# Klausurtraining Statistik

Von
o. Prof. Dr. Karl Bosch

2., durchgesehene Auflage

R. Oldenbourg Verlag München Wien

**Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme**

**Bosch, Karl:**
Klausurtraining Statistik / von Karl Bosch. - München ; Wien :
Oldenbourg, 1996
ISBN 3-486-23759-4

© 1996 R. Oldenbourg Verlag GmbH, München

Das Werk einschließlich aller Abbildungen ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen.

Gesamtherstellung: R. Oldenbourg Graphische Betriebe GmbH, München

ISBN 3-486-23759-4

# Inhaltsverzeichnis

**Beschreibende (deskriptive) Statistik**

Kapitel 1: Aufgaben . . . . . 1

Kapitel 4: Lösungen . . . . . 69

**Wahrscheinlichkeitsrechnung**

Kapitel 2: Aufgaben . . . . . 18

Kapitel 5: Lösungen . . . . . 101

**Beurteilende (induktive) Statistik**

Kapitel 3: Aufgaben . . . . . 44

Kapitel 6: Lösungen . . . . . 149

**Tabellenanhang**

Tab. 1: Verteilungsfunktion der Standard Normalverteilung 201

Tab. 2: Quantile der Standard- Normalverteilung . . . . 203

Tab. 3: Quantile der t-Verteilung . . . . . 205

Tab. 4: Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung . . . . . 208

Tab. 5: Quantile der F-Verteilung . . . . . 211

# Vorwort (zur ersten und zweiten Auflage)

Die vorliegende Aufgabensammlung enthält Klausuraufgaben, die zur Vorbereitung auf die Klausuren zur Statistik geeignet sind. Im wesentlichen wird der übliche Stoff für das Grundstudium in Statistik abgedeckt, doch wird es Vorlesungen geben, die in manchen Gebieten von dieser Stoffauswahl etwas abweichen. Zur Klausurvorbereitung sollten dann zusätzlich entsprechende Aufgaben gerechnet werden.

Da die Stoffeinteilung nicht in allen (zweisemestrigen) Vorlesungen gleich ist, besteht die Aufgabensammlung aus drei Teilgebieten:

| | |
|---|---|
| beschreibende (deskriptive) Statistik: | Aufgaben 1.1 bis 1.40 |
| Wahrscheinlichkeitsrechnung: | Aufgaben 2.1 bis 2.64 |
| beurteilende (induktive) Statistik: | Aufgaben 3.1 bis 3.60. |

In manchen Kursen wird im ersten Semester mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung begonnen. Da zur Lösung der Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung die beschreibende Statistik nicht benötigt wird, kann ohne weiteres mit diesem Teil begonnen werden.

Nach den Aufgabenstellungen im ersten Teil stehen im zweiten Teil die vollständigen Lösungswege. Die Lösungen sind meistens auf vier Stellen angegeben, wobei in der Regel nicht mit den angegebenen (gerundeten) Zwischenergebnissen, sondern mit den gespeicherten (exakten) Werten weitergerechnet wird. Die von Ihnen berechneten Ergebnisse können wegen vorgenommener Rundungen von den hier angegebenen Ergebnissen mehr oder weniger stark abweichen, insbesondere wenn Quantile aus Tabellen abgelesen werden. Bei den vorliegenden Berechnungen wurden die Quantile mit Hilfe eines Taschenrechners bestimmt.

Am Ende des Buches befinden sich noch einige Tabellen.

Eine sinnvolle Klausurvorbereitung besteht im sorgfältigen Rechnen der Aufgaben. Erst danach sollte der Lösungsweg mit dem im Buch angegebenen verglichen werden.

Für Hinweise auf Fehler und Anregungen bin ich stets dankbar. Allen Leserinnen und Lesern wünsche ich viel Erfolg beim Lösen der Aufgaben.

Karl Bosch

# Aufgaben

## Kap. 1 Aufgaben zur beschreibenden Statistik

### Aufgabe 1.1

Ein Staubsauger des Typs Saugfix kostet in verschiedenen Kaufhäusern (in DM):

249, 231, 219, 229, 284, 269, 239.

a) Bestimmen Sie den Mittelwert $\bar{x}$.

b) Bestimmen Sie den Median $\tilde{x}$.

c) Welcher dieser beiden Lageparameter ist der geeignetere?

d) Bestimmen Sie die mittlere Abweichung der Stichprobenwerte vom Mittelwert $\bar{x}$.

e) Bestimmen Sie die mittlere Abweichung der Stichprobenwerte vom Median $\tilde{x}$.

f) Berechnen Sie die Standardabweichung $s$.

g) Ordnen Sie die in d), e) und f) berechneten Abweichungen der Größe nach an. Gilt die festgestellte Reihenfolge immer?

### Aufgabe 1.2

In einer Wiederholungsklausur zur Statistik erhielten die Teilnehmer folgende Punkte:

10, 17, 18, 15, 19, 12, 15, 15, 21, 21, 5, 21, 8, 17, 12, 24, 26, 18, 28, 10, 26, 17, 3, 21, 32, 17, 3, 20, 12, 7, 22.

a) Zeichnen Sie ein Stabdiagramm für die absoluten Häufigkeiten.

b) Bestimmen Sie das arithmetische Mittel und den Median.

c) Wie viele Punkte dürfen zum Bestehen der Prüfung verlangt werden, damit mindestens
$\alpha$) 50 %, $\beta$) 75 %, $\gamma$) 90 %
der Kandidaten die Prüfung bestehen?

d) Bestimmen Sie das untere und das obere Quartil sowie den Quartilsababstand. Welche Bedeutung hat dieser Quartilsabstand?

**Aufgabe 1.3**

In einer kleinen Pension wurde an 50 Tagen jeweils die Anzahl der belegten Betten festgestellt:

5 4 6 7 5 4 7 8 9 10 9 10 8 6 4 5 7 9 10 9 6 6 7 9 10 10
8 7 4 5 5 7 9 8 9 9 8 9 6 6 6 7 9 10 8 7 10 8 7 8

a) Stellen Sie eine Tabelle für die absoluten und relativen Häufigkeiten auf.

b) Zeichen Sie ein Stabdiagramm für die relativen Häufigkeiten.

c) Zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion.

d) Bestimmen Sie den Mittelwert und den Median.

e) Berechnen Sie die Standardabweichung.

f) Berechnen Sie die Schiefe der Verteilung.

g) Berechnen Sie den Exzeß (die Wölbung) der Verteilung.

**Aufgabe 1.4**

In Familien wurde die Anzahl der Kinder festgestellt. Dabei erhielt man das folgende Ergebnis:

| Anzahl der Kinder | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Häufigkeiten | 22 | 31 | 22 | 13 | 7 | 3 | 0 | 2 |

a) Wie viele Familien wurden befragt?

b) Zeichnen Sie ein Stabdiagramm für die relativen Häufigkeiten.

c) Zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion.

d) Bestimmen Sie den Modalwert.

e) Berechnen Sie den Mittelwert $\bar{x}$ der Stichprobe.

f) Bestimmen Sie den Median $\tilde{x}$ der Stichprobe.

g) Interpretieren Sie den erhaltenen Mittelwert und den Median.

h) Bestimmen Sie die beiden Quartile und interpretieren Sie diese beiden Werte.

i) Berechnen Sie den Variationskoeffizienten.

j) Bestimmen Sie die Schiefe der Verteilung.

**Aufgabe 1.5**

Bei einer Radarkontrolle wurden diejenigen Fahrzeuge registriert, welche die zulässige Höchstgeschwindigkeit überschritten. Dabei erhielt man folgende Werte:

| Überschreitungsgeschwindigkeit | Anzahl der Fahrzeuge |
|---|---|
| über 0 bis 10 km/h | 161 |
| über 10 bis 15 km/h | 67 |
| über 15 bis 20 km/h | 53 |
| über 20 bis 25 km/h | 39 |
| über 25 bis 30 km/h | 28 |
| über 30 bis 40 km/h | 33 |
| über 40 bis 50 km/h | 12 |
| über 50 bis 60 km/h | 7 |
| über 60 km/h | 0 |

a) Zeichnen Sie ein flächenproportionales Histogramm für die relativen Klassenhäufigkeiten.

b) Zeichnen Sie die klassierte empirische Verteilungsfunktion.

c) Wieviel Prozent der registrierten Fahrzeuge überschritten die Höchstgeschwindigkeit um mehr als 25 km/h?

d) In welchem Bereich liegt der Median $\tilde{x}$ der Überschreitungsgeschwindigkeiten?

e) Bestimmen Sie einen Näherungswert für den Median $\tilde{x}$.

f) Bestimmen Sie Näherungswerte für die beiden Quartile und interpretieren Sie diese Werte.

g) Bestimmen Sie einen Näherungswert für die mittlere Überschreitungsgeschwindigkeit $\bar{x}$.

h) Bestimmen Sie die Näherungswerte für den Median und die Quartile zeichnerisch aus der klassierten (empirischen) Verteilungsfunktion.

**Aufgabe 1.6**

Die monatlichen Ausgaben einer bestimmten Person sind anteilmäßig in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt. Die Preiserhöhungen innerhalb eines Jahres für die einzelnen Gebiete sind in der dritten Spalte angegeben. Um wieviel Prozent erhöhten sich die Gesamtausgaben der Person im Durchschnitt?

| Artikel | prozentualer Anteil | Preiserhöhung in Prozent |
|---|---|---|
| Miete | 40 | 6 |
| Lebensmittel | 15 | 3,5 |
| Auto | 12 | 4,5 |
| Genußartikel | 10 | 4 |
| Urlaub | 15 | 2 |
| sonstiges | 8 | 4,2 |

**Aufgabe 1.7**

Die Preise für ein bestimmtes Produkt erhöhten sich in fünf Jahren jährlich um jeweils 3,7%, 4,2%, 2,8%, 5,1% und 2,5%. Bestimmen Sie die mittlere Preisteigerungsrate während dieser fünf Jahre.

**Aufgabe 1.8**

Während vier Jahren betrug der Kurs für eine Aktie jeweils zum Jahresbeginn (in DM): 500; 600; 400 und 700. Jemand kaufte immer zum Jahresbeginn zu diesen Kursen die Aktie. Berechnen Sie den durchschnittlichen Kaufkurs (pro Aktie), falls

a) jeweils 100 Stück;

b) jeweils für den gleichen Betrag von 84 000 DM

von der Aktie gekauft wurde. Durch welche Mittelwertsbildung kann der jeweilige durchschnittliche Kaufkurs berechnet werden?

**Aufgabe 1.9**

Ein bestimmter Arbeitsvorgang kann von einem von vier Arbeitern durchgeführt werden. Die Fertigungszeiten in Minuten pro Stück sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt:

| Arbeiter | 1 | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| Stückzeit (Min./Stück) | 1,0 | 1,2 | 1,5 | 1,6 |

Berechnen Sie die durchschnittlichen Stückzeiten eines Postens, bei dem

a) jeder der vier Arbeiter 500 Stück bearbeitet;

b) jeder Arbeiter 8 Stunden arbeitet;

c) Arbeiter 1 und 2 jeweils 8 Stunden, Arbeiter 3 sechs Stunden und Arbeiter 4 vier Stunden arbeitet.

Geben Sie jeweils an, durch welche Mittelwertbildung die jeweilige durchschnittliche Bearbeitungszeit berechnet werden kann.

**Aufgabe 1.10**

Von drei verschiedenen Stichproben mit nur positiven Werten sind folgende Kenngrößen gegeben:

| | Stichprobe 1 | Stichprobe 2 | Stichprobe 3 |
|---|---|---|---|
| Stichprobenumfang | 10 | 40 | 50 |
| arithmetisches Mittel | 5,1 | 5,3 | 5,4 |
| geometrisches Mittel | 4,8 | 4,9 | 5,1 |
| harmonisches Mittel | 4,6 | 4,8 | 5,0 |
| Varianz (Division durch n – 1) | 2,1 | 2,2 | 2,3 |

Die drei Stichproben werden zu einer einzigen Stichprobe vereinigt. Bestimmen Sie die in der Tabelle genannten Kenngrößen für die gesamte Stichprobe.

**Aufgabe 1.11**

An einer GmbH sind fünf Personen mit jeweils 50, 20, 15, 10 bzw. 5 % beteiligt.

a) Skizzieren Sie die Lorenzkurve.

b) Bestimmmen Sie den Gini-Koeffizienten (das Lorenzsche Konzentrationsmaß).

c) Wie müßten die Anteile unter den fünf Personen aufgeteilt sein, damit der Gini-Koeffizient verschwindet?

d) Bei welcher Verteilung der Anteile unter den fünf Personen wäre der Gini-Koeffizient maximal? Berechnen Sie diesen maximalen Wert und skizzieren Sie die dazugehörige Lorenzkurve.

**Aufgabe 1.12**

50 Studierenden steht monatlich jeweils der in der nachfolgenden Tabelle angegebene Geldbetrag zur Verfügung:

| Geldbetrag [DM] | 700 | 750 | 800 | 850 | 900 | 1 000 | 1 500 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Häufigkeiten | 5 | 7 | 10 | 10 | 9 | 5 | 4 |

a) Stellen Sie das Stabdiagramm der relativen Häufigkeiten dar.

b) Skizzieren Sie die empirische Verteilungsfunktion.

c) Bestimmen Sie den Mittelwert und den Median.

d) Skizzieren Sie die Lorenzkurve.

e) Wieviel Prozent des Geldes aller 50 Studierenden haben die 9 Personen, denen mindestens 1 000 DM zur Verfügung steht.

f) Bestimmmen Sie den Gini-Koeffizienten (das Lorenzsche Konzentrationsmaß).

g) Wie müßte der Geldbetrag bei gleicher Gesamtsumme unter den 50 Studierenden aufgeteilt werden, damit der Gini-Koeffizient verschwindet?

**Aufgabe 1.13**

Bestimmen Sie aus den Daten der Aufgabe 1.12 folgende Größen:

a) den Variationskoeffizienten $\hat{v} = \frac{\hat{s}}{\bar{x}}$ mit $\hat{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$;

b) den Herfindahl-Index H (auf direktem Wege).

c) Bestätigen Sie die Formel $H = \frac{1}{n} \cdot (\hat{v}^2 + 1)$.

**Aufgabe 1.14**

Die Börsenkurse (in DM) zweier Automobilaktien A und B an 10 verschiedenen Börsentagen sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt:

| A | 490 | 510 | 520 | 550 | 580 | 610 | 620 | 630 | 640 | 670 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 210 | 225 | 245 | 240 | 270 | 295 | 280 | 305 | 295 | 320 |

a) Zeichnen Sie die Punktwolke.

b) Berechnen Sie die Mittelwerte, Varianzen und Standardabweichungen der Kurse der beiden einzelnen Aktien.

c) Bestimmen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten r nach Bravais-Pearson. Interpretieren Sie den erhaltenen Wert für den Korrelationskoeffizienten.

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Regressionsgeraden der Kurse der Aktie B bezüglich der Kurse der Aktie A. Zeichnen Sie die Regressionsgerade in die Punktwolke ein.

e) Bestimmen Sie die Summe der vertikalen Abweichungsquadrate der 10 Punkte von der Regressionsgeraden.

f) Wie lautet das Bestimmtheitsmaß?

**Aufgabe 1.15**

In der nachfolgenden Tabelle ist die gemeinsame Häufigkeitsverteilung (absolute Häufigkeiten) gegeben:

| $x_j^*$ \ $y_k^*$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 3 | 4 | 2 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 4 | 12 | 4 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 4 | 3 | 3 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 |

a) Bestimmen Sie die beiden Randverteilungen sowie deren Mittelwerte und Standardabweichungen.

b) Bestimmen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten r nach Bravais-Pearson.

c) Bestimmen Sie jeweils für die x- bzw. y-Werte die bedingten Mediane und die bedingten Mittelwerte.

**Aufgabe 1.16**

Von einer zweidimensionalen Häufigkeitsverteilung sind folgende Werte gegeben:

| $x_j^*$ \ $y_k^*$ | 4 | 5 | 6 | 7 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | * | 4 | 2 | * | 6 |
| 2 | 2 | * | 3 | 1 | * |
| 3 | * | 8 | * | * | 14 |
| Summe | 4 | 16 | * | 2 | 30 |

a) Vervollständigen Sie die Tabelle.

b) Berechnen Sie die Mittelwerte und Varianzen der beiden Randverteilungen.

c) Bestimmen Sie die Häufigkeitsverteilung, den Mittelwert und die Varianz der Stichprobe der Summe $z = x + y$. Gilt $s_{x+y}^2 = s_x^2 + s_y^2$?

**Aufgabe 1.17**

In den beiden Klausuren zur Statistik I und Statistik II erhielten 10 Studierende (in alphabetischer Reihenfolge) die in der nachfolgenden Tabelle (2. und 3. Zeile) angegebenen Punkte:

| Stud. Nr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte in Klausur I | 18 | 25 | 14 | 30 | 17 | 21 | 24 | 19 | 8 | 10 |
| Punkte in Klausur II | 10 | 27 | 19 | 25 | 13 | 23 | 21 | 26 | 18 | 14 |

a) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten r nach Bravais-Pearson.

b) Bestimmen Sie den Spearmanschen Rangkorrelationskoeffizienten $r_S$.

c) Weshalb ist hier der Spearmansche Rangkorrelationskoeffizient $r_S$ als Maß für die lineare Abhängigkeit besser geeignet als der Korrelationskoeffizient r nach Bravais-Pearson?

**Aufgabe 1.18**

Gegeben sind die Werte einer zweidimensionalen Stichprobe:

| $x_i$ | 10 | 10 | 11 | 11 | 12 | 12 | 13 | 13 | 14 | 14 | 15 | 15 | 16 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 23 | 24 | 22 | 25 | 21 | 26 | 20 | 27 | 21 | 26 | 22 | 25 | 23 | 24 |

a) Zeichnen Sie die Punktwolke.

b) Begründen Sie, weshalb die Kovarianz und damit auch der Korrelationskoeffizient r verschwindet.

c) Wie lautet die Gleichung der Regressionsgeraden der y-Werte bezüglich der x-Werte.

d) Wie lautet die Gleichung der Regressionsgeraden der x-Werte bezüglich der y-Werte.

Zeichnen Sie diese Regressionsgeraden in die Abbildung ein.

e) Bestimmen Sie die Rangzahlen der x-Werte und die der y-Werte.

f) Bestimmen Sie den Spearmanschen Rangkorrelationskoeffizienten $r_S$.

**Aufgabe 1.19**

Von einer Stichprobe seien folgende Größen bekannt:

Stichprobenumfang: $n = 500$;

Summe aller Werte: $\sum_{i=1}^{n} x_i = 85\,500$;

Quadratsumme: $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 14\,635\,470$.

a) Berechnen Sie daraus den Mittelwert $\bar{x}$ und die

Varianz $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ bzw $\hat{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$.

b) Bestimmen Sie den Herfindahl-Index.

**Aufgabe 1.20**

In einem Betrieb sind 841 Personen beschäftigt. Das monatliche Durchschnittsgehalt beträgt $\bar{x} = 3\,241{,}45$ bei einer Standardabweichung von $s = 172{,}15$ DM. Der Median lautet $\tilde{x} = 2\,967{,}59$ DM. Im darauffolgenden Jahr werden die Gehälter linear um 2,9 % erhöht. Zusätzlich dazu erhält jede Person noch einen Sockelbetrag von 50 DM. Berechnen Sie den Mittelwert, den Median und die Standardabweichung der neuen Gehälter.

**Aufgabe 1.21**

Jemand kaufte eine Aktie zum Preis von 500 DM. Im ersten Jahr stieg sie um 10 % auf 550 DM, im zweiten Jahr fiel sie um 20 % auf 440 DM. Im dritten Jahr fiel sie um 15 % auf 374 DM. Im vierten Jahr stieg sie wieder um 25 % auf 467,50 DM.

a) Um wieviel Prozent hat sich die Aktie pro Jahr im Durchschnitt verändert?

b) Weshalb ist hier das arithmetische Mittel der prozentualen Veränderungen zur Berechnung der mittleren Kurssteigerung nicht geeignet?

**Aufgabe 1.22**

Gegeben ist die empirische Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1{,}5 \\ 0{,}1 & \text{für } 1{,}5 \leq x < 3 \\ 0{,}4 & \text{für } 3 \leq x < 4{,}5 \\ 0{,}65 & \text{für } 4{,}5 \leq x < 7 \\ 1 & \text{für } x \geq 7. \end{cases}$$

a) Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion sowie ein Stabdiagramm für die relativen Häufigkeiten der Stichprobenwerte.

b) Berechnen Sie den Mittelwert der Stichprobe.

c) Berechnen Sie den Median der Stichprobe.

d) Zeichnen Sie die Lorenzsche Konzentrationskurve.

e) Berechnen Sie den Gini-Koeffizienten (Lorenzsches Konzentrationsmaß).

**Aufgabe 1.23**

Die jeweiligen Umsätze und die Umsätze pro Mitarbeiter in drei Betrieben sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt:

| Betrieb | Umsatz in DM | Umsatz pro Mitarbeiter |
|---|---|---|
| I | 220 500 000 | 490 000 |
| II | 273 000 000 | 520 000 |
| III | 340 480 000 | 560 000 |

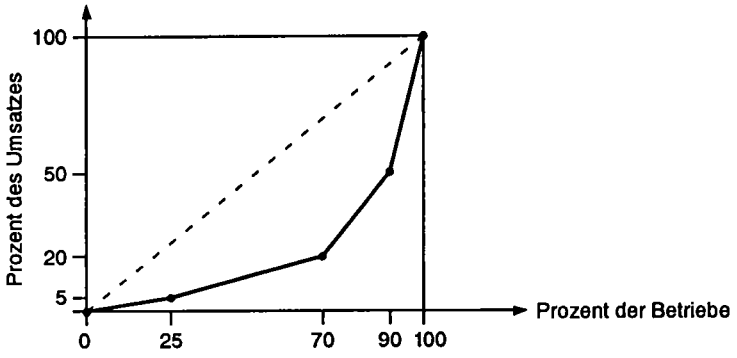
a) Bestimmen Sie den durchschnittlichen Umsatz pro Mitarbeiter in allen drei Betrieben zusammen.

b) Stellen Sie den durchschnittlichen Umsatz aus a) als gewichtetes arithmetisches Mittel dar.

c) Stellen Sie den durchschnittlichen Umsatz aus a) als gewichtetes harmonisches Mittel dar.

**Aufgabe 1.24**

In der nachfolgenden Abbildung ist die Lorenzkurve für die Umsätze einzelner Betriebe skizziert (Skaleneinteilung in Prozent).




a) Wie sind die Umsätze auf die einzelnen Betriebe konzentriert?

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Trapezregel den Inhalt K der Konzentrationsfläche, also der Fläche zwischen der ersten Winkelhalbierenden (Diagonalen) und der Lorenzkurve.

c) Bestimmen Sie den Gini-Koeffizienten G.

**Aufgabe 1.25**

Bei der Untersuchung der Milchmenge y [kg] einer Kuh in Abhängigkeit vom Fettgehalt [%] ergaben sich folgende Meßwerte:

| $x_i$ | 3,1 | 3,2 | 3,3 | 3,4 | 3,5 | 3,6 | 3,6 | 3,7 | 3,8 | 3,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 23,6 | 22,1 | 22,3 | 21,8 | 18,7 | 20,9 | 19,2 | 18,9 | 19,1 | 17,4 |

a) Zeichnen Sie die Punktwolke.

b) Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten r (nach Bravais-Pearson). Weshalb ist hier der Korrelationskoeffizient r geeignet?

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Regressionsgeraden von y bezüglich x. Zeichnen Sie die Regressionsgerade in die Punktwolke ein.

d) Bestimmen Sie die zugehörigen Werte $\hat{y}_i$ auf der Regressionsgeraden.

e) Bestimmen Sie die Summe der vertikalen Abstandsquadrate der Stichprobenwerte von der Regressionsgeraden.

f) Geben Sie einen Schätzwert für die Milchmenge bei einem Fettgehalt von 3,575 % an.

**Aufgabe 1.26**

Gegeben ist folgende zweidimensionale Häufigkeitsverteilung mit den relativen Häufigkeiten:

| $x_j^*$ \ $y_k^*$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0,1 | 0,2 | 0 | 0 |
| 2 | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0,1 | 0,1 |

a) Bestimmen Sie die Mittelwerte der beiden Randverteilungen.

b) Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten r (nach Bravais-Pearson).

**Aufgabe 1.27**

Von einer zweidimensionalen Stichprobe sind folgende Größen gegeben:

$$n = 50; \quad \sum_i x_i = 520; \quad \sum_i x_i^2 = 5\,604;$$

$$\sum_i y_i = 730; \quad \sum_i y_i^2 = 11\,099; \quad \sum_i x_i \cdot y_i = 7\,837.$$

a) Berechnen Sie die Mittelwerte und Standardabweichungen der beiden einzelnen Stichproben.

b) Berechnen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten nach Bravais-Pearson.

c) Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden Regressionsgeraden.

d) Bestimmen Sie die Summe der vertikalen Abstandsquadrate der Stichprobenpaare von der Regressionsgeraden bzgl. x und die Summe der horizontalen Abstandsquadrate von der Regressionsgeraden bzgl. y.

**Aufgabe 1.28**

Zwei Experten führten Geschmacksprüfungen bei 5 Käsesorten durch. Dabei konnten die Verkoster jeweils bis zu 20 Punkte vergeben. Das Ergebnis ist in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt:

| Käsesorte | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Punkte Verk. I $(x_i)$ | 9 | 12 | 4 | 17 | 15 |
| Punkte Verk. II $(y_i)$ | 7 | 14 | 8 | 18 | 20 |

Bestimmen Sie zur Beurteilung des Zusammenhangs beider Bewertungen

a) den Rangkorrelationskoeffizienten $r_S$ von Spearman;

b) den Rangkorrelationskoeffizienten $\tau$ von Kendall.

**Aufgabe 1.29**

Zur Auswertung von 1 000 Meßergebnissen mußten die Studierenden als Hausaufgabe die Summe und die Quadratsumme dieser 1 000 Meßwerte berechnen. Ein Student legte das folgende Ergebnis vor:

$$\sum_{i=1}^{1000} x_i = 1458; \quad \sum_{i=1}^{1000} x_i^2 = 2\,110.$$

Begründen Sie, weshalb mindestens eine dieser Summen falsch sein muß.

**Aufgabe 1.30**

Ein Schiff fährt nacheinander Strecken der Länge 50 km, 100 km und 150 km mit unterschiedlichen, aber jeweils konstanten Geschwindigkeiten. Für die erste Strecke benötigt es 4 Min./km, für die zweite 3 Min./km und für die dritte 2 Min./km.

a) Berechnen Sie die im Durchschnitt für die gesamte Strecke benötigte Zeit pro km. Durch welche Mittelwertsbildung kann dieser Durchschnittswert berechnet werden?

b) Berechnen Sie die durchschnittliche Geschwindigkeit für die gesamte Strecke.

**Aufgabe 1.31**

In einer bäuerlichen Gemeinde ist die Anzahl der landwirtschaftlichen Klein- und Großbetriebe in Abhängigkeit von der Betriebsgöße (in ha) in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt:

| Größe | unter 1 | 1 – 2 | 2 – 5 | 5 – 10 | 10 – 20 | 20 – 50 | 50 – 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl | 3 | 5 | 8 | 10 | 12 | 7 | 5 |

a) Bestimmen Sie Näherungswerte für das arithmetische Mittel $\bar{x}$ und den Median $\tilde{x}$.

b) Skizzieren Sie die Lorenzkurve.

c) Bestimmen Sie einen Näherungswert für den Gini-Koeffizienten (Lorenzsches Konzentrationsmaß).

**Aufgabe 1.32**

An einem Tanzturnier nahmen 6 Tanzpaare teil. Zwei Wertungsrichter gaben den Paaren folgende Platzziffern

| Tanzpaar Nr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Platz von Wertungsrichter I | 4 | 2 | 5 | 1 | 6 | 3 |
| Platz von Wertungsrichter II | 3 | 1 | 5 | 2 | 6 | 4 |

Bestimmen Sie den Spearmanschen Rangkorrelationskoeffizienten $r_S$.

**Aufgabe 1.33**

Eine zweidimensionale Stichprobe besitze die beiden Regressionsgeraden

$$\hat{y} = 1{,}5\,x + 1{,}5 \quad ; \quad \hat{x} = 0{,}4\,y + 1 \,.$$

a) Berechnen Sie das Bestimmtheitsmaß und den Korrelationskoeffizienten r (nach Bravais-Pearson).

b) Die Stichprobe besitze die Kovarianz $s_{xy} = 6$. Berechnen Sie daraus die Standardabweichungen und Mittelwerte der beiden Randverteilungen.

**Aufgabe 1.34**

Eine Firma hat zwei verschiedene Produktionsstätten. Im ersten Werk sind 400 Beschäftigte mit einem Durchschnittsverdienst von 3 650 DM und der zugehörigen Standardabweichung von 150 DM. In beiden Werken zusammen arbeiten 1 000 Personen mit einem Durchschnittsgehalt von 3 500 DM und der Streuung von 200 DM. Bestimmen Sie den Durchschnittsverdienst mit der zugehörigen Standardabweichung im zweiten Werk (in DM).

**Aufgabe 1.35**

Werkstücke werden auf einer von fünf unterschiedlich modernen Maschinen bearbeitet. Dabei werden pro Stück folgende Maschinenzeiten benötigt:

| Maschine | I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|---|
| Bearbeitungszeit [sec./Stück] | 10 | 15 | 20 | 20 | 30 |

a) Auf jeder Maschine werden gleich viele Stücke bearbeitet. Welche Durchschnittszeit in sec. pro Stück wird für die Gesamtproduktion insgesamt benötigt?

b) Auf den einzelnen Maschinen werden fogende Stückzahlen bearbeitet:

I: 300; II: 250; III: 200; IV: 200; V: 150.

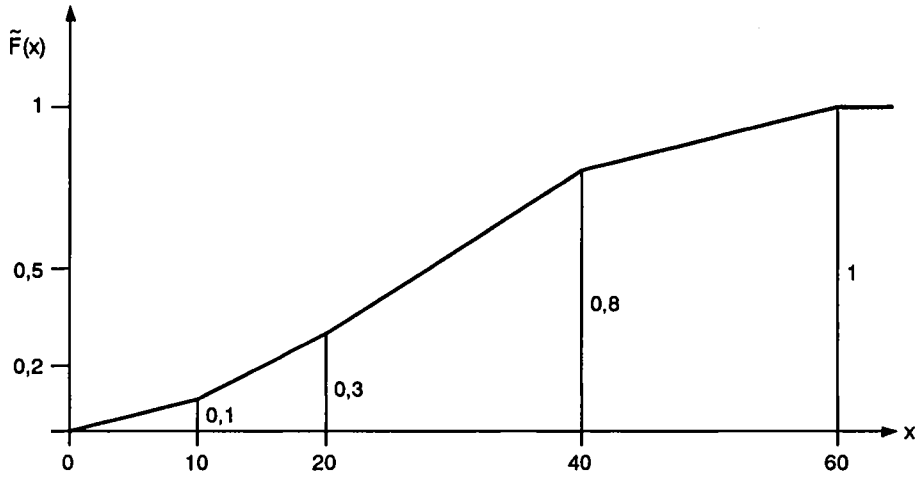
Berechnen Sie die durchschnittliche Bearbeitungszeit pro Stück für diesen Gesamtposten.

c) Alle Maschinen arbeiten gleich lang. Wie viele Stücke pro Stunde werden im Durchschnitt hergestellt?

Welche Durchschnittszeit in sec. pro Stück wird für diese Produktion benötigt?

**Aufgabe 1.36**

In der nachfolgenden Abbildung ist eine klassierte Verteilungsfunktion (einer Klasseneinteilung) gegeben:




a) Geben Sie die relativen Häufigkeiten der Klasseneinteilung an.

b) Zeichnen Sie für die relativen Häufigkeiten ein flächenproportionales Histogramm.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der klassierten Verteilungsfunktion Näherungswerte für folgende Kenngrößen:
$\alpha$) Median, $\beta$) beide Quartile.

d) Zeichnen Sie unter Benutzung der oberen Klassengrenzen die Lorenzkurve.

e) Bestimmen Sie den Gini-Koeffizienten zur Lorenzkurve aus d).

**Aufgabe 1.37**

Die Lorenzkurve einer Häufigkeitsverteilung besitzt folgende (innere) Stützstellen:

| $u_i$ | 0,2 | 0,5 | 0,7 | 0,9 |
|---|---|---|---|---|
| $v_i$ | 0,05 | 0,2 | 0,4 | 0,6 |

a) Skizzieren Sie die Lorenzkurve.

b) Welcher relative Anteil der Merkmalssumme entfällt auf die
$\alpha$) 50% kleinsten, $\beta$) 10 % größten Merkmalsträger?

c) Bestimmen Sie den Gini-Koeffizienten.