Wirtschaftsmathematik in Beispielen

Grundlagen – Finanzmathematik – Lineare Algebra – Lineare Optimierung – Analysis – Wahrscheinlichkeitsrechnung – Versicherungsmathematik

Von

Professor Dr. Horst Zehfuß

173 vollständig durchgerechnete Beispiele
mit 25 Bildern

2., erweiterte Auflage

R. Oldenbourg Verlag München Wien

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Zehfuss, Horst:
Wirtschaftsmathematik in Beispielen : Grundlagen – Finanzmathematik – lineare Algebra – lineare Optimierung – Analysis – Wahrscheinlichkeitsrechnung – Versicherungsmathematik / von Horst Zehfuss. – 2., erw. Aufl. – München ; Wien : Oldenbourg, 1987.
ISBN 3-486-20296-0

Gesamtherstellung: R. Oldenbourg Graphische Betriebe GmbH, München

ISBN 3-486-20296-0

INHALT

VORWORT [zur zweiten Auflage]

Die zweite Auflage wurde vor allem durch einen Abschnitt mit Beispielen aus der Versicherungsmathematik ergänzt. Die Beispiele sind aus Übungs- und Prüfungsaufgaben zu gleichnamigen Fach, das der Verfasser seit mehreren Jahren lehrt, hervorgegangen.

VORWORT [zur ersten Auflage]

Mathematische Methoden haben in viele Bereiche der Wirtschaftswissenschaften Eingang gefunden. Eine gründliche mathematische Ausbildung der Studierenden ist daher von großer Bedeutung. Diese kann erfahrungsgemäß nur durch das selbständige Lösen von Aufgaben erreicht werden. Die vorliegende Beispielsammlung soll dabei eine Hilfe sein.

Auswahl und Schwierigkeitsgrad der Beispiele orientieren sich an den Lehrinhalten, die für die Fachrichtung Betriebswirtschaft vorgesehen sind. Neben einigen Grundlagen werden die Stoffgebiete Finanzmathematik, lineare Algebra, lineare Optimierung, Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelt. Im Anhang sind einige Tabellen zur Finanzmathematik beigefügt.

Die Schreibweise der mathematischen zeichen erfolgt in Anlehnung an DIN 1302: Matrizen sind gemäß DIN 5486 geschrieben. Die Bezeichnungen in der Finanzmathematik sind nicht einheitlich. Wegen der hier verwendeten Symbolik wird auf den Anhang verwiesen.

1. GRUNDLAGEN

1.1 Mengen, Summen und Mittelwerte

1. Man gebe die Elemente folgender Mengen an:

a) Die Menge aller positiven ganzzahligen Teiler der Zahl 30.

$\mathbb{M} = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$.

b) Die Menge der Buchstaben des Wortes "WIRTSCHAFTSMATHEMATIK".

$\mathbb{M} = \{A; C; E; F; H; I; K; M; R; S; T; W\}$.

c) Die Menge aller Primzahlen unter 20.

$\mathbb{M} = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$.

d) Die Menge aller geraden Quadratzahlen unter 100.

$\mathbb{M} = \{0; 4; 16; 36; 64\}$.

2. Gegeben sind folgende Mengen:

$\mathbb{A} = \{4; 3; 2; 1\}$;

$\mathbb{B} = \{1; 3; 5; 6; 11\}$;

$\mathbb{C} = \{14; 5; 3; 8; 12\}$;

$\mathbb{D} = \{21; 17; 6; 5; 10\}$.

Man schreibe in aufzählender Form

a) $(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \cap \mathbb{C} = \{3; 5\}$;

b) $(\mathbb{B} \cap \mathbb{D}) \cup \mathbb{A} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$;

c) $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = \{5; 8; 12; 14\}$;

d) $(\mathbb{D} \cap \mathbb{C}) \setminus \mathbb{B} = \emptyset$.

3. Man prüfe für die Mengen aus Beispiel 2 nach:

a) $3 \in \mathbb{A} \cap \mathbb{C}$	richtig;
b) $7 \notin \mathbb{D} \setminus \mathbb{B}$	richtig;
c) $\mathbb{A} \subset (\mathbb{B} \cap \mathbb{C}) \cup \mathbb{D}$	falsch;
d) $(\mathbb{A} \setminus \mathbb{D}) \cap (\mathbb{B} \setminus \mathbb{C}) = \emptyset$	falsch.

4. Gegeben sind die Mengen:

$\mathbb{A} = \{3;\ 6;\ 10;\ 25\};$

$\mathbb{B} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge 25 < n^2 \leqslant 100\};$

$\mathbb{C} = \{n \mid n = 2m \wedge m \in \mathbb{N}\};$

$\mathbb{D} = \{x \mid x^2 - 6x + 8 = 0 \wedge x \in \mathbb{R}\};$

$\mathbb{E} = \{n \mid n \text{ ist positiver ganzzahliger Teiler der Zahl } 24\};$

$\mathbb{F} = \{n \mid 5 < n < 40 \wedge n \text{ ist Primzahl}\}.$

Man prüfe folgende Aussagen auf ihre Richtigkeit:

a) $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ falsch;

b) $-4 \in \mathbb{E}$ falsch;

c) $5 \notin \mathbb{B}$ richtig;

d) $\mathbb{D} \subset \mathbb{E}$ richtig;

e) $\mathbb{A} \cap \mathbb{F} = \emptyset$ richtig;

f) $\mathbb{B} \setminus \mathbb{E} = \{7;\ 9;\ 10\}$ richtig;

g) $\mathbb{C} \cup \{n \mid n = 2m + 1 \wedge m \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ falsch.

5. Für die Mengen in Beispiel 4 bestimme man:

a) $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{6,\ 10\};$

b) $\mathbb{D} \cap \mathbb{F} = \emptyset;$

c) $\mathbb{B} \cup \mathbb{D} = \{2;\ 4;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10\};$

d) $\mathbb{A} \cup \mathbb{F} = \{3;\ 6;\ 7;\ 10;\ 11;\ 13;\ 17;\ 19;\ 23;\ 25;\ 29;\ 31;\ 37\};$

e) $\mathbb{A} \setminus \mathbb{C} = \{3;\ 25\};$

f) $\mathbb{N} \setminus \mathbb{C} = \{n \mid n = 2m - 1 \wedge m \in \mathbb{N}\};$

g) $\mathbb{E} \setminus \mathbb{B} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 7;\ 9;\ 10;\ 24\};$

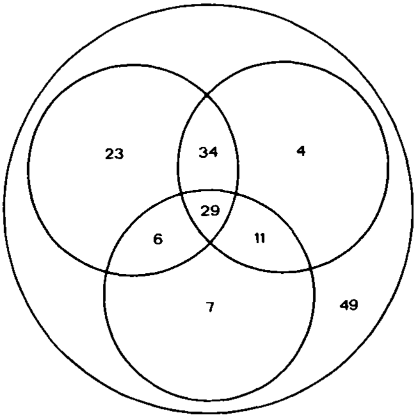
h) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D} = \{n \mid n = 2m + 4 \wedge m \in \mathbb{N}\};$

i) $\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(3;6);\ (3;7);\ (3;8);\ (3;9);\ (3;10);\ (6;6);\ (6;7);$
$(6;8);\ (6;9);\ (6;10);\ (10;6);\ (10;7);\ (10;8);$
$(10;9);\ (10;10);\ (25;6);\ (25;7);\ (25;8);\ (25;9);$
$(25;10)\}.$

6. Ein Autohändler hat in einem Jahr 163 Wagen eines Typs mit 3 verschiedenen Sonderausstattungen verkauft und zwar 63 Wagen mit Schiebedach und Radio, 35 Wagen mit Schiebedach und mit 4 Türen, 40 Wagen mit Radio und mit 4 Türen sowie 29 Wagen mit allen 3 Sonderausstattungen. Insgesamt wurden 92 Wagen mit Schiebedach, 78 mit Radio und 53 Wagen mit 4 Türen verkauft. Wieviele Wagen wurden ohne oder mit nur einer Sonderausstattung geliefert?

Aus dem nebenstehenden Mengendiagramm liest man ab:

49 Autos ohne Sonderausstattung;
23 Autos nur mit Schiebedach;
4 Autos nur mit Radio;
7 Autos nur mit 4 Türen.



7. Man berechne folgende Summen:

a) $$\sum_{k=0}^{7} (4k+7)^2 = \sum_{k=0}^{7} (16k^2 + 56k + 49)$$

$$= 16 \cdot \sum_{k=1}^{7} k^2 + 56 \cdot \sum_{k=1}^{7} k + 49 \cdot \sum_{k=0}^{7} 1$$

$$= 16 \cdot \frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{6} + 56 \cdot \frac{7 \cdot 8}{2} + 49 \cdot 8 = 4200;$$

b) $$\sum_{k=1}^{5} \frac{2k-1}{k^2+4} = \frac{1}{5} + \frac{3}{8} + \frac{5}{13} + \frac{7}{20} + \frac{9}{29} \approx 1{,}6200;$$

c) $$\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{1237}{720} \approx 1{,}7181;$$

d) $$\sum_{k=0}^{3} \frac{k+1}{k^2+1} = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{5} + \frac{4}{10} = 3.$$

8. Man schreibe mit Hilfe des Summenzeichens:

a) $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = \sum\limits_{k=4}^{11} k;$

b) $-3 - 1 + 1 + 3 + 5 + 7 = \sum\limits_{k=-1}^{4} (2k - 1);$

c) $4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{1024} = \sum\limits_{k=-2}^{10} \frac{1}{2^k};$

d) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \sum\limits_{k=1}^{8} \frac{(-1)^{k+1}}{k};$

e) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \ldots + \frac{21}{22} = \sum\limits_{k=2}^{21} \frac{k}{k+1}$

f) $-\frac{1}{9} + \frac{4}{16} - \frac{9}{25} + \frac{16}{36} - \ldots - \frac{81}{121} = \sum\limits_{k=1}^{9} \frac{(-1)^k \cdot k^2}{(k+2)^2}.$

9. Man berechne die Summe aller ganzen Zahlen von - 123 bis +456.

$$S = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{580}{2} \cdot (-123 + 456) = 290 \cdot 333 = 96570$$

oder

$$S = \binom{n}{1} \cdot a_1 + \binom{n}{2} \cdot d = \binom{580}{1} \cdot (-123) + \binom{580}{2} \cdot 1$$

$$= -580 \cdot 123 + \frac{580 \cdot 579}{2} = 96570.$$

Wenn man beachtet, daß die Summe aller ganzen Zahlen von -123 bis +123 den Wert Null hat, erhält man das Ergebnis auch durch

$$S = \frac{333}{2} \cdot (124 + 456) = 96570.$$

10. Man bestimme die Summe der ersten 111 ungeraden Zahlen:

$$S = \binom{111}{1} \cdot 1 + \binom{111}{2} \cdot 2$$

$$= 111 + \frac{111 \cdot 110}{2} \cdot 2 = 111^2 = 12321.$$

11. Eine arithmetische Reihe mit 14 Gliedern hat die Summe 777.
Mit Hilfe des Quotienten $\frac{a_9}{a_2} = \frac{9}{4}$ bestimme man das Anfangsglied.
Aus der Summenformel

$S = na_1 + \binom{n}{2} \cdot d$ erhält man

$$14\, a_1 + \frac{14 \cdot 13}{2} d = 777$$

$$2\, a_1 + 13\, d = 111.$$

Wegen $a_2 = a_1 + d$ und $a_9 = a_1 + 8d$

gilt $4\, a_1 + 32\, d = 9\, a_1 + 9\, d$ bzw. $23\, d = 5\, a_1$.

Einsetzen ergibt

$2 \cdot a_1 + 13 \cdot \frac{5}{23} \cdot a_1 = 111$ und daraus $a_1 = 23$.

12. Gegeben sind das erste Glied $a_1 = 3$ und das letzte Glied $a_6 = 96$ einer geometrischen Reihe. Man bestimme die Summe der Reihe:

Wegen $a_6 = a_1 \cdot q^5$ folgt $q^5 = 32$, d.h. $q = 2$.

Also wird

$$S = 3 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 189.$$

13. Gegeben seien das Anfangsglied $a_1 = 7$ und das Endglied $a_5 = 567$ einer Folge mit positiven Gliedern. Man bestimme die übrigen Glieder der Folge, so daß
a) eine arithmetische und
b) eine geometrische Folge entsteht.

a) Wegen $d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{567 - 7}{4} = 140$

lauten die Glieder der arithmetischen Folge 7, 147, 287, 427, 567;

b) Aus $q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[4]{\frac{567}{7}} = 3$

folgt die geometrische Folge 7, 21, 63, 189, 567.

14. Man gebe eine Formel für die Summe $S = \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot a^k$ mit $a \neq 1$ an.

Ausführlich lautet die Summe

$$
\begin{array}{rl}
S = & a + 2 \cdot a^2 + 3 \cdot a^3 + \ldots + (n-1) \cdot a^{n-1} \\
= & a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1} \\
 & + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1} \\
 & + a^3 + \ldots + a^{n-1} \\
 & \vdots \\
 & + a^{n-2} + a^{n-1} \\
 & + a^{n-1}
\end{array}
$$

Dann erhält man

$$
\begin{aligned}
S = {} & a \cdot \frac{1 - a^{n-1}}{1 - a} \\
& + a^2 \cdot \frac{1 - a^{n-2}}{1 - a} \\
& + a^3 \cdot \frac{1 - a^{n-3}}{1 - a} \\
& \vdots \\
& + a^{n-1} \cdot \frac{1 - a}{1 - a} \\
= {} & \frac{1}{1 - a} [a - a^n + a^2 - a^n + a^3 - a^n + \ldots + a^{n-1} - a^n] \\
= {} & \frac{1}{1 - a} [a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1} - (n - 1) \cdot a^n] \\
= {} & \frac{1}{1 - a} [a \frac{1 - a^{n-1}}{1 - a} - (n - 1) \cdot a^n] \\
= {} & \frac{1}{(1-a)^2} [a - a^n - (n - 1) \cdot a^n + (n - 1) \cdot a^{n+1}] \\
= {} & \frac{1}{(1 - a)^2} [a - na^n + na^{n+1} - a^{n+1}]
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{(1-a)^2}\left[a \cdot (1 - a^n) - na^n \cdot (1 - a)\right]$$

und somit $\sum_{k=1}^{n-1} k \cdot a^k = a \cdot \frac{1 - a^n}{(1 - a)^2} - n \cdot \frac{a^n}{1 - a}$.

15. Gegeben ist die Zahlenfolge 1,37; 1,42; 0,95; 1,83; 1,65; 1,04. Man bestimme das arithmetische Mittel m_a, das geometrische Mittel m_g, das harmonische Mittel m_h und das quadratische Mittel m_q.

$$m_a = \frac{1}{6}(1{,}37 + 1{,}42 + 0{,}95 + 1{,}83 + 1{,}65 + 1{,}04) \approx 1{,}38;$$

$$m_g = \sqrt[6]{1{,}37 \cdot 1{,}42 \cdot 0{,}95 \cdot 1{,}83 \cdot 1{,}65 \cdot 1{,}04} \approx 1{,}34;$$

$$m_h = \frac{6}{\frac{1}{1{,}37} + \frac{1}{1{,}42} + \frac{1}{0{,}95} + \frac{1}{1{,}83} + \frac{1}{1{,}65} + \frac{1}{1{,}04}} \approx 1{,}30;$$

$$mq = \sqrt{\frac{1}{6}(1{,}37^2 + 1{,}42^2 + 0{,}95^2 + 1{,}83^2 + 1{,}65^2 + 1{,}04^2)} \approx 1{,}41.$$

16. Ein Händler führt von einem Artikel 2 verschiedene Fabrikate. Fabrikat A hat einen Preis von 12,50 DM pro Stück und wird etwa doppelt sooft gekauft wie Fabrikat B, das 13,70 DM pro Stück kostet. Zu welchem einheitlichen Mischpreis müßte der Händler beide Fabrikate verkaufen, wenn er den gleichen Erlös erzielen will?

$$p = \frac{2 \cdot 12{,}50 + 1 \cdot 13{,}70}{3} = 12{,}90 \text{ DM pro Stück.}$$

17. Ein Unternehmen hat folgende Monatsumsätze in Mill. DM ermittelt:

Jan	Feb	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug	Sept	Okt	Nov	Dez
1,13	1,28	1,07	1,09	1,16	1,41	1,73	1,04	1,23	1,14	0,94	0,87

Man bestimme den mittleren Umsatz.

$$U_m = \frac{1}{12}(1{,}13 + 1{,}28 + 1{,}07 + 1{,}09 + 1{,}16 + 1{,}41 + 1{,}73 + 1{,}04 +$$
$$1{,}23 + 1{,}14 + 0{,}94 + 0{,}87) = \frac{14{,}09}{12} \approx 1{,}17.$$

Der mittlere Umsatz beträgt demnach 1,17 Mill. DM.