Feldlehre

Die Grundlagen der Lehre vom elektrischen und magnetischen Feld

Ein Lehrbuch von
Ulrich Weyh
Professor an der Fachhochschule München

4. Auflage

Mit 136 Bildern und 64 Übungsaufgaben
nebst ausführlichen Lösungen

R. Oldenbourg Verlag München Wien 1993

Die 1. und 2. Auflage dieses Werkes ist unter dem Titel
„Die Grundlagen der Lehre vom elektrischen und magnetischen Feld"
erschienen.

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Weyh, Ulrich:
Feldlehre : die Grundlagen der Lehre vom elektrischen und magnetischen Feld ; ein Lehrbuch / von Ulrich Weyh. – 4. Aufl. – München ; Wien : Oldenbourg, 1993
ISBN 3-486-22486-7

© 1993 R. Oldenbourg Verlag GmbH, München

Das Werk einschließlich aller Abbildungen ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen.

Gesamtherstellung: Huber KG, Dießen

ISBN 3-486-22486-7

Vorwort

> Die Mathematik ist die Form, in der wir unser Verständnis der Natur ausdrücken; aber sie ist nicht sein Inhalt. Man mißversteht die moderne Naturwissenschaft..., wenn man in ihr die Bedeutung des formalen Elementes überschätzt.
>
> Werner Heisenberg

Die Gefahr, die Mathematik in eine falsche Rolle zu drängen - die Mathematik ist für denjenigen, der in ein neues Wissensgebiet eindringt, kein Mittel, physikalische Erkenntnisse zu gewinnen, sie ist vielmehr ein Mittel, gewonnene Erkenntnisse knapp und präzise zu formulieren - diese Gefahr ist bei der Feldlehre nicht unbeträchtlich. "Hier ist ohnehin alles abstrakt", könnte man sich sagen, "und Abstraktes erledigt man am besten von vorneherein mit der Mathematik allein". Eine solche Begründung wäre allerdings ebenso falsch wie sie bestechend logisch erscheint. Denn gerade die Tatsache, daß man es in der Feldlehre vorwiegend mit abstrakten Größen zu tun hat, fordert kategorisch zum begrifflichen Denken auf, fordert den Begriff v o r dem Einsatz der Mathematik, die ohne den Begriff leer im Raum steht. Abstrahieren heißt doch: unwesentliche Unterschiede außer acht lassen und das von höherer Warte aus Gemeinsame sehen, heißt also: übergeordnete Gesichtspunkte finden und Oberbegriffe bilden. Damit ist geradezu das begriffliche Denken selbst definiert, das allein uns in die Lage versetzt, die Fülle der physikalischen Erscheinungen sinnvoll zu ordnen und sie auf einige wenige Grundgesetze zurückzuführen, kurz: das uns zu Erkenntnis und Verständnis führt.

Die hier vorgelegte Einführung in die Lehre vom elektrischen und magnetischen Feld ist entsprechend den eben geäußerten Gedanken vorwiegend an Begriffen orientiert. Das beeinflußt selbstverständlich auch die Reihenfolge des Vorgehens im einzelnen; so beginnen wir beispielsweise nicht, wie es häufig gemacht wird, sozusagen mitten aus dem Feld heraus mit der Feldstärke, sondern führen zuerst die Begriffe ein, die ein Feld in seiner Gesamtheit beschreiben, und befassen uns dann erst mit den Verhältnissen am einzelnen Feldpunkt. (Der Primat des Begrifflichen bedeutet im übrigen keineswegs, daß der Mathematik der Platz verwehrt würde, der ihr zukommt.) Im ganzen Buch sind zwei Tendenzen vorherrschend: Einmal soll gezeigt werden, daß das elektrische Feld und das magnetische Feld "wesensgleich" sind, d.h. unter dem Aspekt des Abstrahierens wird ein übergeordneter Betrachtungspunkt gefunden, von dem aus das Gemeinsame dieser beiden Felder sichtbar wird und das Unterschiedliche in den Hintergrund tritt. Und zum zweiten soll gezeigt werden, daß alles elektrische und magnetische Geschehen stets auf drei fundamentale Beobach-

tungsbefunde zurückzuführen ist: 1. eine elektrische Ladung umgibt sich mit einem elektrischen Feld; 2. ein sich veränderndes elektrisches Feld ruft ein magnetisches Feld hervor; 3. ein sich veränderndes magnetisches Feld ruft ein elektrisches Feld hervor. Dadurch ist der Boden abgesteckt, auf dem auch die berühmten MAXWELLschen Gleichungen ihren Ansatzpunkt nehmen.

Dieses Buch bildet den Mittelteil einer dreibändigen Einführung in die Grundlagen der Elektrizitätslehre:

Die Grundlagen der Gleichstromlehre *)
Die Grundlagen der Lehre vom elektrischen und magnetischen Feld
Die Grundlagen der Wechselstromlehre (vergriffen)

Es beschränkt sich gemäß der in seinem Titel zum Ausdruck gebrachten Zielvorstellung stofflich auf die Grundlagen der Feldlehre, zeigt deren Anwendung auf eine Reihe von einfachen technischen Anordnungen und legt den Grund, auf dem anschließend eine fortgeschrittene Feldlehre, nämlich die von den elektromagnetischen Feldern, aufbauen kann.

Das Ordnungsschema, das diesem Band zugrundeliegt, ist das folgende:

Kap. 1 Einführung der wichtigsten Feldbegriffe
Kap. 2 Das elektrische Feld
Kap. 3 Das magnetische Feld
Kap. 4 Zusammenfassung und vergleichende Übersicht.

Meinem Kollegen H. Benzinger möchte ich an dieser Stelle für seine zahlreichen kritischen Manuskriptanmerkungen danken; sie haben in vielen Abänderungen zum Vorteil des Buches ihren Niederschlag gefunden.

München, im Winter 1989 U. Weyh

*) Alle erschienen im R. Oldenbourg Verlag München Wien.

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung der wichtigsten Feldbegriffe 9

1.1 Die integralen Feldgrößen 10

1.2 Die ortsbezogenen Feldgrößen 13

1.3 Der Zusammenhang zwischen den ortsbezogenen und den integralen Feldgrößen 16

1.4 Äquipotentialflächen 17

1.5 Quellenfeld und Wirbelfeld 18

1.6 Zusammenfassung 18

Rechenbeispiel 19

2. Das elektrische Feld 24

2.1 Die grundlegenden Beobachtungsbefunde 24

2.2 Die Bestimmung der elektrischen Feldgrößen 32

2.21 Erzeugung eines einfach berechenbaren elektrischen Feldes 32

2.22 Die integralen elektrischen Feldgrößen 33

2.23 Die ortsbezogenen elektrischen Feldgrößen 42

2.3 Kapazität 58

2.31 Kapazitäten einfacher Kondensatoranordnungen 60

2.32 Zusammenschaltung von Kapazitäten 67

2.4 Mehrschichtdielektrikum 74

2.5 Energie im elektrischen Feld 81

2.51 Gespeicherte Energie im geladenen Kondensator 81

2.52 Energiedichte im elektrischen Feld 85

2.53 Dielektrische Leistung 87

2.54 Die Kapazität als "Spannungs-Trägheit" 87

2.6 Kräfte zwischen den Elektroden eines geladenen Kondensators 90

2.7 Das elektrische Strömungsfeld 94

2.8 Vergleichende Übersicht 104

3. Das magnetische Feld 106

3.1 Die grundlegenden Beobachtungsbefunde 107

3.2 Die Bestimmung der magnetischen Feldgrößen 119

3.21 Erzeugung eines einfach berechenbaren magnetischen Feldes 120

3.22 Die integralen magnetischen Feldgrößen 121

3.23 Die ortsbezogenen magnetischen Feldgrößen 126

3.3 Das magnetische Feld in ferromagnetischen Materialien 140

3.31 Die "Magnetisierungskennlinie" eines Ferromagnetikums 141

3.32 Geschlossener Eisenkreis als magnetischer Feldraum ... 147

3.33 Eisenkreis mit Luftspalt 150

3.4 Die elektromagnetische Induktion 155

3.41 Das Induktionsgesetz 155

3.42 Selbstinduktion - Induktivität 171

3.421 Induktivität einfacher Spulenanordnungen 171

3.422 Zusammenschaltung von Induktivitäten 179

3.43 Gegeninduktion - Gegeninduktivität 182

3.5 Energie im magnetischen Feld 188

3.51 Gespeicherte Energie in der stromdurchflossenen Spule .. 189

3.52 Energiedichte im magnetischen Feld 193

3.53 Magnetische Leistung 197

3.54 Die Induktivität als "Stromstärke-Trägheit" 198

3.6 Kräfte an den Polflächen eines Magneten 200

4. Zusammenfassung und vergleichende Übersicht 205

Lösungen der Übungsaufgaben 214

Anhang 241

Literaturhinweis 244

Sachregister 246

1. Einführung der wichtigsten Feldbegriffe

Das Eindringen in die Lehre von den elektrischen und magnetischen Feldern macht dem Studierenden der Elektrotechnik erfahrungsgemäß mehr Schwierigkeiten als das Eindringen in die Lehre vom elektrischen Stromkreis. Das liegt sicher vorwiegend daran, daß sich in "den Feldern" nichts Materielles bewegt, ja daß sie nicht einmal von Materie erfüllt zu sein brauchen; hier entfallen daher solche anschaulichen Modellvorstellungen, wie man sie etwa für den elektrischen Stromkreis entwickelt hat, und es bleibt nichts anderes übrig, als die Felder etwa durch "Zustände", "Zustandsänderungen" und dergleichen zu kennzeichnen. Damit ist der eigentliche Kern der Verständnisschwierigkeiten aufgedeckt: es ist die Abstraktheit der Feldbegriffe.

Eine abstrakte Begriffswelt ist nun jedoch nichts negatives, im Gegenteil: der "abstrahierende", das heißt der alle unwesentlichen Einzelheiten abstreifende und dafür das wesentliche Merkmal hervorkehrende Begriff ist es ja, der ein systematisches Ordnen der Erscheinungen überhaupt erst erlaubt, der es uns gestattet, von "den" Feldern zu sprechen, also auf irgendeine Gemeinsamkeit unter ihnen anzuspielen. Die abstrakten Begriffe etablieren gegenüber den dinglichen Begriffen eine höhere Ebene der Begriffsbildung, von der aus der Blick erheblich weiter reicht als vorher; aber dazu will diese Höhe erst erklommen sein, was für den Lernenden bedeutet: er muß den Prozeß der Begriffsbildung eindringlich nachvollziehen. Das wird ihm oft dadurch erschwert, daß er sich die neuen Feldbegriffe genau dort aneignen soll, wo die Gegend durch lauter Größen abgesteckt ist, die ihm ebenfalls noch unbekannt sind: die elektrischen und magnetischen Feldgrößen. Es erschien daher sinnvoll, in diesem einführenden Kapitel den Versuch zu unternehmen, den Leser vor seinem Eintritt in das elektrische und magnetische Feld anhand eines vertrauten physikalischen Vorgangs mit den wichtigsten Feldbegriffen bekannt zu machen.

Zu diesem Zweck diene das in Bild 1.1 gezeigte "Wärmefeld": Ein zylindrischer Körper K_1 wird, etwa durch eine elektrische Heizung in seinem Inneren, auf konstanter Temperatur T_1 gehalten. Er ist weitgehend von idealisiert nichtwärmeleitendem Material umgeben, sodaß für das Abfließen von Wärme (= Energie in Wärmeform) in Richtung auf den Körper K_0 mit seiner ebenfalls konstanten Temperatur $T_0 < T_1$ nur ein Wärmeleitkanal von etwas unregelmäßiger Form zur Verfügung steht. In diesem Wärmeleiter bildet sich unser "Wärmefeld" aus; er ist der zu untersuchende "Feldraum".

Einen Feldraum beschreibt man dadurch vollständig und eindeutig, daß man für jeden Punkt in ihm angibt, welche Intensität und welche Richtung das

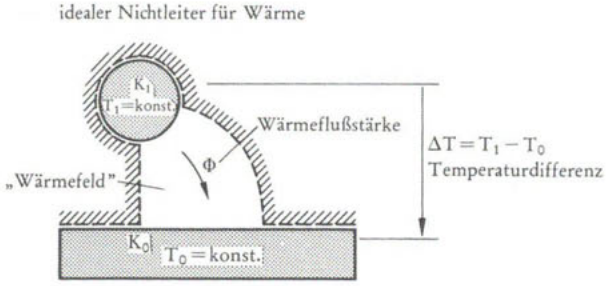

Bild 1.1: „Wärmefeld"
Der dargestellte „Wärmefeldraum" zwischen den Körpern K_1 und K_0 sei nach vorne und hinten durch senkrechte Wände aus idealem Wärmeisoliermaterial begrenzt.

"Feld" dort hat, d.h. indem man mathematisch Betrag und Richtung der örtlich veränderlichen Feldgrößen "Feldstärke" und "Flußdichte" nennt. Diese jeweils speziell auf einen bestimmten Feldpunkt bezogenen, also "ortsbezogenen" Feldgrößen lassen sich ihrerseits wieder aus anderen Feldgrößen ableiten, die das Geschehen im Feld in seiner Gesamtheit - gewissermaßen als "Gesamt-Feldursache" und "Gesamt-Feldwirkung" - zusammenfassend oder "integrierend" beschreiben; wir wollen sie deshalb für unseren Gebrauch als "integrale" Feldgrößen bezeichnen. Sie werden als erste behandelt.

1.1 *Die integralen Feldgrößen*

Das Wärmefeld wird in seiner Gesamtheit durch den "Wärmefluß" [1] bestimmt, der es durchsetzt. Er ist eine physikalische Erscheinung, die sich quantitativ durch die physikalische Größe "Wärmeflußstärke ϕ" ausdrücken läßt [2]. Da der Wärmefluß durch die Angabe seiner Flußstärke und seines Richtungssinnes bereits vollständig gekennzeichnet wird, ist ϕ eine skalare Größe mit einem Vorzeichen, das angibt, ob der Wärmefluß die Richtung eines an entsprechender Stelle stehenden Zählpfeiles für ϕ hat (+) oder die dazu entgegengesetzte (-) [3]. ϕ hat die Dimension einer Leistung P; denn: Wärmeflußstärke ϕ = die durch einen betrachteten Querschnitt hindurchtretende Energie in Wärmeform W, dividiert durch die Zeit t, die dazu benötigt wird; $\phi = \frac{W}{t} = P$.

Der Wärmefluß hat, wie man sich leicht überlegen kann, in allen Querschnitten des Feldraumes, durch die er hindurchtritt, dieselbe Flußstärke ϕ : Was pro Zeiteinheit an Wärmemenge den Körper K_1 verläßt, muß pro Zeiteinheit

1) Wir benützen hier von Anfang an die in der Feldlehre übliche Ausdrucksweise und nennen daher das, was in der Wärmelehre gemeinhin als "Wärmestrom" bezeichnet wird, einen "Wärme fluß" etc.

2) ϕ = großer griechischer Buchstabe "Phi".

3) Siehe hierzu auch: U. Weyh "Zählpfeile in der Elektrotechnik", R. Oldenbourg Verlag München Wien.

auch am Körper K_0 ankommen. Dabei setzen wir den stationären Zustand des Feldes voraus, d.h. wir betrachten den vorübergehenden oder "transienten" Vorgang, in dem sich das Feld aufbaut und in dem sich die einzelnen Feldgrößen noch zeitlich verändern, als bereits abgeklungen.

Nun ist aber der Wärmefluß eine "Wirkungsgröße", die nicht aus sich selbst heraus existieren kann, sondern vielmehr eine "Ursachen-" oder "Antriebsgröße" zur unerläßlichen Voraussetzung hat. Wärme fließt immer nur von einem Körper höherer Temperatur zu einem Körper niedrigerer Temperatur. Die integrale Feldgröße, mit der man hier den "Wärmeflußantrieb" quantitativ beschreibt, ist daher nichts anderes als die Temperaturdifferenz $\Delta T = T_1 - T_0$ zwischen den beiden Körpern K_1 und K_0. Sie ist wie die Wärmeflußstärke eine skalare Größe mit Vorzeichen zur Bezugnahme auf eine frei gewählte Zählpfeilrichtung und hat die Dimension einer Temperatur. Als ihren Richtungssinn legen wir zweckmäßigerweise durch Definition denjenigen fest, in dem sie einen Wärmefluß anzutreiben vermag: von der höheren zur niedrigeren Temperatur. (Es empfiehlt sich, die Zählpfeile für ΔT und ϕ so zu wählen wie in Bild 1.1, daß ein "positives" ΔT einen "positiven" Wärmefluß hervorruft; sog. "angepaßtes Zählpfeilsystem" für die Verknüpfung von Ursachen- und Wirkungsgröße.)

Unter dem Blickwinkel der Energie gesehen ist die Temperaturdifferenz ΔT eine "Potential"-differenz, wobei das Wort Potential auf die prinzipielle Verfügbarkeit von Energie hinweist: Die absolute Temperatur eines Körpers kennzeichnet die in ihm in Wärmeform gespeicherte spezifische Energie, also sein Wärmepotential; die Temperaturdifferenz gegenüber einem anderen Körper kennzeichnet dementsprechend die Potentialdifferenz, die er bezüglich dieses anderen Körpers aufweist, ist also beispielsweise bei positivem Wert der Ausdruck für seine "Überschußenergie", die er - sofern es die äußeren Umstände zulassen - an diesen anderen Körper abgeben kann.

Der quantitative Zusammenhang zwischen den beiden integralen Feldgrößen, der Gesamt-Feldursache ΔT und der Gesamt-Feldwirkung ϕ, wird durch die Eigenschaften des Feldraumes selbst hergestellt. Die Stärke des sich bei gegebenem ΔT ausbildenden Wärmeflusses wird nämlich

1. umso größer sein, je größer der Feldraumquerschnitt A ist, der ihm zur Verfügung steht;
2. umso kleiner sein, je größer die Feldraumlänge s ist, die er zu durchmessen hat;
3. umso größer sein, je größer der "spezifische Wärmeleitwert λ" ist, den das Material des Feldraumes aufweist*).

Faßt man die hier genannten geometrischen Eigenschaften des Feldraumes und seine maßgebende wärmetechnische Materialeigenschaft zu dem Begriff

*) λ = kleiner griechischer Buchstabe "Lambda".

seines "Wärmeleitwertes G_W" zusammen, so kann man die Abhängigkeit der Wirkungsgröße von ihrer Ursachengröße folgendermaßen formulieren:

Wärmeflußstärke = Temperaturdifferenz x Wärmeleitwert

Darin kommt das grundlegende Naturprinzip zum Ausdruck, das besagt: Bei sonst konstanten Verhältnissen (hier bei konstantem Wärmeleitwert) ist die Wirkungsgröße stets proportional der Ursachengröße. Diese Gleichung stellt somit die fundamentale Beziehung zwischen den integralen Feldgrößen dar; sie gilt, umgeschrieben in die allgemeine Form:

Flußstärke = Flußantriebsgröße x maßgebender Leitwert des Feldraumes

für alle Felder; dabei ist der betreffende Leitwert nicht notwendig eine Konstante.

Mit Formelbuchstaben lautet diese Gleichung für das Wärmefeld:

$$\phi = \Delta T \cdot G_W \ .$$

Daraus erhält man durch Umstellung die Definitionsgleichung für den Wärmeleitwert G_W:

$$G_W = \frac{\phi}{\Delta T} \ .$$

G_W hat die Dimension "Wärmeflußstärke"/"Temperaturdifferenz", kann also angegeben werden in Watt pro Kelvin.

Es liegt auf der Hand, daß sich der Wärmeleitwert eines Wärmefeldraumes nur dann in einfacher Weise berechnen läßt, wenn einerseits sein Querschnitt A überall gleich ist und andererseits auch seine Länge s. Dann ist

$$G_W = \frac{A}{s} \cdot \lambda \ .$$

Zur Bestimmung des Wärmeleitwertes von Feldräumen, bei denen diese Voraussetzung nicht gegeben ist, schaffen - sofern die Wärmeflußverteilung in ihnen mathematisch exakt formuliert werden kann, z.B. bei Vorhandensein von Symmetrie - erst die nachfolgend behandelten ortsbezogenen Feldgrößen die rechnerischen Grundlagen. In den übrigen Fällen, wie z.B. auch bei dem in Bild 1.1 dargestellten, ist nur entweder eine näherungsweise Berechnung von G_W möglich oder aber eine meßtechnische Ermittlung aufgrund der Definitionsgleichung für den Wärmeleitwert: $G_W = \phi / \Delta T$.

Der einfache Zusammenhang zwischen den integralen Feldgrößen:

$$\phi = \Delta T \cdot G_W$$

ist formal der gleiche wie der vom elektrischen Stromkreis her bekannte:

$$I = U \cdot G,$$

der ja auch die Gesamt-Wirkungsgröße "Stromstärke I" mit der Gesamt-Ursachengröße "Spannung U" über den "elektrischen Leitwert G" in Verbindung bringt. Es ist darauf hinzuweisen, daß diese Zusammenhänge dann linear sind, wenn die betreffenden Leitwerte G bzw. G_w konstant sind, d.h. wenn die jeweiligen Materialeigenschaften "spezifischer elektrischer Leitwert κ" bzw. "spezifischer Wärmeleitwert λ" echte Materialkonstanten sind; daß sie aber nichtlinear sind, wenn $\kappa \neq$ konst. bzw. $\lambda \neq$ konst. Genauso wie es elektrische Leitermaterialien gibt, deren spezifischer Leitwert von der Stromstärke abhängt, die den Leiter belastet, gibt es auch Wärmeleiter, deren spezifischer Wärmeleitwert sich mit dem Wärmefluß ändert, der sie durchsetzt. Eine echte Materialkonstante ist λ nur bei reinen Metallen.

1.2 *Die ortsbezogenen Feldgrößen*

Das Wärmefeld wird in jedem Punkt des Feldraumes durch die Intensität und die Richtung des Wärmeflusses an dieser Stelle gekennzeichnet. Für das in Bild 1.1 entworfene Wärmefeld ist in Bild 1.2a die Verteilung des Wärmeflusses auf den Feldraum durch Strömungslinien oder besser "Feldlinien" angedeutet. Die - frei wählbare - Gesamtzahl dieser Feldlinien ist ein Maß für die Stärke ϕ des Wärmeflusses. Jede Linie repräsentiert dabei den gleichen Anteil des Gesamtflusses und in der räumlichen Verteilung der Feldlinien ist somit die räumliche Verteilung des Wärmeflusses unmittelbar abgebildet: größere bzw. kleinere Feldliniendichte bedeutet jeweils auch größere oder kleinere Wärmeflußdichte.

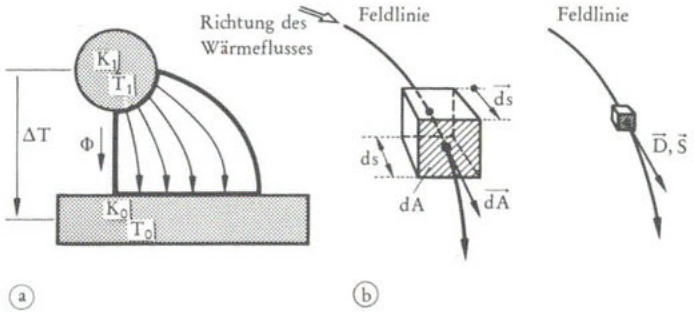

Bild 1.2:
a, Nähere Kennzeichnung des Feldes durch „Feldlinien".
b, Zur Definition der ortsbezogenen Feldgrößen.

Wir greifen nun an einer beliebigen Stelle des Feldes ein infinitesimal kleines würfelförmiges Raumelement vom Querschnitt dA und der Länge ds heraus. Die als Vektor aufgefaßte Länge $\vec{ds}$ soll dabei die Richtung der Tangente an die Feldlinie in dem betreffenden Feldpunkt haben und ihr Richtungssinn soll der des Wärmeflusses selbst sein (Bild 1.2b). Die Querschnittsfläche dA liegt dann senkrecht zur Wärmeflußrichtung an dieser Stelle und wir beschreiben sie durch ihren Vektor $\vec{dA}$, der die Richtung ihrer Flächennormalen hat und dessen Richtungssinn wir so festlegen, daß er mit dem des Vektors $\vec{ds}$ übereinstimmt.

Das herausgegriffene Raumelement werde als so klein betrachtet, daß

1. der durch das Flächenelement dA ($= |\vec{dA}|$) hindurchtretende Teil-Wärmefluß $d\phi$ sich gleichmäßig über dA verteilt;
2. die längs des Wegelements ds ($= |\vec{ds}|$) wirksame Teil-Temperaturdifferenz $d\Delta T$ im Inneren des Raumelementes ein gleichmäßiges Temperaturgefälle ergibt;

mit anderen Worten, daß in diesem Raumelement "homogene" Feldverhältnisse herrschen; die Wärmeflußintensität ist an allen Stellen gleich groß und hat überall die gleiche Richtung.

Für diesen infinitesimal kleinen Feldraum gilt genau das gleiche Gesetz, das den Zusammenhang zwischen den integralen Feldgrößen beschreibt, nur daß es hier auf eine Teil-Flußantriebsgröße und eine Teil-Flußstärke angewandt wird:

$$d\phi = d\Delta T \cdot G_W .$$

G_W ist jetzt der Wärmeleitwert des betrachteten Raumelementes. Bei diesem handelt es sich um einen Feldraum von überall gleicher Länge ds und überall gleichem Querschnitt dA, der von einem homogenen Feld erfüllt ist. Daher gilt:

$$G_W = \frac{dA}{ds} \cdot \lambda .$$

Damit wird:

$$d\phi = d\Delta T \cdot G_W = d\Delta T \cdot \frac{dA}{ds} \cdot \lambda .$$

Diese Beziehung kann man in folgender Weise umschreiben:

$$d\phi = \frac{d\Delta T}{ds} \cdot \lambda \cdot dA$$

$$\frac{d\phi}{dA} = \frac{d\Delta T}{ds} \cdot \lambda .$$

Die letzte Gleichung stellt bereits die Beziehung zwischen den ortsbezogenen Feldgrößen dar, denn

$d\phi/dA$ ist als Verhältnis "Teil-Flußstärke"/"Flächenelement, durch das der betreffende Teilfluß hindurchtritt" die "Flußdichte", die wir in unserem Wärmefeldbeispiel als "Wärmeflußdichte D" bezeichnen wollen: $D = \frac{d\phi}{dA}$; und

$d\Delta T/ds$ ist als Verhältnis "Teil-Antriebsgröße"/"Wegelement, längs dessen diese Teil-Antriebsgröße wirksam wird" die "Feldstärke", die wir in unserem Beispiel als "Wärmefeldstärke S" bezeichnen wollen:

$S = \frac{d\Delta T}{ds}$.

Die Wärmeflußdichte hat die Dimension "Wärmeflußstärke"/"Fläche" und kann angegeben werden in Watt pro Meter im Quadrat; die Wärmefeldstärke hat die Dimension "Temperaturdifferenz"/"Weglänge" und kann angegeben werden in Kelvin pro Meter.

Im Gegensatz zu den korrespondierenden integralen Feldgrößen "Flußstärke" und "Flußantriebsgröße" haben die ortsbezogenen Feldgrößen "Flußdichte" und "Feldstärke" eine Richtung im Raum, nämlich diejenige, in der die ortsbezogene Ursachengröße "Feldstärke" ihren Antrieb geltend macht, und an der sich infolgedessen die ortsbezogene Wirkungsgröße "Flußdichte" ausrichtet. Zur Ermöglichung der vollständigen mathematischen Aussage sind daher die beiden Größen als Vektoren zu definieren*):

$$\vec{S} = \frac{d\Delta T}{\vec{ds}}$$ Definition der Wärmefeldstärke

Hierin hat das Wegelement $\vec{ds}$ die Richtung des stärksten Temperaturgefälles an der fraglichen Stelle; $d\Delta T$ ist die entsprechende Teil-Temperaturdifferenz längs dieses Wegelementes. $\vec{S}$ hat die Richtung von $\vec{ds}$ und damit stets die Richtung des stärksten Temperaturgefälles. (Wie man wohl erkennen kann, ist die hiermit definierte "Wärmefeldstärke $\vec{S}$" nichts anderes als der negative Temperaturgradient $-dT/\vec{dx}$, mit dem man in der Wärmelehre arbeitet.)

$$\vec{D} = \frac{d\phi}{\vec{dA}}$$ Definition der Wärmeflußdichte

Hierin ist $\vec{dA}$ der Vektor eines Flächenelementes, das senkrecht zur Richtung des stärksten Temperaturgefälles an der fraglichen Stelle steht; $\vec{dA}$ hat die Richtung der Flächennormalen; $d\phi$ ist die Stärke des Teil-Wärmeflusses, der das Flächenelement durchsetzt. $\vec{D}$ hat die Richtung von $\vec{dA}$ (also auch die von $\vec{ds}$ bzw. die des stärksten Temperaturgefälles).

Damit kann man nunmehr die fundamentale Beziehung zwischen den ortsbezogenen Feldgrößen formulieren:

$$\vec{D} = \vec{S} \cdot \lambda$$

Wärmeflußdichte = Wärmefeldstärke x spezifischer Wärmeleitwert.

Sie gilt, umgeschrieben in die allgemeine Form:

$$\text{Flußdichte} = \text{Feldstärke} \times \frac{\text{maßgebender spezifischer Leitwert des Feldraumes}}{}$$

für alle Felder; dabei ist der betreffende spezifische Leitwert nicht notwendig eine Konstante.

Die Feldstärke an einem bestimmten Feldpunkt ruft also dort eine Flußdichte hervor, deren Größe durch die Größe der Feldstärke und die Größe des spezifischen Leitwertes des Feldraumes bestimmt wird, und deren Richtung diejenige der antreibenden Feldstärke ist.

*) Siehe hierzu Anm. S. 23

1.3 *Der Zusammenhang zwischen den ortsbezogenen und den integralen Feldgrößen*

Wird ein beliebiges, hinreichend kleines Flächenelement $\vec{dA}$ des Feldraumes von der konstanten Flußdichte $\vec{D}$ durchsetzt, so ergibt sich der betreffende Teilfluß $d\phi$ als das skalare Produkt aus $\vec{D}$ und $\vec{dA}$ (hierzu Bild 1.3):

$$d\phi = \vec{D} \cdot \vec{dA}.$$

Die skalare Größe $d\phi$ berechnet man dabei nach den Regeln der Vektorrechnung als das Produkt aus den Beträgen von $\vec{D}$ und $\vec{dA}$, multipliziert mit dem Cosinus des Winkels α, den diese beiden Vektoren miteinander einschließen: $d\phi = |\vec{D}| \cdot |\vec{dA}| \cdot \cos\alpha = D \cdot dA \cdot \cos\alpha$. Bei gegebenen Größen D und dA ist somit $d\phi$ ein Maximum, wenn $\vec{D}$ mit $\vec{dA}$ gleichgerichtet ist, und $d\phi$ wird Null, wenn $\vec{D}$ senkrecht auf $\vec{dA}$ steht.

Die eine Querschnittsfläche A des Feldraumes durchsetzende Gesamtflußstärke ϕ berechnet man demzufolge als das Flächenintegral über die Flußdichte:

$$\phi = \int_A d\phi = \int_A \vec{D} \cdot \vec{dA}.$$

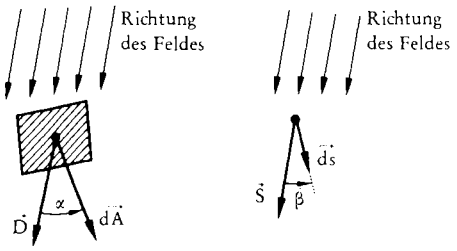

Bild 1.3:
Zur Bildung der skalaren Produkte $d\Phi = \vec{D} \cdot \vec{dA} \cdot \cos\alpha$ und $d\Delta T = \vec{S} \cdot \vec{ds} = S \cdot ds \cdot \cos\beta$.

Hierbei ist es gleichgültig, wie die Integrationsfläche im Feldraum liegt, sofern sie nur den gesamten Feldquerschnitt umfaßt.

Ist über ein beliebiges, hinreichend kleines Wegelement $\vec{ds}$ des Feldraumes die Feldstärke $\vec{S}$ konstant, so ergibt sich der auf diesem Wegelement wirksame Teil-Flußantrieb $d\Delta T$ als das skalare Produkt aus $\vec{S}$ und $\vec{ds}$:

$$d\Delta T = \vec{S} \cdot \vec{ds}.$$

Dabei ist wieder zu bilden: $d\Delta T = |\vec{S}| \cdot |\vec{ds}| \cdot \cos\beta = S \cdot ds \cdot \cos\beta$, wenn β der Winkel ist, den $\vec{S}$ und $\vec{ds}$ miteinander einschließen (Bild 1.3). $d\Delta T$ wird ein Maximum, wenn man $\vec{ds}$ in Richtung der Feldstärke wählt, $d\Delta T$ wird dagegen Null, wenn man $\vec{ds}$ senkrecht zur Richtung der Feldstärke legt.

Der gesamte zwischen den Körpern 1 und 0 von Bild 1.1 liegende Flußantrieb ΔT läßt sich demzufolge als das Linienintegral über die Feldstärke berechnen:

$$\Delta T = \int_1^0 d\Delta T = \int_1^0 \vec{S} \cdot \vec{ds}.$$

Hierbei ist es gleichgültig, welchen Weg die Integrationslinie im einzelnen nimmt, sofern sie sich nur vom Körper 1 bis zum Körper 0 erstreckt.

Die beiden Beziehungen - die nun auch mathematisch den Ausdruck "integrale Feldgrößen" rechtfertigen - gelten umgeschrieben in die allgemeine Form:

Flußstärke = Flächenintegral über die Flußdichte

und

Flußantriebsgröße = Linienintegral über die Feldstärke

für alle Felder.

1.4 *Äquipotentialflächen*

Verbindet man in unserem "Wärmefeld" nach Bild 1.1 jeweils alle jene Feldpunkte miteinander, die auf gleicher Temperatur T liegen, so erhält man "Flächen gleicher Temperatur" oder "Flächen gleichen Wärmepotentials". Man nennt derartige Flächen ganz allgemein "Äquipotentialflächen" (von "aequus", lat.: gleich). Speziell in einem Wärmefeld kann man sie auch genauer als "Wärme-Äquipotentialflächen" bezeichnen.

Äquipotentialflächen und Feldlinien, die ja an jeder Stelle die Richtung von Feldstärke und Flußdichte angeben, stehen immer senkrecht aufeinander. Träfe dies nicht zu, so hätte z.B. die Wärmefeldstärke eine Komponente in der Ebene der Äquipotentialfläche, die ihrerseits eine Komponente der Wärmeflußdichte - ebenfalls in der Ebene der Äquipotentialfläche - hervorriefe. Eine Wärmeströmung bzw. eine Komponente davon ist aber nur in Richtung eines Temperaturabfalls möglich, was der ursprünglichen Annahme konstanter Temperatur längs der betrachteten Fläche widerspricht. Das heißt aber: Feldstärke und Flußdichte treten stets senkrecht aus Äquipotentialflächen aus bzw. in sie ein. Das gilt vor allem auch für die Einmündung der Feldlinien in die voraussetzungsgemäß auf jeweils konstanter Temperatur gehaltenen Körper K_1 und K_0 unseres Beispiels. Häufig ist es bei der Ermittlung von Feldlinienbildern sehr nützlich bzw. unter Umständen sogar leichter, erst die Äquipotentialflächen festzustellen und dann erst die sie senkrecht schneidenden Feldlinien einzuzeichnen.

In Bild 1.4 ist der Verlauf einiger Äquipotentialflächen für unser Wärmefeld eingetragen. Normalerweise zeichnet man sie für jeweils gleiche Potential-

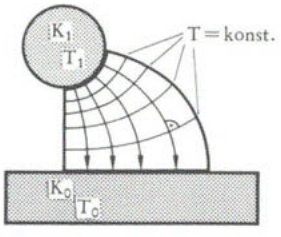

Bild 1.4:
Verlauf der Äquipotentialflächen T = konst. im Wärmefeld.

unterschiede (hier also für gleiche Wärme-Potentialunterschiede, d.h. für gleiche Temperaturschritte ΔT).

Soll zwischen je zwei Äquipotentialflächen das Linienintegral $\Delta T = \int \vec{S} \cdot \vec{ds}$ immer denselben Wert haben, so ist es klar, daß z.B. bei allmählich abnehmender Feldstärke (= dort, wo die Feldlinien weiter auseinanderstreben, denn Flußdichte und Feldstärke sind einander proportional) die Wegstrecke, über die zu integrieren ist, immer länger wird: Feldlinien und Äquipotentialflächen für jeweils gleiche Potentialschritte rücken immer gemeinsam näher zusammen oder weiter auseinander.

1.5 *Quellenfeld und Wirbelfeld*

Das hier zur Erläuterung der Feldbegriffe angezogene Wärmefeld ist ein sog. "Quellenfeld": Jede der Feldlinien, die zusammen das ganze Feld charakterisieren, entspringt in einer "Quelle" und endigt in einer "Senke". Es gibt aber daneben noch einen anderen Typ von Feldern, das sind die sog. "Wirbelfelder": bei ihnen sind sämtliche Feldlinien in sich geschlossen, so etwa wie die Wirbellinien eines Wasser- oder Luftwirbels. Auch auf diese Felder wendet man die hier eingeführten Feldbegriffe an.

1.6 *Zusammenfassung*

Jedes Feld kann durch zwei integrale und zwei ortsbezogene Feldgrößen beschrieben werden:

Die integralen Feldgrößen "Flußantriebsgröße" und "Flußstärke" kennzeichnen als skalare Größen das betreffende Feld in seiner Gesamtheit.

Die ortsbezogenen Feldgrößen "Feldstärke" und "Flußdichte" kennzeichnen als Vektorgrößen den Feldverlauf des betreffenden Feldes in jedem Punkt des Feldraumes nach Größe und Richtung.

Die "Flußantriebsgröße" ist die Ursachengröße des Feldes als Ganzes; sie ist energetisch betrachtet stets eine Potentialdifferenz.

Die "Flußstärke" ist die Wirkungsgröße: das Feld wird in seiner gesamten Ausdehnung von dem betreffenden "Fluß" durchsetzt, der sich bei "homogenem" Feld gleichmäßig, bei "inhomogenem" Feld ungleichmäßig über den Feldraum verteilt. Der Fluß hat in jedem Querschnitt dieselbe Stärke, er besitzt - wie man zu sagen pflegt - "Stromcharakter". Daraus ergeben sich zwei wichtige Folgerungen:

erstens kann man die Stärke eines Flusses, der wechselnde Querschnitte durchläuft, an beliebiger Stelle berechnen, d.h. also an der jeweils für eine Berechnung günstigsten;

zweitens läßt sich auf einen Fluß der entsprechend abgewandelte KIRCHHOFFsche Knotenpunktsatz anwenden: Wenn ein Fluß sich irgendwo verzweigt, dann muß die Summe der einzelnen Teilflußstärken stets gleich der Stärke des Gesamtflusses sein.

Hierbei ist anzumerken, daß der Begriff "Fluß" völlig unabhängig davon gebraucht wird, ob in dem betreffenden Feld wirklich etwas fließt oder nicht. In den meisten Feldern fließt tatsächlich nichts; hier kennzeichnet der "Fluß" ganz einfach den Zustand, in dem sich der gesamte Feldraum befindet.

Zwischen den beiden integralen Feldgrößen besteht der Zusammenhang

$$\text{Flußstärke} = \text{Flußantriebsgröße} \times \text{maßgebender Leitwert des Feldraumes}$$

(Anstelle des Leitwertes kann man auch den Widerstand des Feldraumes = Kehrwert des Leitwertes, definieren. Leitwertbegriffe sind bei Parallelschaltung, Widerstandsbegriffe hingegen bei Serienschaltung von Feldräumen vorzuziehen; man vergleiche hierzu die analoge Handhabung von Leitwert und Widerstand im elektrischen Stromkreis.)

Der maßgebende Leitwert (Widerstand) eines Feldraumes kann nur bei homogenen Feldern auf einfache Weise unmittelbar berechnet werden; er ist, wenn der betreffende spezifische Leitwert des Feldraumes keine Materialkonstante ist, eine von der Flußbelastung abhängige Größe.

Die "Feldstärke" ist die in einem bestimmten Feldpunkt wirksame, auf ein dort gedachtes infinitesimales Raumelement ortsbezogene Ursachengröße; sie ruft an dieser Stelle eine auf das nämliche Raumelement ortsbezogene Wirkungsgröße, die "Flußdichte" hervor.

Zwischen den beiden ortsbezogenen Feldgrößen gilt der Zusammenhang:

$$\text{Flußdichte} = \text{Feldstärke} \times \text{maßgebender spezifischer Leitwert des Feldraumes}$$

und zwar nach Größe und Richtung im Raum. Dabei kann der betreffende spezifische Leitwert eine echte Materialkonstante, er kann aber auch eine von der jeweiligen Flußdichte abhängige Größe sein.

Zwischen den integralen und den ortsbezogenen Feldgrößen bestehen die Zusammenhänge:

$$\text{Flußstärke} = \text{Flächenintegral über die Flußdichte}$$

$$\text{Flußantriebsgröße} = \text{Linienintegral über die Feldstärke.}$$

Bei inhomogenen, aber symmetrischen Feldern ermöglicht in der Regel erst ein rechnerischer Ansatz mit den ortsbezogenen Größen die Bestimmung der integralen Größen bzw. deren Zusammenhang untereinaner (siehe hierzu das nachfolgende Beispiel für ein inhomogenes symmetrisches Wärmefeld).

Rechenbeispiel

Zum Abschluß dieses einführenden Kapitels ein Rechenbeispiel für ein "Wärmefeld" (hierzu Bild 1.5):

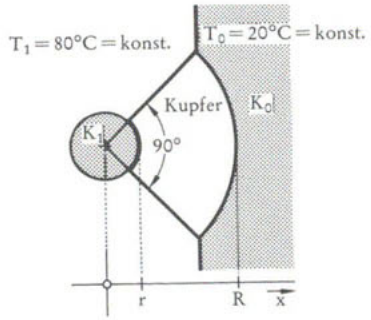

Bild 1.5:

Ein Warmwasserrohr (K_1) mit der konstanten Temperatur $T_1 = 80^oC$ (= 353 K) ist durch einen Rohrquadranten aus Kupfer mit einer Wand (K_0) verbunden, die ihrerseits auf der konstanten Temperatur $T_0 = 20^oC$ (= 293 K) gehalten wird.

Daten der Anordnung:
Innen- und Außendurchmesser des Kupferrohrquadranten: r = 13,5 mm, R = 50 mm; seine Länge l = 10 cm; spezifischer Wärmeleitwert von Kupfer: λ = 380 W/m · K = 3,8 W/cm · K (echte Materialkonst.).

Zu berechnen:
die Wärmeflußstärke ϕ,
die Wärmeflußdichte $D_{(r)}$ und $D_{(R)}$ an den Stellen x = r und x = R,
die Wärmefeldstärke $S_{(r)}$ und $S_{(R)}$ an denselben Stellen,
die Abstände x_1, x_2 etc. von der Rohrachse, in denen die Wärmeäquipotentialflächen für T = konst. in Temperaturschritten von je 10°C bzw. 10 K liegen.

Die sonstige Umgebung des Rohres und des kupfernen Wärmeleiters sei vereinfachend als ideal-nichtwärmeleitend - und daher die Verhältnisse im Wärmefeld nicht störend - anzusehen.

Lösung

Grundbeziehung zwischen den integralen Feldgrößen:

$$\phi = \Delta T \cdot G_w$$

$$\Delta T = T_1 - T_0 = 353\ K - 293\ K = 60\ K.$$

Der Wärmeleitwert G_w des Feldraumes kann hier nicht nach der Gleichung $G_w = \lambda \cdot A/s$ berechnet werden, da der Feldraumquerschnitt A nicht konstant ist. Daher muß man G_w nach der Definitionsgleichung

$$\text{(a)} \qquad G_w = \frac{\phi}{\Delta T}$$

auf dem Weg über die ortsbezogenen Feldgrößen ermitteln.

Die Symmetrie der Anordnung erlaubt es, über die Wärmeflußdichte zwei Aussagen zu machen:

1. $\vec{D}$ ist an jeder Stelle von der Rohrachse weg radial nach außen gerichtet;
2. für konstanten Abstand von der Rohrachse - also auf Zylindermantelflächen, soweit sie im Feldraum liegen - hat D ebenfalls konstante Größe.

Ausgangspunkt für die mathematische Formulierung der Ortsabhängigkeit von D in x-Richtung bildet die Grundtatsache, daß der Wärmefluß an jeder Querschnittstelle dieselbe Stärke hat, also an beliebig gewählter Stelle x ($r \leqslant x \leqslant R$) dieselbe wie an der Stelle r:

$$\phi = \text{konst.} = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = D_{(r)} \cdot 1 \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{4} = D_{(x)} \cdot 1 \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot x}{4}$$

$$D_{(x)} = D_{(r)} \cdot r \cdot \frac{1}{x} .$$

D nimmt hiernach in x-Richtung, ausgehend von einem Maximalwert $D_{(r)}$ an der Oberfläche des Körpers K_1 mit $1/x$ ab; siehe Bild 1.6. Da wegen $D = S \cdot \lambda$ sich Wärmefeldstärke und Wärmeflußdichte nur um den konstanten Faktor λ unterscheiden, hat S in x-Richtung denselben grundsätzlichen Verlauf:

$$S_{(x)} = \frac{D_{(r)}}{\lambda} \cdot r \cdot \frac{1}{x} = S_{(r)} \cdot r \cdot \frac{1}{x} \quad \left[\text{mit } S_{(r)} = \frac{D_{(r)}}{\lambda} \right].$$

Den Zähler in Gleichung (a) bestimmen wir unmittelbar für die Stelle x = r:

$$\phi = D_{(r)} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{4} \cdot 1 = D_{(r)} \cdot \frac{\pi \cdot r}{2} \cdot 1 .$$

Den zugehörigen Nenner erhalten wir aus dem Linienintegral über die Wärmefeldstärke:

$$\Delta T = \int_1^0 \vec{S} \cdot d\vec{s} = \int_r^R S_{(x)} \cdot dx = \int_r^R S_{(r)} \cdot r \cdot \frac{1}{x} \cdot dx =$$

$$\text{(b)} \qquad = S_{(r)} \cdot r \cdot \int_r^R \frac{1}{x} \cdot dx = S_{(r)} \cdot r \cdot \Big| \ln(x) \Big|_r^R = S_{(r)} \cdot r \cdot (\ln R - \ln r) =$$

$$= S_{(r)} \cdot r \cdot \ln \left(\frac{R}{r} \right) .$$

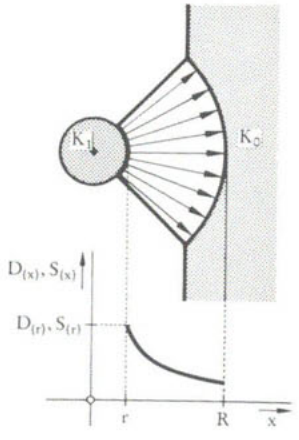

Bild 1.6:
Verlauf von Wärmeflußdichte und Wärmefeldstärke in Abhängigkeit von x. Man vergleiche die Größe von $D_{(x)}$ bzw. $S_{(x)}$ mit der Feldliniendichte an der betreffenden Stelle.

Damit ist der Wärmeleitwert G_W:

$$G_W = \frac{\phi}{\Delta T} = \frac{D_{(r)} \cdot \pi \cdot r \cdot 1/2}{S_{(r)} \cdot r \cdot \ln(R/r)} = \frac{D(r) \cdot \pi \cdot r \cdot 1/2}{(D_{(r)}/\lambda) \cdot r \cdot \ln(R/r)} =$$

$$= \frac{\pi \cdot 1 \cdot \lambda}{2 \cdot \ln(\frac{R}{r})} .$$

Mit den angegebenen Werten wird G_W:

$$G_W = \frac{3{,}14}{2} \cdot 10\,\text{cm} \cdot 3{,}8 \frac{W}{cm \cdot K} \cdot \frac{1}{1{,}32} \qquad \left[\ln(\frac{5\,cm}{1{,}35\,cm}) = \ln 3{,}7 = 1{,}32\right]$$

$$\underline{G_W = 45{,}2 \frac{W}{K}} .$$

Die Wärmeflußstärke ϕ ist:

$$\underline{\phi = \Delta T \cdot G_W = 60\ K \cdot 45{,}2 \frac{W}{K} = 2\,720\ W.}$$

Die Wärmeflußdichte D an den Stellen x = r und x = R:

$$\underline{D_{(r)} = \frac{\phi}{1 \cdot 2\pi r/4} = \frac{2{,}72 \cdot 10^3 W}{1{,}35\,cm \cdot 3{,}14 \cdot 5\,cm} = 128\,W/cm^2}$$

$$\underline{D_{(R)} = \frac{\phi}{1 \cdot 2\pi R/4} = D_{(r)} \cdot \frac{r}{R} = 128 \frac{W}{cm^2} \cdot \frac{1{,}35\,cm}{5\,cm} = 34{,}5\,W/cm^2.}$$

Die Wärmefeldstärke S an den Stellen x = r und x = R:

$$\underline{S_{(r)} = \frac{D_{(r)}}{\lambda} = 128 \frac{W}{cm^2} \cdot \frac{cm \cdot K}{3{,}8\,W} = 33{,}7 \frac{K}{cm}}$$

$$\underline{S_{(R)} = \frac{D_{(R)}}{\lambda} = 34{,}5 \frac{W}{cm^2} \cdot \frac{cm \cdot K}{3{,}8\,W} = 9{,}1 \frac{K}{cm}} .$$

Kontrollrechnung:

$$\Delta T = \int_r^R S_{(x)} \cdot dx = S_{(r)} \cdot r \cdot \ln(\frac{R}{r}) = \qquad \text{[nach Gl. (b)]}$$

$$= 33{,}7 \frac{K}{cm} \cdot 1{,}35\,cm \cdot 1{,}32 = 60\ K.$$

Berechnung der Abstände x_1, x_2 etc. der Äquipotentialflächen von der Rohrachse. Es gilt allgemein nach Gleichung (b):

$$\Delta T_{(r \to x)} = \int_r^x S_{(x)} \cdot dx = S_{(r)} \cdot r \cdot \ln(\frac{x}{r}).$$

Damit kann man ansetzen:

$$10\ \mathrm{K} = \int_{r}^{x_1} S_{(x)} \cdot dx = S_{(r)} \cdot r \cdot \ln\left(\frac{x_1}{r}\right)$$

$$\ln\left(\frac{x_1}{r}\right) = \frac{10\mathrm{K}}{S_{(r)} \cdot r} = \frac{10\ \mathrm{K} \cdot \mathrm{cm}}{33{,}7\ \mathrm{K} \cdot 1{,}35\ \mathrm{cm}} = \frac{10}{45{,}5} = 0{,}22$$

$$\frac{x_1}{r} = 1{,}246;\ \underline{x_1} = 1{,}246 \cdot r = 1{,}246 \cdot 1{,}35\,\mathrm{cm} = \underline{1{,}68\,\mathrm{cm}}.$$

Nach demselben prinzipiellen Ansatz erhält man:

$$20\ \mathrm{K} = \int_{r}^{x_2} S_{(x)} \cdot dx = S_{(r)} \cdot r \cdot \ln\left(\frac{x_2}{r}\right) \text{ etc.}$$

$x_2 = 2{,}09\,\mathrm{cm}$, $x_3 = 2{,}6\,\mathrm{cm}$, $x_4 = 3{,}25\,\mathrm{cm}$,

$x_5 = 4{,}05\,\mathrm{cm}$, $x_6 = 5\,\mathrm{cm} = R$. Siehe Bild 1.7.

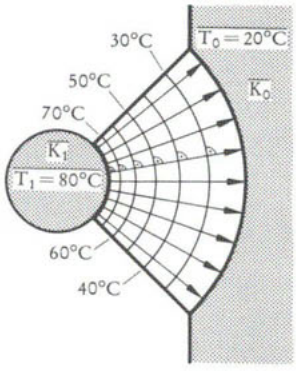

Bild 1.7:
Wärmeäquipotentialflächen im Wärmeleiter.
Wärmeäquipotentialflächen und Feldlinien schneiden sich stets unter rechtem Winkel.

(Anm.: In diesem wie auch in späteren Kapiteln ist bei der mathematischen Definition der ortsbezogenen Feldgrößen "Feldstärke" und "Flußdichte" eine Schreibweise verwendet, die zwar, da sie im Nenner eine Vektorgröße aufweist, nicht ganz korrekt ist, dennoch aber ihrer knappen Prägnanz halber wohl akzeptabel erscheint.)

2. Das elektrische Feld

Die Lehre vom elektrischen Feld geht von zwei fundamentalen Tatsachen aus, die man aufgrund vielfältiger Beobachtungen als gesichert ansehen kann. Die erste davon bildet den Schwerpunkt des nächsten Abschnittes und ihr wesentlicher Inhalt besagt, daß elektrische Ladungen elektrische Felder verursachen; die zweite wird in Kapitel 3 bei der Behandlung der "elektromagnetischen Induktion" genannt werden und führt uns zu der Erkenntnis, daß ein elektrisches Feld auch durch ein sich zeitlich oder örtlich änderndes Magnetfeld verursacht werden kann.

Auf diesen beiden Beobachtungstatsachen läßt sich das ganze Gebäude der elektrischen Feldlehre in einer logischen Aufeinanderfolge von Einzelschritten errichten.

2.1 *Die grundlegenden Beobachtungsbefunde*

Ausgangsbasis für die Behandlung des elektrischen Feldes - wie wir später sehen werden, sogar aller elektrischen und magnetischen Vorgänge überhaupt - ist die Beobachtung, daß eine elektrische Ladung von einem "elektrischen Feld" umgeben wird, dessen Wesensmerkmal es ist, auf eine andere Ladung, die sich in ihm befindet, eine bestimmte Kraft auszuüben. Genau besehen ist es eigentlich so, daß die von den beiden Ladungen ausgehenden elektrischen Felder unmittelbar aufeinander wirken und daß dadurch erst - weil elektrische Ladung und elektrisches Feld untrennbar miteinander verknüpft sind - die Kraftwirkung auf die Träger dieser Felder zustande kommt.

Zur Klarstellung der Verhältnisse seien hier einige elementare Fakten kurz in Erinnerung gebracht: Jegliche Materie ist aus Atomen aufgebaut, die sich ihrerseits wiederum aus den sogenannten Elementarteilchen zusammensetzen. Von den letzteren interessieren für die Vorgänge im elektrischen Feld nur die beiden Träger der positiven und der negativen elektrischen "Elementarladung", das Proton und das Elektron.

Die Einheit der elektrischen Ladung Q ist 1 Coulomb = 1 C = 1 Amperesekunde = 1 As*); ausgedrückt durch diese Einheit hat die elektrische Elementarladung Q_e die Größe $1\,Q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C$.

---

*) CHARLES AUGUSTE DE COULOMB (1736 - 1806), franz. Physiker und Ingenieur
ANDRE MARIE AMPÈRE (1775 - 1836), franz. Physiker.

Im Normalzustand enthält jedes Atom genausoviele Elektronen in seinen Umlaufschalen wie Protonen in seinem Kern. Die elektrischen Wirkungen all dieser Protonen und Elektronen kompensieren sich dabei nach außen hin so vollständig, daß die Materie in diesem Zustand als "elektrisch neutral" erscheint.

Eine elektrische Ladung mit Wirkung nach außen hin - und in diesem Sinn wollen wir in Zukunft den Begriff "Ladung" stets verstehen - erhält man nur dann, wenn man den obenerwähnten Gleichgewichtszustand zwischen positiven und negativen Ladungsträgern stört. Das läßt sich bekanntlich durch Reibung bewerkstelligen: bei der Reibung werden auf mechanischem Wege dem einen der aneinander geriebenen Stoffe Elektronen entzogen und vom anderen Stoff mitgenommen. In mehr oder minder starkem Maße kann man auf diese Weise alle festen Stoffe "elektrisieren", aber besonders eindrucksvoll zeigt sich der Effekt beispielsweise bei Glas, Gummi, Nylon oder Bernstein, jeweils etwa mit einem Wollelappen gerieben. Daß Bernstein, griechisch: elektron, durch Reiben in einen höchst bemerkenswerten Zustand gebracht wird, beobachtete man schon im klassischen Griechenland; von daher rührt ja der Name für die ganze "Elektrizität".

Der moderne Mensch verfügt selbstverständlich auch über andere, wesentlich leistungsfähigere Einrichtungen, um elektrische Ladungsträger zu trennen: jede elektrische Gleichspannungsquelle ist ein solches Hilfsmittel, denn an ihrem negativen Pol herrscht ein Übergewicht an Elektronen und an ihrem positiven Pol ein entsprechendes Übergewicht an Protonen.

Völlig unabhängig davon, wie die elektrische Ladung eines Körpers zustandegekommen ist, bemerkt man, daß sich der Raum um den geladenen Körper herum - oder kurz: um die Ladung herum - in einem anderen Zustand befindet als wenn die Ladung nicht vorhanden ist. Dieser Zustand, der sich dem Beobachter in früheren Jahrhunderten nur darin manifestierte, daß der geladene Körper kleine Partikelchen anzog, wird also ganz offensichtlich durch die elektrische Ladung verursacht und man nennt infolgedessen den Raum, soweit sich in ihm derartige Wirkungen feststellen lassen, ein "elektrisches Feld".

Erfreulicherweise ist man sogar in der Lage, die Struktur eines elektrischen Feldes sichtbar zu machen. Man braucht dazu beispielsweise nur ganz feines Kreidemehl vorsichtig in der Umgebung von elektrisch geladenen Körpern zu verstreuen: die einzelnen Partikelchen ordnen sich in ganz bestimmten Mustern an, nach denen man "Feldlinienbilder" der betreffenden elektrischen Felder zeichnen kann. Bild 2.1 zeigt typische Feldlinienverläufe für einige Anordnungen elektrisch geladener Körper.

Was diese Feldlinien zu bedeuten haben, ergibt sich aus einem weiteren Beobachtungsbefund. Bringt man nämlich in ein elektrisches Feld als Versuchs- oder "Probeladung" ein Elektron oder ein Proton, so zeigt sich, daß von dem elektrischen Feld eine Kraftwirkung ausgeht, die die jeweilige Probeladung