Stochastik

Übungen für Einsteiger

Aufgaben mit
erläuterten Lösungen

Von
Diplom-Volkswirt
Lothar Schmeink

R. Oldenbourg Verlag München Wien

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Schmeink, Lothar:
Stochastik : Übungen für Einsteiger ; Aufgaben mit erläuterten Lösungen / von Lothar Schmeink. - München ; Wien : Oldenbourg, 1996
ISBN 3-486-23686-5

© 1996 R. Oldenbourg Verlag GmbH, München

Das Werk einschließlich aller Abbildungen ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen.

Gesamtherstellung: R. Oldenbourg Graphische Betriebe GmbH, München

ISBN 3-486-23686-5

Vorwort

Dieses Buch soll denjenigen helfen, die beim ersten Kontakt mit der Stochastik Unterstützung brauchen. Stochastik ist oft zunächst etwas Neues. Manch einer begreift das Neue mit intuitivem Talent, manch anderer muß sich länger mühen, das Neue zu erfassen.

Gleichwie ist es in jedem Fall wichtig, auf die Erarbeitung der Grundlagen Sorgfalt und Ausdauer zu verwenden, weil dadurch der Zugang zu weiteren Problemlösungen erst ermöglicht wird.

Der Leser findet 46 Aufgaben, die so erdacht und strukturiert sind, daß er anhand der ausführlich und lehrreich erläuterten Lösungen Schritt für Schritt die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung erarbeiten und verstehen kann.

Die Aufgaben lassen sich unabhängig voneinander bearbeiten und lösen. Dennoch bauen viele Aufgaben auf Vorangegangenem wiederholend auf, um darüber hinaus entsprechend der Struktur des sachlichen Zusammenhangs weiterzuführen.

Die Arbeit mit diesem Buch wird sicherlich dazu führen, daß der "Einsteiger" wohl bald nicht mehr Anfänger ist. Er kann seine Fortschritte überprüfen, wenn er sich an etwas kniffligere Probleme wagt. So kann er bei Hypothesentests funktionale Zusammenhänge aufspüren, in denen Wahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von hypothetischen Sachverhalten untersucht werden. Er kann das Maximum-Likelihood-Verfahren kennenlernen und auch im letzten Kapitel dieses Buches seine Kenntnisse aus der Differential- und Integralrechnung anwenden und sehen, wie sich die "klassische" Mathematik auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung "nützlich macht".

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg bei der Arbeit.

Lothar Schmeink

PS: Ich danke Frau Kathrin Kirchner und Frau Anette Klose für die gewissenhafte Durchsicht des Manuskripts. Auch danke ich Herrn Dr. Blaich, der freundlicherweise die Tabelle der Normalverteilung zur Verfügung gestellt hat.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung	
Aufgaben	1
Lösungen	28
Binomialverteilung	
Aufgaben	4
Lösungen	40
Hypothesentests	
Aufgaben	7
Lösungen	53
Normalverteilung	
Aufgaben	14
Lösungen	75
Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung	
Aufgaben	16
Lösungen	100
Übergreifenden Aufgaben	
Aufgaben	19
Lösungen	140
Maximum-Likelihood-Methode	
Aufgaben	24
Lösungen	164
Stochastik und Analysis	
Aufgaben	26
Lösungen	182
Tabellen der Normalverteilung	Anhang

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgabe 1

Lösung Seite 28

a) Definieren Sie den Begriff Zufallsexperiment.

b) Definieren Sie den Begriff Ergebnismenge.

c) Definieren Sie die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses.

d) Zeigen Sie, daß die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse eines Zufallsexperiments gleich eins ist.

e) Angenommen es gibt ideale Würfel mit den Augenzahlen eins bis drei. Würde man zwei dieser Würfel, z. B. einen weißen und einen schwarzen, gleichzeitig werfen, so ist die Augenkombination (1|3) ein mögliches Ergebnis. Zählen Sie die Ergebnismenge auf.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis (3|3)?

Aufgabe 2

Lösung Seite 28

a) Definieren Sie den Begriff Ereignis.

b) Äußern Sie sich zu dem folgenden Zitat: "Die Augenzahl 7 ist bei einem idealen Würfel (Augenzahlen eins bis sechs) unmögliches Ereignis."

c) Definieren Sie die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses.

d) Geben Sie das Ereignis an, auf das ein Spieler hofft, wenn er beim Wurf mit einem idealen Würfel (Augenzahlen eins bis zehn) dann gewinnt, wenn er eine Primzahl erzielt. Wie groß ist seine Gewinnwahrscheinlichkeit?

e) Geben Sie das Ereignis an, auf das ein Spieler hofft, wenn er beim Wurf mit einem idealen Würfel (Augenzahlen eins bis zehn) dann gewinnt, wenn er keine Primzahl erzielt. Wie groß ist seine Gewinnwahrscheinlichkeit?

Aufgabe 3

Lösung Seite 29

Eine Ergebnismenge S habe n Ergebnisse. Ein bestimmtes Ereignis daraus - das Ereignis E - habe m Ergebnisse, wobei m kleiner als n ist.

Zählen Sie die Ergebnismenge S auf, und geben Sie das Ereignis E an. Zählen Sie diejenigen Ergebnisse von S als eine Teilmenge $\neg E$ auf, bei deren Auftreten das Ereignis E nicht eintritt.

Berechnen Sie in allgemeiner Form die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E und $\neg E$.

Aufgabe 4

Lösung Seite 30

Angenommen es gibt ideale Würfel mit den Augenzahlen eins bis zwanzig. Spieler A gewinnt dann, wenn er bei einem Wurf mit diesem Würfel eine Augenzahl erzielt, die kleiner als fünf oder größer als fünfzehn ist.

a) Geben Sie die beiden Ereignisse an, bei deren Eintreffen er gewinnt.

b) Berechnen Sie nach dem Additionssatz seine Gewinnchance.

Spieler B gewinnt dann, wenn er bei einem Wurf mit diesem Würfel entweder eine Primzahl oder ein Vielfaches von fünf erzielt.

c) Geben Sie die beiden Ereignisse an, bei deren Eintreffen er gewinnt.

d) Berechnen Sie nach dem Additionssatz seine Gewinnchance.

Aufgabe 5

Lösung Seite 31

Einem gut gemischten Skatspiel, von dem jede Karte die gleiche Chance hat, gezogen zu werden, werden nacheinander ohne Zurücklegen zwei Karten entnommen. Dabei geht es um die Wahrscheinlichkeit, Buben zu ziehen.

a) Nennen Sie das günstige Ereignis für die erste Stufe dieses Zufallsexperiments.

b) Geben Sie das günstige Ereignis für die zweite Stufe dieses Zufallsexperimentes unter der Bedingung an, daß beim ersten Zug
   ba) Pik-As gezogen wird,
   bb) Kreuz-Bube gezogen wird.

c) Bestimmen Sie anhand eines Baumdiagrammes die Wahrscheinlichkeit dafür, daß
   ca) im ersten Zug ein Bube und im zweiten ein Bube gezogen wird,
   cb) im ersten Zug kein Bube und im zweiten ein Bube gezogen wird,
   cc) im ersten Zug ein Bube und im zweiten kein Bube gezogen wird,
   cd) im ersten Zug und im zweiten Zug kein Bube gezogen wird.

Aufgabe 6

Lösung Seite 32

Aus einem gut gemischten Skatspiel werden nacheinander ohne Zurücklegen zufällig zwei Karten gezogen. Es geht grundsätzlich um die Ereignisse, eine Bildkarte zu ziehen (Ereignis B), ein As zu ziehen (Ereignis A) oder eine Karte mit einer Zahl (Ereignis S) zu ziehen.

a) Geben Sie die Ereignisse A, B und S für den ersten Zug als Teilmengen der Ergebnismenge an. Stellen Sie alle möglichen Ausgänge für beide Züge mit Hilfe eines Baumdiagrammes dar.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, mit der ersten Karte ein As oder eine Bildkarte zu ziehen. Auf welchen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung stützt sich Ihre Berechnung?

c) Äußern Sie sich zu der Wahrscheinlichkeit, mit der zweiten Karte ein As zu ziehen.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, mit beiden Karten ein As zu ziehen. Auf welchen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung stützt sich Ihre Berechnung?

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, mit der ersten Karte ein As und mit der zweiten Karte eine Bildkarte oder mit der ersten Karte eine Bildkarte und mit der zweiten Karte ein As zu ziehen.

f) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, mit beiden Karten
   fa) zwei Bildkarten,
   fb) genau eine Bildkarte,
   fc) keine Bildkarte zu ziehen.
   Bilden Sie die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten.

Aufgabe 7

Lösung Seite 36

Franz-Heinrich Kister stellt in seinem kleinen Handwerksbetrieb auf zwei unabhängig voneinander arbeitenden Drehbänken im Lohnauftrag für einen größeren Industriebetrieb ein ganz bestimmtes Teil her. Aufgrund seiner Erfahrung weiß er, daß 10 % der auf der einen Drehbank (A) hergestellten Teile und 20 % der auf der anderen Drehbank (B) hergestellten Teile unbrauchbar sind.

a) Berechnen Sie den gesamten Anteil unbrauchbarer Teile, wenn auf beiden Drehbänken gleich viele Teile hergestellt werden.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein zufällig ausgewähltes unbrauchbares Teil auf der einen Drehbank (A) hergestellt wurde.

b) Berechnen Sie den gesamten Anteil unbrauchbarer Teile, wenn auf der einen Drehbank (A) doppelt so viele Teile hergestellt werden wie auf der anderen (B).
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig ausgewähltes unbrauchbares Teil auf der einen Drehbank (A) hergestellt wurde.

Aufgabe 8

Lösung Seite 38

Die Kugel & Rund KG stellt Stahlkugeln für Spezialkugellager allerfeinster Güte her. Das Prüfverfahren zur Qualitätskontrolle erkennt von allen unbrauchbaren Kugeln 98 % und 2 % nicht. Ferner werden 99 % der brauchbaren Kugeln als solche erkannt, während 1 % irrtümlich für unbrauchbar gehalten wird.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine zufällig ausgewählte Kugel, die aufgrund dieses Verfahrens als brauchbar gilt, tatsächlich aber unbrauchbar ist, wenn grundsätzlich 95 % aller von Kugel & Rund hergestellten Kugeln brauchbar sind.

Binomialverteilung

Aufgabe 9

Lösung Seite 40

Angenommen es befinden sich in einer Urne drei Münzen.
Eine davon ist eine ideale Münze, eine hat auf beiden Seiten "Zahl", und eine ist so manipuliert, daß die Wahrscheinlichkeit für "Zahl" 1/3 ist.

a) Das Zufallsexperiment bestehe zunächst darin, daß dieser Urne zufällig eine Münze entnommen wird, die dann geworfen wird.
   aa) Bestimmen Sie mit Hilfe eines Baumdiagrammes die Wahrscheinlichkeit dafür, daß "Zahl" erscheint. Auf welchen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung stützt sich Ihre Berechnung?
   ab) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dann, wenn "Zahl" gefallen ist, diese Zahl zu der idealen Münze gehört. Auf welchen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung stützt sich Ihr Ergebnis?

b) Gesetzt den Fall, die Wahrscheinlichkeit, "Zahl" zu erzielen, sei 0,6. Das Zufallsexperiment bestehe nun darin, daß dieser Urne viermal zufällig eine Münze entnommen wird, die dann geworfen wird. Die Münze wird jedesmal wieder zurückgelegt.
   ba) Stellen Sie die Möglichkeiten, "Zahl" zu erzielen, mit Hilfe eines Baumdiagrammes dar.
   bb) Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der erzielten "Zahl". Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Werte der Zufallsvariablen, und stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung zusammen.
   bc) Überprüfen Sie, ob die Zufallsvariable X binomialverteilt ist.

Aufgabe 10

Lösung Seite 44

Aus seinem letzten Urlaub am Kaiserstuhl hat Karl Seppi 10 kg Walnüsse mitgebracht. 4 kg davon hat er selbst gesammelt, 6 kg hat er gekauft. Zu Hause kann Herr Seppi aufgrund einer eigenen Erfindung relativ einfach feststellen, ob eine Nuß taub ist oder nicht, ohne die Nuß zu beschädigen. Er kommt zu dem folgenden Ergebnis: Unter den selbst gesammelten befinden sich 10 % taube Nüsse, unter den gekauften dagegen nur 5 %.

Nun befinden sich alle Nüsse gut gemischt in einem großen Korb.

a) Herr Seppi entnimmt diesem Korb zufällig eine Nuß. Zeichnen Sie ein Baumdiagramm für dieses Zufallsexperiment, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er
   aa) eine selbst gesammelte, taube Nuß,
   ab) eine gekaufte, taube Nuß entnimmt.

b) Herrn Seppi interessiert der Anteil der tauben Nüsse.
   ba) Berechnen Sie, wie groß der Anteil der tauben Nüsse insgesamt ist. Auf welchen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung stützt sich Ihre Berechnung?
   bb) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine zufällig entnommene taube Nuß selbst gesammelt ist. Auf welchen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung stützt sich Ihr Ergebnis?

c) Herr Seppi führt ein weiteres Zufallsexperiment durch, indem er dem großen Korb zufällig vier Nüsse entnimmt.
   ca) Stellen Sie die Möglichkeiten, daß sich unter diesen vier entnommenen Nüssen taube befinden, mit Hilfe eines Ereignisbaumes dar.
   cb) Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der tauben unter den vier entnommenen Nüssen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Werte der Zufallsvariablen, zählen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf, und stellen Sie sie graphisch dar.
   cc) Überprüfen Sie, ob die Zufallsvariable X binomialverteilt ist.

Aufgabe 11

Lösung Seite 47

Angenommen ein kleinerer Teil der Kugeln in einer sehr großen Urne ist rot. Der Anteil roter Kugeln ist 25 %. Es wird eine Stichprobe vom Umfang 8 gezogen.

- Definieren Sie die entsprechende Zufallsvariable und die Definitionsmenge dazu.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion.
- Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion als Histogramm dar.
- Schraffieren Sie in diesem Histogramm die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in der Stichprobe höchstens 2 rote Kugeln sind.
- Schraffieren Sie in diesem Histogramm die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in der Stichprobe 4 rote Kugeln sind.

Aufgabe 12

Lösung Seite 49

Auf einem Jahrmarkt enthalte eine sehr große Urne sehr viele Lose mit 60 % Nieten. Ein Besucher kauft nacheinander fünfmal ein Los.

a) Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit das zweite und das vierte Los ein Gewinn ist, während die drei übrigen Lose Nieten sind.

b) Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit unter den fünf Losen überhaupt zwei Gewinne sind.

c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unter den fünf Losen mindestens drei Gewinne sind.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Verteilungsfunktion für die Zufallsvariable X, die für die Anzahl der Gewinne unter den fünf Losen steht.
Stellen Sie beide Funktionen graphisch dar.

Aufgabe 13

Lösung Seite 52

Auf einer großen Kirmes wirbt ein Schausteller damit, daß unter den sehr vielen Losen in seiner sehr großen Lostrommel nur 5 % Nieten sind. Das Gewerbeaufsichtsamt will dieser Behauptung auf den Grund gehen und zieht eine Stichprobe von 16 Losen. Wenn unter diesen 16 Losen nicht mehr als zwei Nieten sind, so gehe man davon aus, daß die Behauptung des Schaustellers stimmt. Andernfalls gehe man davon aus, daß der Anteil der Nieten wie in den Jahren zuvor 10 % ist.

a) Wählen Sie die entsprechende Zufallsvariable und die Definitionsmenge dazu.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, nicht mehr als zwei Nieten unter den 16 gezogenen Losen zu haben, unter der Voraussetzung, daß die Behauptung zutrifft.

c) Berechnen Sie, wie wahrscheinlich es ist, trotz Richtigkeit der Behauptung des Schaustellers unter den 16 gezogenen Losen mehr als zwei Nieten zu haben.

d) Gehen Sie davon aus, daß der Schausteller blufft und der Anteil der Nieten tatsächlich 10 % ist. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit,
da) daß sich das Gewerbeaufsichtsamt täuschen läßt,
db) daß das Gewerbeaufsichtsamt ein Stichprobenergebnis erhält, das den Schwindel aufdeckt.

Hypothesentests

Aufgabe 14

Lösung Seite 53

Angenommen von einer großen Grundgesamtheit wird behauptet, der Anteil grüner Elemente habe sich im Gegensatz zu früher, als er 15 % ausmachte, geändert und betrage jetzt 8 %. Um diese Hypothese zu überprüfen, zieht jemand eine Stichprobe von 18 Elementen mit der Entscheidungsregel: "Wenn nicht mehr als drei grüne Elemente in der Stichprobe sind, so gelte die Hypothese als erwiesen. Andernfalls gehe man davon aus, daß der Anteil grüner Elemente in der Grundgesamtheit immer noch 15 % ausmacht."

Definieren Sie eine geeignete Zufallsvariable und die Definitionsmenge dafür. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art und die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art.

Aufgabe 15

Lösung Seite 57

Gewinder & Co, Hersteller von Schrauben und anderer Kleineisenteile, wirbt damit, daß der Anteil unbrauchbarer Schrauben in allen Lieferungen nur 4 % ausmacht.

Die Schraber GmbH, Kunde von Gewinder, entnimmt jeder Lieferung eine Stichprobe von 20 Schrauben mit der Entscheidungsregel: "Wenn nicht mehr als zwei Schrauben in der Stichprobe unbrauchbar sind, dann glauben wir der Behauptung von Gewinder & Co; andernfalls gehen wir davon aus, daß der Ausschußanteil 9 % ausmacht, und lehnen die Lieferung ab."

a) Formulieren Sie die Hypothese H und die Alternative A. Wählen Sie eine geeignete Zufallsvariable und die Definitionsmenge dafür.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art. Erklären Sie, worin das Risiko von Gewinder liegt.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art. Erklären Sie, worin das Risiko von Schraber liegt.

Aufgabe 16

Lösung Seite 59

Angenommen ein kleinerer Teil der Kugeln in einer sehr großen Urne ist weiß. Es wird behauptet, dieser Anteil weißer Kugeln sei 12 %. Andere bezweifeln diese Hypothese und sagen, der Anteil sei 20 %. Um der Sachlage auf den Grund zu gehen, wird eine Stichprobe vom Umfang 22 gezogen.

Die Entscheidungsregel lautet: "Sind nicht mehr als fünf weiße Kugeln in der Stichprobe, so gelte die Hypothese. Andernfalls gehe man davon aus, daß der Anteil weißer Kugeln 20 % ist."

a) Definieren Sie die entsprechende Zufallsvariable und die Definitionsmenge dazu. Formulieren Sie Hypothese und Alternative.

b) Erklären Sie, welche Arten von Fehlern bei diesem Test vorkommen können. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für diese Fehler.

c) Ändern Sie die Entscheidungsregel bei unverändertem Stichprobenumfang so ab, daß die Differenz zwischen den beiden Fehlerwahrscheinlichkeiten möglichst klein wird.

Aufgabe 17

Lösung Seite 62

Angenommen ein kleinerer Teil der Kugeln einer sehr großen Urne ist weiß. Es wird behauptet, dieser Anteil weißer Kugeln sei 10 %. Andere bezweifeln diese Hypothese und sagen, der Anteil sei 20 %. Um die Sachlage zu prüfen, wird eine Stichprobe vom Umfang 60 gezogen.

Die Entscheidungsregel lautet: "Sind nicht mehr als k weiße Kugeln in der Stichprobe, so gelte die Hypothese. Andernfalls gehe man davon aus, daß der Anteil weißer Kugeln 20 % ist."

a) Definieren Sie die entsprechende Zufallsvariable und die Definitionsmenge dazu. Formulieren Sie Hypothese und Alternative.

b) Ermitteln und berechnen Sie, wie sich in Abhängigkeit von k (k-Werte von 0 bis 13) die Wahrscheinlichkeit für einen *Fehler erster Art* ändert. Stellen Sie die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen.

c) Berechnen Sie, wie sich in Abhängigkeit von k (k-Werte von 0 bis 13) die Wahrscheinlichkeit für einen *Fehler zweiter Art* ändert. Stellen Sie die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen.

d) Stellen Sie die Ergebnisse aus den Aufgabenteilen b) und c) in einem Koordinatensystem graphisch dar. Formulieren Sie aufgrund dieser Graphik eine Entscheidungsregel, bei der die Differenz zwischen den beiden Fehlerwahrscheinlichkeiten möglichst klein ist.

Aufgabe 18

Lösung Seite 65

Angenommen ein kleinerer Teil der Kugeln einer sehr großen Urne ist weiß. Es wird behauptet, dieser Anteil weißer Kugeln sei 9 %. Andere bezweifeln diese Hypothese und sagen, der Anteil sei 26 %. Um die Sachlage zu prüfen, wird eine Stichprobe vom Umfang 40 gezogen.

Die Entscheidungsregel lautet: "Sind nicht mehr als k weiße Kugeln in der Stichprobe, so gelte die Hypothese. Andernfalls gehe man davon aus, daß der Anteil weißer Kugeln 26 % ist."

a) Definieren Sie die entsprechende Zufallsvariable und die Definitionsmenge dazu. Formulieren Sie Hypothese und Alternative.

Nun lassen sich in Abhängigkeit von k die Wahrscheinlichkeiten für Fehler erster Art und ebenso für Fehler zweiter Art berechnen; die Ergebnisse sind für k-Werte bis 10 in der untenstehenden Tabelle festgehalten.

b) Berechnen Sie die in der Tabelle fehlenden Werte.

c) Stellen Sie die Abhängigkeit der Fehlerwahrscheinlichkeiten graphisch dar. Formulieren Sie aufgrund dieser Graphik eine Entscheidungsregel, bei der die Differenz zwischen den beiden Fehlerwahrscheinlichkeiten möglichst klein ist.

	1. Art	2. Art
k = ...	p = 0,09	p = 0,26
0	0,9770038	0,0000058
1	0,8860299	0,0000884
2	0,7105802	0,0006545
3		0,0031736
4	0,2897108	0,0113608
5		0,0320721
6	0,0639217	0,0745210
7	0,0242398	0,1469628
8	0,0080509	0,2519544
9	0,0023581	
10	0,0006127	0,5259739

Aufgabe 19

Lösung Seite 68

Angenommen ein kleinerer Teil der Elemente einer sehr großen Grundgesamtheit hat das Merkmal M. Es wird behauptet, dieser Teil mache nicht mehr als 9 % aus. Mit Hilfe einer Stichprobe vom Umfang 20 soll diese Behauptung überprüft werden.

a) Definieren Sie die entsprechende Zufallsvariable und die Definitionsmenge. Formulieren Sie Hypothese und Gegenhypothese.

Weiterhin sei angenommen, die Entscheidungsregel für die Beurteilung der Behauptung lautet: "Tragen nicht mehr als drei Elemente in der Stichprobe das Merkmal M, so schenke man der Behauptung Glauben."

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Behauptung als widerlegt gilt, für den Fall, daß der Anteil des Merkmals M in der Grundgesamtheit tatsächlich 9 % ausmacht.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Behauptung als erwiesen gilt, für den Fall, daß der Anteil des Merkmals M in der Grundgesamtheit tatsächlich 15 % ausmacht.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Behauptung als erwiesen gilt, für den Fall, daß der Anteil des Merkmals M in der Grundgesamtheit tatsächlich 5 % ausmacht.

e) Berechnen und skizzieren Sie die Testcharakteristik, und zwar für Anteilswerte von 1 bis 10 % in Schritten von je einem Prozentpunkt und dann weiter in Schritten von zehn Prozentpunkten. Markieren Sie in Ihrer Graphik das Signifikanzniveau und das Vertrauensniveau für die vorgegebene Entscheidungsregel.

f) Formulieren und begründen Sie eine neue Entscheidungsregel bei unverändertem Stichprobenumfang, mit der die Behauptung signifikant überprüft werden kann.

Aufgabe 20

Lösung Seite 71

In einer großen Grundgesamtheit gebe es Elemente, die wegen einer bestimmten Eigenschaft auffallen. Der Anteil p dieser Elemente an allen Elementen sei unbekannt.

Es werden Stichproben vom Umfang 40 gezogen.
Die Entscheidungsregel für diesen Test soll lauten: "Sind unter den 40 Elementen der Stichprobe nicht mehr als k auffällige Elemente, so werde angenommen, daß die Hypothese zutrifft."

p = ...	k = 4	k = 5	k = 6	k = 7	k = 8	k = 9
0	1	1	1	1	1	1
0,01	0,999951	0,999998	1	1	1	1
0,02	0,998826	0,999864	0,999987	1	1	1
0,03	0,993331	0,998837	0,999831	0,999980	0,999999	1
0,04	0,978977	0,995121	0,999045	0,999839	0,999976	0,999996
0,05		0,986122	0,996608	0,999288	0,999870	0,999979
0,06	0,910418	0,969094	0,990942	0,997715	0,999498	0,999903
0,07	0,854632	0,941853	0,980150	0,994150	0,998497	0,999661
0,08	0,786793	0,903274	0,962358	0,987313	0,996264	0,999032
0,09	0,710290		0,936079	0,975761	0,991950	0,997642
0,1	0,629018	0,793728		0,958099	0,984506	0,994938
0,11	0,546787	0,726196	0,855545	0,933196	0,972785	0,990183
0,12	0,466911	0,653562	0,802034	0,900373	0,955689	0,982508
0,13	0,391975	0,578665	0,741393	0,859497	0,932295	0,970971
0,14	0,323768	0,504201	0,675543	0,811022	0,901999	0,954657
0,15	0,263320	0,432501	0,606657	0,755934	0,864599	0,932780
0,2	0,075915	0,161329	0,285892	0,437146	0,593127	0,731778
0,25	0,016042	0,043274	0,096225	0,181954	0,299832	0,439540
0,3	0,002561	0,008618	0,023761	0,055283	0,111009	0,195925
0,35	0,000311	0,001290	0,004363	0,012401	0,030254	0,064436
0,4	0,000029	0,000144	0,000595	0,002053	0,006065	0,015573
0,45	0,000002	0,000012	0,000059	0,000248	0,000883	0,002733
0,5	0	0,000001	0,000004	0,000021	0,000091	0,000340

Die obenstehende Tabelle enthält Annahmewahrscheinlichkeiten (Werte der Testcharakteristik) dieser Entscheidungsregel für verschiedene Werte von k in Abhängigkeit von p.

a) Berechnen Sie die in der Tabelle fehlenden Werte.

b) Stellen Sie fest und begründen Sie, welche Hypothesen bei den Entscheidungsregeln für die verschiedenen k-Werte signifikant überprüft werden können.

c) Stellen Sie die Testcharakteristika für k = 4, für k = 6 und für k = 8 graphisch dar. Markieren Sie in Ihrer Graphik jeweils den p-Wert, bei dem die Kurven die "95-%-Grenze" unterschreiten.

Aufgabe 21

Lösung Seite 73

In einer großen Grundgesamtheit gebe es Elemente, die wegen einer bestimmten Eigenschaft auffallen. Der Anteil p dieser Elemente an allen Elementen sei unbekannt.

Es werden Stichproben vom Umfang 35 gezogen.
Die Entscheidungsregel für diesen Test soll lauten: "Sind unter den 35 Elementen der Stichprobe nicht mehr als k auffällige Elemente, so werde angenommen, daß die Hypothese zutrifft."

p = ...	k = 4	k = 5	k = 6	k = 7	k = 8
0	1	1	1	1	1
0,01	0,999975	0,999999	1	1	1
0,02	0,999371	0,999938	0,999995	1	1
0,03	0,996278	0,999442	0,999931	0,999994	1
0,04	0,987786	0,997554	0,999590	0,999941	0,999992
0,05	0,970973	0,992748	0,998478	0,999727	0,999958
0,06	0,943724	0,983169	0,995757	0,999086	0,999830
0,07	0,905163	0,967017	0,990296	0,997554	0,999467
0,08	0,855698	0,942890	0,980799	0,994456	0,998612
0,09	0,796817	0,910017	0,965995	0,988931	0,996870
0,1		0,868365	0,944818	0,980011	0,993697
0,11	0,660097		0,916561	0,966718	0,988415
0,12	0,587514	0,762006		0,948190	0,980269
0,13	0,515450	0,700243	0,838307		0,968473
0,14	0,445987	0,635215	0,789237	0,893113	0,952298
0,15	0,380749	0,568861	0,734841	0,856189	0,931139
0,2	0,143492	0,272092	0,432842	0,599333	0,745013
0,25	0,041006	0,097620	0,191978	0,322282	0,474303
0,3	0,009118	0,026898	0,064999	0,132647	0,234119
0,35	0,001590	0,005750	0,016951	0,041938	0,089029
0,4	0,000216	0,000951	0,003401	0,010166	0,025953
0,45	0,000022	0,000120	0,000518	0,001868	0,005734
0,5	0,000002	0,000011	0,000058	0,000254	0,000939
0,55	0	0,000001	0,000005	0,000025	0,000110

Die obenstehende Tabelle enthält Werte der Testcharakteristika dieser Entscheidungsregel für verschiedene Werte von k.

a) Berechnen Sie die in der Tabelle fehlenden Werte.

b) Stellen Sie fest, welche Hypothesen bei den Entscheidungsregeln für die verschiedenen k-Werte signifikant überprüft werden können. Begründen Sie einen dieser Fälle.

c) Stellen Sie die Testcharakteristika für $k = 4$, für $k = 6$ und für $k = 8$ graphisch dar. Markieren Sie in Ihrer Graphik jeweils den p-Wert, bei dem die Kurven die "95-%-Grenze" unterschreiten.