\} \setminus \{ccc, ddd\} =$
$\{a, b, c, d, bb, cc, dd\}$ und

$(C \cap E)^C \setminus D = \{ccc\}^C \setminus D = \{a, b, c, d, bb, cc, dd, ddd, dddd\} \setminus \{dddd\} = \{a, b, c, d, bb, cc, dd, ddd\}$.

i) $B \setminus (C \cup E) = \{bb, cc, dd\} \setminus \{a, bb, ccc, ddd, dddd\} = \{cc, dd\}$,
$(B \setminus C) \cap (B \setminus E) = B \cap \{cc, dd\} = \{cc, dd\}$,
$B \setminus (C \cap E) = B \setminus \{ccc\} = B$ und
$(B \setminus C) \cup (B \setminus E) = B \cup \{cc, dd\} = B$.

Aufgabe 1.5.16
In einer Klasse schrieben 25 Schüler Klausuren in den Fächern Deutsch und Geschichte. 8 Schüler hatten das Lernziel in Deutsch und 10 Schüler in Geschichte nicht erreicht. 4 Schüler hatten das Lernziel in Deutsch und in Geschichte nicht erreicht.
Wieviel Schüler fielen in Deutsch oder Geschichte, in Deutsch, aber nicht in Geschichte und in Geschichte aber nicht in Deutsch durch die Prüfung?

Lösung:
S sei die Menge der Schüler in dieser Klasse, D die Menge der Schüler, die in Deutsch das Lernziel nicht erreichten und G sei die Menge der Schüler, die das Lernziel in Geschichte nicht erreichten.
Somit erhält man: $|S| = 25$, $|D| = 8$ und $|G| = 10$.
In Deutsch und Geschichte fielen $|D \cap G| = 4$ Schüler durch. In Deutsch oder Geschichte erreichten $|D \cup G| = |D| + |G| - |D \cap G| = 8 + 10 - 4 = 14$ Schüler nicht das geforderte Lernziel.
Aus $|D| = |D \setminus G| + |D \cap G|$ folgt: $|D \setminus G| = |D| - |D \cap G| = 8 - 4 = 4$, d.h. 4 Schüler bestanden die Klausur in Geschichte, aber nicht in Deutsch.
Aus $|G| = |G \setminus D| + |D \cap G|$ folgt: $|G \setminus D| = |G| - |D \cap G| = 10 - 4 = 6$, d.h. 6 Schüler bestanden die Klausur in Deutsch, aber nicht in Geschichte.

Aufgabe 1.5.17
Von 180 befragten Personen kaufen 120 Personen freitags, 155 Personen samstags und 20 Personen weder freitags noch samstags ein. Wieviel Personen kaufen nur samstags, nur freitags, samstags und freitags, samstags oder freitags ein?

Lösung:
F sei die Menge der Personen, die freitags einkaufen, S die Menge der Personen, die samstags einkaufen und W die Menge der Personen, die weder

freitags noch samstags einkaufen.
Wichtig ist hier, daß sowohl die Mengen F und W, als auch die Mengen S und W disjunkt sind.
Man erhält: $|F| = 120$, $|S| = 155$, $|W| = 20$ und $|F \cup S \cup W| = 180$.
Für die Vereinigungsmenge von F und S gilt: $|F \cup S| = |F \cup S \cup W| - |W| = 180 - 20 = 160$. Es kaufen also 160 Personen samstags oder freitags ein.
Aus $160 = |F \cup S| = |F| + |S| - |F \cap S| = 120 + 155 - |F \cap S|$ folgt $|F \cap S| = 115$.
Somit kaufen 115 Personen freitags und samstags ein.
Die Anzahl der Personen, die nur freitags einkaufen, erhält man durch die Formel $|F \setminus S| = |F| - |F \cap S| = 120 - 115 = 5$.
Die Anzahl der Personen, die nur samstags einkaufen, erhält man durch die Formel $|S \setminus F| = |S| - |S \cap F| = 155 - 115 = 40$.

Aufgabe 1.5.18
Gegeben seien die Mengen $L = \{\text{BRD, Italien, Frankreich}\}$ und
$S = \{\text{Berlin, Paris, Rom}\}$.

a) Geben Sie die Menge $L \times S$ in beschreibender Form an. Wieviel Elemente besitzt diese Menge?

b) Geben Sie die Teilmenge von $L \times S$ an, für die gilt:
$T = \{(l, s) \mid s \text{ ist die Hauptstadt von } l\}$.

Lösung:

a) $L \times S = \{$(BRD, Berlin), (BRD, Paris), (BRD, Rom), (Italien, Berlin), (Italien, Paris), (Italien, Rom), (Frankreich, Berlin), (Frankreich, Paris), (Frankreich, Rom)$\}$.
Die Anzahl der Elemente ist gegeben durch $|L \times S| = |L| \cdot |S| = 3 \cdot 3 = 9$.

b) $T = \{$(BRD, Berlin), (Italien, Rom), (Frankreich, Paris)$\} \subset L \times S$.

Aufgabe 1.5.19
Beschreiben Sie die Gesamtheit folgender Ereignisse durch eine geeignete Menge.

a) Man wirft dreimal hintereinander ein Münze. Wieviel Elemente besitzt diese Menge?

b) Die Menge aller fünfstelligen Telefonnummern sei T. Wieviel fünfstellige Telefonnummern gibt es (die Null sei auch an der ersten Position zugelassen).

Lösung:

a) Bei einem Münzwurf sind zwei Ausgänge möglich (ohne Rand), Kopf K oder Zahl Z. Diese Ereignisse lassen sich zunächst zu der Menge $E = \{\text{K, Z}\}$ zusammenfassen. Dreimal wird hintereinander geworfen, d.h. die geeigente Menge ist $E^3 = \{(e_1, e_2, e_3) \,|\, e_i \in E \text{ für } i = 1, 2, 3\}$. Die Anzahl der Elemente ist $|E^3| = |E|^3 = 2^3 = 8$.

b) $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ sind die zulässigen Nummer für eine Telefonnummer. Diese soll nun fünfstellig sein. Die gesuchte Menge ist dann: $N^5 = T = \{(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) \,|\, t_i \in N \text{ für } i = 1, 2, 3, 4, 5\}$.
Es gibt also $|N^5| = |N|^5 = 10^5 = 100\,000$ fünfstellige Telefonnummern.

Aufgabe 1.5.20

Mit einem Würfel werde viermal hintereinander geworfen.

a) Fassen Sie diese Ereignisse in einer Menge zusammen. Wieviel Elemente besitzt diese Menge?

b) Geben Sie die Menge D an, die die Ereignisse: "Im dritten Wurf fällt eine 2." beschreibt.

c) Geben Sie alle Elemente der Menge Z an, bei denen die Summe der geworfenen Augenzahlen 22 ist.

Lösung:

a) Mit einem Würfel kann man die Augenzahlen 1 bis 6 werfen, d.h. die Menge $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ enthält alle möglichen Zahlen, die geworfen werden können. Es wird nun viermal hintereinander geworfen, d.h. $A \times A \times A \times A = A^4 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \,|\, a_i \in A \text{ für alle } i = 1, 2, 3, 4\}$ wäre die gesuchte Menge. Diese Menge enthält $|A^4| = |A|^4 = 6^4 = 1296$ Elemente.

b) $D = \{(a_1, a_2, 2, a_4) \,|\, a_i \in A \text{ für alle } i = 1, 2, 4\}$.

c) $22 = 6 + 6 + 6 + 4 = 6 + 6 + 5 + 5$, eine andere Möglichkeit gibt es hier nicht. Somit erhält man:
$Z = \{(6,6,6,4), (6,6,4,6), (6,4,6,6), (4,6,6,6), (6,6,5,5), (6,5,6,5),$
$(5,6,6,5), (5,5,6,6), (6,5,5,6), (5,6,5,6)\}$.

Kapitel 2

Zahlenbereiche und Rechenregeln

Bei den meisten Sachverhalten und Problemstellungen, samt deren Lösungen in der Mathematik, sind Zahlen notwendige Hilfsmittel. Je nach Aufgabenstellung werden verschiedene Zahlenbereiche zugrunde gelegt: Für das Zählen der Tore bei einem Fußballspiel genügen weit weniger komplizierte Zahlen als bei der Berechnung der Lösungen der Gleichung $x^2 = -3$.
Deshalb werden die folgenden Zahlenbereiche eingeführt:

- die Menge der **natürlichen Zahlen** $\mathbb{N}$,
- die Menge der **ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$,
- die Menge der **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$,
- die Menge der **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$,
- die Menge der **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$.

2.1 Die natürlichen Zahlen

Schon in ganz frühen Jahren, oftmals schon vor Eintritt in die Schule überhaupt, stößt man auf den ersten und einfachsten Zahlenbereich, die

natürlichen Zahlen. Sie werden beim einfachen Zählen, Abzählen oder Aufzählen von endlich vielen Objekten, bei der Feststellung oder Festlegung von Reihen- und Rangfolgen und bei einfachen Meßproblemen benötigt.

Definition 2.1.1
Die **natürlichen Zahlen** *sind gegeben durch*

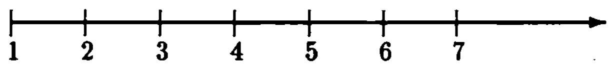
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

In vielen Fällen wird zusätzlich noch die Zahl 0 benötigt, um beispielsweise anzuzeigen, daß man überhaupt kein Auto besitzt. Wird zu den natürlichen Zahlen die Zahl 0 hinzugefügt, so schreibt man

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Graphisch werden die natürlichen Zahlen auf dem Zahlenstrahl dargestellt:

Abbildung 2.1.1
Die natürlichen Zahlen auf dem Zahlenstrahl



Beispiel 2.1.1

1.) Die Zahl $1 \in \mathbb{N}$ beschreibt die Anzahl der Häuser, die Herr M. besitzt.

2.) Die Zahl $108 \in \mathbb{N}$ legt die Plazierung eines Läufers bei einem Volkslauf fest.

3.) Die Zahl $13\,983\,816 \in \mathbb{N}$ stellt die Anzahl der verschiedenen Tippreihen beim Zahlenlotto 6 aus 49 dar.

Der italienische Mathematiker **Giuseppe Peano** (1858 - 1932) hat für die natürlichen Zahlen ein System von fünf Axiomen vorgeschlagen:

1.) 1 ist eine natürliche Zahl.

2.) Jeder natürlichen Zahl n ist genau eine natürliche Zahl n' zugeordnet, die der Nachfolger von n genannt wird ($n' = n + 1$).

3.) 1 ist kein Nachfolger (1 ist die kleinste natürliche Zahl).

4.) Sind die natürlichen Zahlen n, m verschieden, so sind auch ihre Nachfolger n' und m' verschieden ($n \neq m \Longrightarrow n' \neq m'$).

5.) Enthält eine Menge M natürlicher Zahlen die Zahl 1 und folgt aus $n \in M$ stets $n' \in M$ (n' sei der Nachfolger von n, also $n' = n + 1$), so besteht M aus allen natürlichen Zahlen, d. h. $M = \mathbb{N}$.

Aufgrund der Eigenschaft 2.) enthält $\mathbb{N}$ unendlich viele Elemente, denn zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine größere Zahl $n' = n + 1$, die auch wieder in $\mathbb{N}$ enthalten ist. Es gibt also keine größte natürliche Zahl. Allerdings gibt es eine kleinste natürliche Zahl, nämlich die 1. Dies folgt aus den Eigenschaften 1.) und 3.).

Um mit diesen Zahlen auch Berechnungen durchführen zu können, werden die vier **Grundrechenarten**

- Addition,
- Subtraktion,
- Multiplikation und
- Division

eingeführt.

Beispiel 2.1.2
Gegeben seien die natürlichen Zahlen 2, 4 und 17. Dann gilt:

- Addition:
  $2 + 4 = 4 + 2 = 6,\ 2 + 17 = 17 + 2 = 19$ und $4 + 17 = 17 + 4 = 21$.
- Subtraktion:
  $4 - 2 = 2,\ 17 - 2 = 15$ und $17 - 4 = 13$.
  Nicht möglich in $\mathbb{N}$ sind aber $2 - 4,\ 2 - 17$ und $4 - 17$.

- Multiplikation:
  $2 \cdot 4 = 4 \cdot 2 = 8,\ 2 \cdot 17 = 17 \cdot 2 = 34$ und $4 \cdot 17 = 17 \cdot 4 = 68$.

- Division:
  $4 : 2 = 2$.
  Nicht möglich in $\mathbb{N}$ sind aber $2 : 4,\ 2 : 17,\ 17 : 2,\ 4 : 17$ und $17 : 4$.

Dieses Beispiel zeigt, daß Addition und Multiplikation zweier natürlicher Zahlen immer möglich sind, Subtraktion und Division dagegen nur in Spezialfällen. Mit aus diesem Grund müssen die natürlichen Zahlen erweitert werden.

2.2 Die ganzen Zahlen

Im letzten Abschnitt wurde festgestellt, daß die Differenz zweier natürlicher Zahlen nur dann zu berechnen war, wenn die erste Zahl größer ist als die Zahl, die abgezogen wird. Ebenso kann man nicht ausdrücken, ob jemand auf seinem Bankkonto 10 000 DM Guthaben oder 10 000 DM Schulden hat, ohne die Worte Guthaben bzw. Schulden zu erwähnen. Mithilfe der **ganzen Zahlen** werden diese Probleme gelöst.

Definition 2.2.1
Die **ganzen Zahlen** *sind gegeben durch*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Graphisch werden die ganzen Zahlen auf der Zahlengeraden dargestellt:

Abbildung 2.2.1
Die ganzen Zahlen auf der Zahlengeraden