Induktive Statistik

Von
Dr. Peter v. d. Lippe
Professor für Statistik

6., überarbeitete Auflage

R. Oldenbourg Verlag München Wien

In die neukonzipierte „Statistik“ in zwei Bänden
(„Induktive Statistik“, „Deskriptive Statistik“)
ist das Werk „Klausurtraining Statistik, 1.-4. Auflage“ aufgegangen.
Deshalb wurde die Auflagenzählung fortgeführt.

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

© 2004 Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH
Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
www.oldenbourg-verlag.de

Das Werk einschließlich aller Abbildungen ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen.

Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Gesamtherstellung: Druckhaus „Thomas Müntzer“ GmbH, Bad Langensalza

ISBN 3-486-20009-7

Vorwort zur 6. Auflage

Dieses Buch ist gedacht als Begleittext zu Vorlesungen und Übungen im Grundstudium sowie zur Klausurvorbereitung. Es umfaßt den Stoff, der üblicherweise unter dem Titel "Induktive Statistik" oder "Statistik II" an den meisten Hochschulen für Wirtschaftswissenschaftler angeboten wird, geht jedoch im Formelsammlungsteil in einigen Punkten wohl erheblich darüber hinaus, so daß es in diesem Bereich auch zum Nachschlagen für das Hauptstudium benutzt werden kann.

Das Buch ist jedoch kein Ersatz für die entsprechenden Lehrveranstaltungen und enthält auch nicht die für ein Lehrbuch üblichen ausführlichen Erklärungen zu den Formeln. Andererseits sind in ihm sehr viel mehr Aufgaben enthalten, die (hoffentlich) geeignet sind zum Üben und zur Demonstration von Zusammenhängen. Die Erfahrung hat gezeigt, daß man Statistik weder durch ein Philosophieren über Begriffe (oder ein Auswendiglernen derselben) noch durch Erlernen von Rechengängen lernt. Es kommt hinzu, daß in der Regel ein Unterschied besteht zwischen Übungsaufgaben, die man lösen kann, wenn man in der Lehrveranstaltung an der entsprechenden Stelle angekommen ist, und Klausuraufgaben, bei denen der gesamte Stoff erwartet wird und auch "querbeet" gefragt werden kann. Es ist außerdem wichtig, systematisch Zusammenhänge zu erkennen, weil man sich sonst durch eine evtl. nur geringfügig modifizierte Aufgabe gleich wieder vor ein völlig neues Problem gestellt sieht.

Aus diesem Grunde umfaßt das Buch **vier Teile**:

1. eine reichhaltige (wie gesagt z.T. über das Grundstudium hinausgehende) **Formelsammlung**, in der auf Übersichten viel Wert gelegt wurde, um einen Überblick über Konzepte und deren Zusammenhänge zu gewinnen,
2. **Übungsaufgaben**, die jeweils die entsprechenden Abschnitte des Formelteils betreffen,
3. einige sehr viel komplexere **Klausuraufgaben**, die (mitsamt den entsprechenden Zeichnungen) dem ebenfalls im Oldenbourg Verlag erschienenen Buch des Verfassers "Klausurtraining in Statistik" entnommen worden sind (dieses Buch soll somit nicht weiter fortgeführt werden), und
4. effektiv in letzter Zeit an der Universität Duisburg-Essen, Campus Essen von uns gestellte **Klausuren**, weil wir erfahrungsgemäß von Studenten immer wieder nach solchen Klausuren gefragt werden (es ist ja auch interessant zu sehen, wie mit Klausuren versucht wird, möglichst alle Gebiete abzudecken und wie im Endeffekt die Mischung der Aufgaben aussieht).

Die vorliegende sechste Auflage ist inhaltlich identisch mit der fünften Auflage. Allerdings haben wir uns bemüht dort noch vorhandene Tipp- und sonstige Fehler zu korrigieren. Dafür danke ich meinen Mitarbeitern Herrn Dr. Andreas Kladroba und Herrn Dipl.-Volksw. Michael Westermann, die mich dabei sehr unterstützt haben. Mein besonderer Dank gilt Herrn stud. rer. pol. Joachim Koopsingraven, der mit großem Eifer und Engagement die entsprechenden Korrekturen am PC vorgenommen hat.

Schließlich danke ich Herrn Martin Weigert vom Oldenbourg Verlag für die gewohnt angenehme und fruchtbare Zusammenarbeit. Ein dem gleichen Konzept entsprechendes Buch "Deskriptive Statistik" ist ebenfalls im Oldenbourg Verlag erschienen.

Peter von der Lippe

Gliederung:

Teil I: Formelsammlung mit Tabellenanhang

Teil II: Aufgabensammlung

Lösungen

Teil III: Klausurtraining

Lösungen

Teil IV: Musterklausuren

Lösungen

Teil I

Formelsammlung
mit
Tabellenanhang

Gliederung von Teil I

Kap.1: Einführung, Stichprobenraum

Kap.2: Kombinatorik

Kap.3: Ereignisalgebra, Wahrscheinlichkeit

Kap.4: Zufallsvariablen, Wahrscheinlichkeitsverteilung

Kap.5: Spezielle diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Kap.6: Spezielle stetige Verteilungen

Kap.7: Grenzwertsätze, Stichprobenverteilung

Kap.8: Schätztheorie

Kap.9: Testtheorie

Kap.10: Stichprobentheorie

Tabellenanhang

Kapitel 1: Einführung

Wahrscheinlichkeitsaussagen beziehen sich auf Zufallsexperimente (ZE), und zwar (gerade wegen der Zufälligkeit) nicht auf den Ausgang eines einzelnen ZE, sondern auf die (zumindest gedanklich) unendliche Folge von Wiederholungen (Realisationen) des ZE unter einem
- unveränderlichen
- exakt beschriebenen

Bedingungskomplex.

Def. 1.1: Zufallsexperiment (ZE)

Ein Zufallsexperiment liegt vor, wenn
1. es wohldefinierte Ereignisse als Ergebnis des ZE gibt
2. das ZE unter denselben Bedingungen unabhängig beliebig oft wiederholbar ist
3. das Ereignis (der Versuchsausgang) im Einzelfall
   a) nicht voraussagbar ist
   b) nicht willkürlich (systematisch) zu beeinflussen ist
4. es wohl aber bei einer Vielzahl von Wiederholungen des ZE gewisse Regelmäßigkeiten gibt.

Def. 1.2: Stichprobenraum

a) Ein Stichprobenraum Ω ist die Menge aller möglichen, sich gegenseitig ausschließender Elementarereignisse $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\} \quad \text{bzw.} \quad \{\omega, \omega \in \Omega\}$$

Im folgenden wird von endlichen Stichprobenräumen mit gleichwahrscheinlichen Elementarereignissen (Laplace-Annahme) ausgegangen.

b) Es sind Elementarereignisse und zusammengesetzte Ereignisse (Def. 3.1) zu unterscheiden.

Kapitel 2: Kombinatorik

1. Grundaufgaben der Kombinatorik	6
2. Binomialkoeffizienten und Multinomialkoeffizienten	8
3. Ergänzungen und Vertiefungen zum Auswahlproblem: Inklusion und Exklusion	13
4. Die Gamma- und die Beta-Funktion	14

Gegenstand der Kombinatorik sind enumerative Probleme, Fragen im Zusammenhang mit endlichen Mengen. Es geht um die Anzahl der Arten, wie eine wohldefinierte Operation (z.B. Auswahl oder Anordnung von Objekten) ausgeführt werden kann.

1. Grundaufgaben der Kombinatorik

Fragestellungen

1. Anordnung von n Elementen (**Permutation**) oder Auswahl von $i \leq n$ Elementen (die Elemente seien a, b, c, ...)

2. Es ist zu unterscheiden:
   a) mit Berücksichtigung der Anordnung (**Variation**): {a,b} und {b,a} sind verschieden
   b) ohne Berücksichtigung der Anordnung (**Kombination**): {a,b} und {b,a} sind gleich

3. Wiederholungen. Dabei bedeutet:
   a) **ohne Wiederholung** (**oW**): Elemente a, b und c treten nur einmal auf
   b) **mit Wiederholung** (**mW**): Es kann auch {a,a}, {a,b,b}, {b,b,b}, ... auftreten

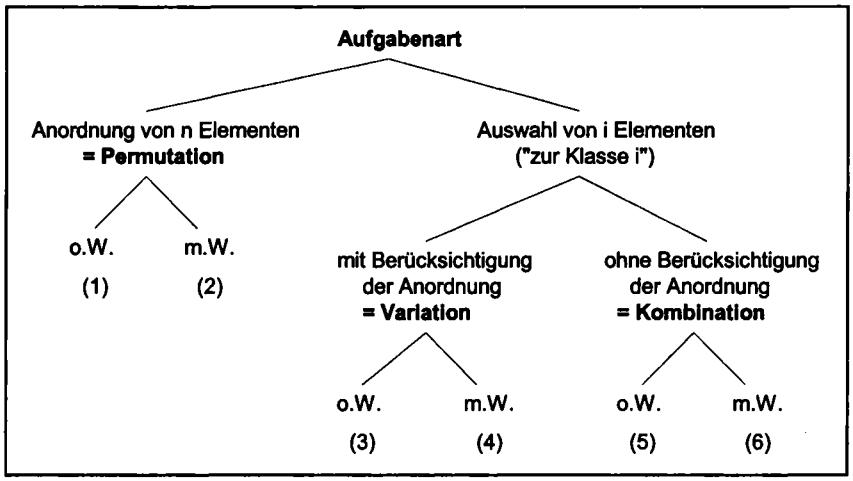
Diese Kriterien werden kombiniert zu sechs Grundaufgaben (vgl. Übersicht 2.1).

Anwendungen in der Stichprobentheorie:

a) Die Anzahl der Stichproben beim Ziehen **ohne Zurücklegen** ist K. Dabei sind die K Stichproben gleich wahrscheinlich.
b) Die Anzahl verschiedener Stichproben **mit Zurücklegen** ist K_W, davon sind aber nicht alle gleich wahrscheinlich. Durch das Zurücklegen ist die Urne praktisch unendlich, so daß auch $i > n$ (i [sonst n] Umfang der Stichprobe; n [sonst N] Umfang der Grundgesamtheit).

Übersicht 2.1: Die sechs Grundaufgaben der Kombinatorik

a) Fallunterscheidungen



b) Formeln für die Anzahl

(2.1) Anzahl der Permutationen ohne Wiederholung von n Elementen	$P = n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
(2.2) Anzahl der Permutationen mit Wiederholung von n Elementen, wobei das k-te Element n_k mal auftritt	$P_W = \frac{n!}{\prod_{k=1}^{m} n_k!}$ mit $\sum_{k=1}^{m} n_k = n$
(2.3) Anzahl der Variationen ohne Wiederholung (V) von n Elementen zur i-ten Klasse	$V = \frac{n!}{(n-i)!} = i! \binom{n}{i}$
(2.4) Anzahl der Variationen mit Wiederholung (V_W) zur i-ten Klasse	$V_W = n^i$
(2.5) Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung (K)	$K = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$
(2.6) Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung (K_W)	$K_W = \binom{n+i-1}{i}$

Bemerkungen:

zu (1): Stirlingsche Formel:

Für großes n gilt: $n! \approx n^n \frac{1}{e^n} \sqrt{2\pi n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} = \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}\, e^{-n}$.

zu (3), (5) u. (6): $\binom{n}{i}$ ist der Binomialkoeffizient ("n über i") als Spezialfall des Multinomialkoeffizienten (Formel für P_W). Ist $m = 2$, $n_1 = i$ und $n_2 = n - i$, so ist

$$\frac{n!}{\prod n_k!} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} = \binom{n}{i}.$$

Die Zweiteilung der Elemente kann z.B. bedeuten: $n_1 = i$ Elemente gelangen in die Auswahl $n_2 = n - i$ gelangen nicht in die Auswahl. Weitere Bemerkungen zum Binomialkoeffizienten vgl. Abschnitt 2.

zu (4): Hierbei kann jedes Element bis zu i-mal wiederholt werden (i kann auch größer als n sein).

Zusammenhänge der Formeln untereinander:

$P_W \to P$ wenn für alle $k = 1,\ldots, m$ gilt $n_k = 1$, folgt $P_W = P$

$V \to P$ wenn $i = n$ gilt (also keine Auswahl), folgt $V = P$ (Permutation ohne Wiederholung als Spezialfall der Variation ohne Wiederholung)

$P_W \to K$ wenn $n_1 = i$ und $n_2 = n - i$, folgt $P_W = K$ (siehe oben; vgl. auch Gl. 2.15)

$V \to K$ da jedes Element auf i! Arten permutiert werden kann, gilt (2.3a): $V = i!\,K$

$K \to K_W$ Herleitung der Kombinationen ohne Wiederholung aus dem Additionstheorem für Binomialkoeffizienten (Satz 2.1). Im trivialen Fall i=1 (keine Wiederholungen möglich) ist

$$K_W = K = \binom{n}{1} = n$$

$P_W \to V_W$ Variationen mit Wiederholung als Summe aller möglichen Permutationen mit Wiederholung (Satz 2.2)

2. Binomialkoeffizienten und Multinomialkoeffizienten

Def. 2.1: Binomialkoeffizient

Der Ausdruck

(2.5) $$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!\,i!}$$

mit $n, i \in \mathbb{N}$, $0 \le i \le n$ heißt **Binomialkoeffizient**.

Def. 2.2: Multinomialkoeffizient

Der Ausdruck

(2.6) $$\binom{n}{n_1\ n_2\ \dots\ n_m} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_m!} = \frac{n!}{\prod_{k=1}^{m} n_k!}\ ,\quad \sum_{k=1}^{m} n_k = n$$

heißt **Multinomialkoeffizient** (Polynomialkoeffizient).

Eigenschaften des Binomialkoeffizienten und des Multinomialkoeffizienten

1. Name und Folgerung aus der Definition

a) Die Entwicklung des Binoms $(a+b)^n$ führt zu folgender Summe:

$$b^n + nab^{n-1} + \dots + \binom{n}{i}a^i b^{n-1} + \dots + na^{n-1}b + a^n$$

$$= \binom{n}{0}a^0b^n + \binom{n}{1}a^1b^{n-1} + \dots + \binom{n}{i}a^ib^{n-i} + \dots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b + \binom{n}{n}a^nb^0$$

Setzt man a=b=1, so folgt leicht der bekannte Zusammenhang über die Summe von Binomialkoeffizienten von Gleichung 2.9.

Entsprechend erscheint der Multinomialkoeffizient in der Expansion eines Multinoms, etwa (m = 3)

$$(a+b+c)^n = \sum_{(n_1,n_2,n_3)} \binom{n}{n_1\ \ n_2\ \ n_3} a^{n_1}b^{n_2}c^{n_3}\ ,\ \text{mit } n = n_1 + n_2 + n_3 .$$

b) Nach Definition gilt $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n}{1} = n$.

c) Symmetrie $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$.

2. Binomialkoeffizient als Summe und Produktsumme von Binomialkoeffizienten

(2.7a) $$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}$$ (Pascalsches Dreieck)

(2.7b) $$\sum_{i=0}^{n-m}\binom{m+i}{m}=\binom{n+1}{m+1}$$

Folgerung:

(2.7c) $$\binom{n}{i}=\sum_{k=0}^{n-i}\binom{i-1+k}{i-1}$$

(2.7d) $$\sum_{i=0}^{n}\binom{m}{k-i}\binom{n}{i}=\binom{m+n}{k}$$

Satz 2.1 Additionstheorem für Binomialkoeffizienten

Aus Gleichung 2.7d folgt*:

(2.8) $$\boxed{\binom{n+i-1}{i}=\sum_{k=0}^{i-1}\binom{n}{i-k}\binom{i-1}{k}}$$

Aus dieser Formel folgt auch der Zusammenhang zwischen Kombinationen mit und ohne Wiederholung:

$$\binom{n+i-1}{i}=\binom{n}{i}+\sum_{k=1}^{i-1}\binom{n}{i-k}\binom{i-1}{k}.$$

Der zweite Summand gibt an, um wieviel sich die Anzahl der Kombinationen erhöht, durch die Wiederholung von k = 1, 2, ... der i - k ausgewählten Elemente, um zur Zahl der Kombinationen mit Wiederholung zu gelangen.

Folgerung aus Gleichung 2.8:

(2.8a) $$\binom{n}{i}=\sum_{k=0}^{i-1}\binom{n-(i-1)}{i-k}\binom{i-1}{k}.$$

Dieser Zusammenhang erklärt die Reproduktivität der Binomialverteilung. Aus einer Urne von n Kugeln i auszuwählen läuft auf das gleiche hinaus, wie aus zwei Urnen mit n - (i - 1) und i - 1 Kugeln so viele Kugeln herauszunehmen, daß es zusammen i Kugeln sind.

* Man erhält Gleichung 2.8 aus 2.7d, wenn man den Symbolen k, n, m und i in Gleichung 2.7c die Symbole i, i-1, n und k zuordnet. Aus Gleichung 2.8 folgt übrigens auch Gleichung 2.9a.

3. Summe von Binomialkoeffizienten

a) Variables i, also i = 0, 1, ... , n,

(2.9) $\sum_i \binom{n}{i} = 2^n$ und $\sum_i (-1)^i \binom{n}{i} = 0$ (2.9a) $\sum_i^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$

(2.10) $\sum_i \binom{n}{i} i = 2^{n-1} n$ (2.10a) $\sum_i \binom{n}{i} i^2 = 2^{n-2} n(n+1)$

(2.11) $\sum_{i=0}^{m} \binom{n}{i}\binom{n-i}{m-i} = 2^m \binom{n}{m}$ $, m \le n$

b) Variables n (k läuft bis n), konstantes i

Summe der natürlichen Zahlen

(2.11a) $\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Das folgt auch aus Gleichung 2.7b mit m = 1.

(2.12a) $\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$ (2.13) $\sum_{k=3}^{n} \binom{k}{3} = \binom{n+1}{4}$ usw.

Die allgemeinen Zusammenhänge beschreiben die folgenden Formeln:

(2.13a) $\sum_{i=0}^{r} \binom{n+i}{n} = \binom{n+r+1}{n+1}$ und (2.13b) $\sum_{i=0}^{r} \binom{n+i}{i} = \binom{n+r+1}{r}$

4. Multinomialkoeffizient als Produkt von Binomialkoeffizienten

$$\boxed{(2.14)\ \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_k!} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdot\ldots\cdot\binom{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}{n_k}}$$

Spezialfall der Permutationen ohne Wiederholungen $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 1$:

(2.14a) $\binom{n}{1}\binom{n-1}{1}\binom{n-2}{1}\cdot\ldots\cdot\binom{1}{1} = n!$

Spezialfall Kombinationen: $\binom{n}{i} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{n-i}$

Permutationen mit Wiederholungen kann man als wiederholte Kombinationen auffassen: Aus n Elementen werden n_1 ausgewählt, aus den verbleibenden Elementen wieder n_2 usw.

5. Rekursionsformeln für Binomialkoeffizienten

(2.15) $\binom{n}{i} = \frac{n-i+1}{i}\binom{n}{i-1}$ (2.15a) $\binom{n}{i} = \frac{n}{n-i}\binom{n-1}{i}$

(2.15b) $\binom{n}{i} = \frac{n}{i}\binom{n-1}{i-1} = \frac{n}{i}\,\frac{n-1}{i-1}\binom{n-2}{i-2}$ usw..

Folgerung: Aus Gleichung 2.15 folgt, daß bei gegebenem ungeradzahligem n die Binomialkoeffizienten von $i = 0$ bis $i = (n-1)/2$ ansteigen und von $i = (n+1)/2$ an bis $i = n$ abfallen (bei geradzahligem n ist das Maximum $i = n/2$).

Aus Gleichung 2.15a und 2.15b folgt leicht der als Pascalsches Dreieck bekannte Zusammenhang der Gleichung 2.7a bzw. (gleichbedeutend):

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}.$$

6. Binomialkoeffizienten mit negativen Elementen

Nach Definition gilt:

(2.16) $\binom{-n}{i} = (-1)^i\binom{n+i-1}{i}$ und (2.16a) $\binom{-n}{-i} = (-1)^{n+i}\binom{i-1}{n-1}$.

7. Summe von Multinomialkoeffizienten

Man kann Variationen mit Wiederholungen als Summe von Permutationen mit Wiederholungen auffassen wegen:

Satz 2.2: Additionstheorem für Multinomialkoeffizienten

(2.17) $$n^i = \sum_{a_1, a_2, \ldots} \binom{i}{a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n},$$

wobei summiert wird über alle n-Tupel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mit $\sum_{k=1}^{n} a_k = i$. Mit 2-Tupeln, also $a_1 = j$, $a_2 = n - j$, ergibt sich $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} = 2^n$, also Gl. 2.9 als Spezialfall.

8. Rekursive Beziehungen zwischen Kombinationen mit Wiederholung

Satz 2.3: Additionstheorem für Kombinationen mit Wiederholung

Verabredet man $K_W(n,i)$ für die Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung zur Klasse i, so gilt:

$$\boxed{(2.18) \qquad K_w(n,i) = K_w(n,i-1) + K_w(n-1,i)}$$

Diese Rekursionsformel ist auch Ausgangspunkt für den Beweis von Gl. 2.6.

Ersetzt man in Gleichung 2.18 den Ausdruck $K_w(n-1,i)$ durch $K_w(n-1,i-1) + K_w(n-2,i)$, hierbei wieder $K_W(n-2,i)$ usw., so erhält man:

$$(2.19) \qquad K_w(n,i) = \sum_{m=1}^{n} K_w(m,i-1) \ ,$$

was sich übrigens auch aus Gleichung 2.13a ergibt.

3. Ergänzungen und Vertiefungen zum Auswahlproblem: Inklusion und Exklusion

a) Zum Permutationsbegriff

Def. 2.3: Zirkuläre Permutationen

Die Anzahl P_z der zirkulären Permutationen von n Elementen ist die Anzahl der Möglichkeiten, n Elemente im Kreis anzuordnen. Sie beträgt:

$$(2.20) \quad P_z(n) = (n-1)!$$

Da wegen der kreisförmigen Anordnung der erste und der n-te Platz identisch sind, werden faktisch nur n - 1 Elemente permutiert.

Def. 2.4: Fixpunktfreie Permutationen

Geht man von einer Sitzordnung von $n \geq 2$ Stühlen und n Personen aus, so kann man nach der Anzahl $P_F(n)$ der "neuen" Sitzordnungen fragen, bei denen keine Person auf ihrem alten Platz bleibt. Sie beträgt:

$$(2.21) \qquad P_F(n) = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) = n!\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}$$

wobei die Summe den Anfang der Potenzreihenentwicklung von e^{-1} darstellt. Man spricht auch vom Rencontre Problem und nennt die Zahlen $P_F(n)$ auch Rencontre Zahlen, für die die folgende Rekursionsformel gilt:

$$(2.21a) \qquad P_F(n) = nP_F(n-1) + (-1)^n$$

b) Zum Auswahlproblem: Inklusion und Exklusion

Für ein Auswahlproblem aus n Elementen kann sich auch die Aufgabe stellen, daß die Auswahl so getroffen werden sollte, daß bei $p < n$ der n Elemente mit
- keinem der p Elemente **(Exklusion)**
- genau p Elementen **(Inklusion)**

kombiniert bzw. variiert wird.

Die hierzu relevanten Formeln sind in Übersicht 2.2 zusammengestellt. Die **Exklusion** von p vorgeschriebenen Elementen läuft darauf hinaus, einfach p Elemente weniger für eine Auswahl zur Verfügung zu stellen. Sie stellt also eine **Reduktion der Auswahlgesamtheit** dar. Inklusion bedeutet ebenfalls, diese Elemente von einer Auswahl auszuschließen und statt i nur noch i - p Elemente frei zu kombinieren bzw. zu variieren. Man reserviert einfach p Plätze in der Auswahlgesamtheit und in der Auswahl selbst und fragt nach den Variations- und Kombinationsmöglichkeiten der übrigen Elemente. **Inklusion** stellt also eine **Reduktion der Auswahlgesamtheit und der Auswahl** dar . Die Differenz zwischen der allgemeinen Formel (etwa Gl. 2.5 bei Kombination ohne Wiederholungen) und der entsprechenden Formel für die Exklusion von p Elementen

$$\binom{n}{i} - \binom{n-p}{i} \quad \text{bzw. im Spezialfall } p = 1: \quad \binom{n}{i} - \binom{n-1}{i} = \binom{n-1}{i-1} \quad \text{Gleichung 2.7a}$$

ist die Anzahl der Kombinationen **ohne** Wiederholungen mit mindestens einem bzw. genau einem (wenn p=1) von p vorgeschriebenen Elementen (Inklusion von mindestens einem Element = keine Exklusion von allen Elementen). Bei p=1 ist die allgemeine Formel für Kombinationen die Summe der Exklusions- und Inklusionsformel (Übersicht 2.2).

Übersicht 2.2

	Exklusion	Inklusion
Kombinationen ohne Wiederholung	(2.22) $\binom{n-p}{i}$	(2.23) $\binom{n-p}{i-p}$
Kombinationen mit Wiederholung	(2.24) $\binom{n+i-p-1}{i}$	(2.25) $\binom{n+i-p-1}{i-p}$
Variationen ohne Wiederholung	(2.22) $i!\binom{n-p}{i}$	(2.23) $i!\binom{n-p}{i-p}$
Variationen mit Wiederholung	(2.24) $(n-p)^i$	(2.25) $(n-p)^{(i-p)^{*)}}$

*) Nur wenn $n > p$ und $i > p$, sonst keine allgemeine Formel möglich, da i nicht beschränkt ist.

4. Die Gamma- und die Beta-Funktion

Def. 2.5: Gammafunktion

Die Funktion

$$(2.30) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \qquad 0 < \alpha, \ 0 \le x \le \infty$$

heißt Gamma-Funktion.

Folgerungen:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\Gamma(1)=1,\ \Gamma(2)=1,\ \Gamma(3)=2\Gamma(2)=2!$$

$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)=(n-1)!$$

$$\Gamma(n+z)=\frac{(n+z-1)!}{(n-1)!}\Gamma(n) \qquad \text{(z und n ganzzahlig)}$$

Def. 2. 6: Betafunktion

Die Funktion

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx\,, \quad \alpha,\ \beta > 0,\ 0\le x\le 1$$

heißt Beta-Funktion.

Bemerkungen zu Def. 2.5 und 2.6:

1. Die Gamma- und die Beta-**Funktionen** sollten nicht verwechselt werden mit der Gamma- und Beta-**Verteilung**.
2. Man nennt die oben definierten Funktionen auch vollständige Gamma bzw. Beta-Funktion. Die entsprechenden unvollständigen Funktionen haben eine feste Integrationsgrenze z ($z < \infty$ oder $z \neq 1$).
3. Die beiden Funktionen treten in einigen Dichtefunktionen auf (χ^2-, t-, F-Verteilung).

Kapitel 3: Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeit

1.	Einführende Konzepte der Mengenlehre	16
2.	Wahrscheinlichkeitsbegriff	22
3.	Additionssätze	23
4.	Multiplikationssätze, stochastische Unabhängigkeit	24
5.	Totale Wahrscheinlichkeit, Bayessches Theorem	26

Das "Rechnen" mit Ereignissen, das Inhalt dieses Kapitels ist, wird oft auch als Ereignisalgebra bezeichnet. Der Begriff wird jedoch auch spezieller benutzt (Def. 3.7). Es ist formal äquivalent dem Rechnen mit Mengen. Mit Mengen können Mengensysteme gebildet und hierfür Mengenfunktionen definiert werden. Die Wahrscheinlichkeit ist eine solche Mengenfunktion.

1. Einführende Konzepte der Mengenlehre

1.1. Relationen zwischen und Operationen mit Ereignissen

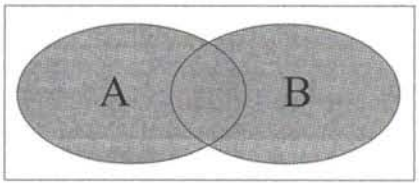
Ein Ereignis kann als Menge dargestellt werden, so daß auf diese auch Verknüpfungsoperationen für Mengen angewandt werden können. Durch Operationen mit Elementarereignissen entstehen zusammengesetzte Ereignisse (vgl. Def. 3.1 und 3.2).

a) Operationen

Der Stichprobenraum Ω bestehe aus den Mengen (Ereignissen) A, B und C, dargestellt im Euler-Venn-Diagramm. Das Ergebnis einer Operation wird durch Schattierung angegeben. Ω wird als Kasten dargestellt, die Mengen A, B, C sind Flächen in dem Kasten.

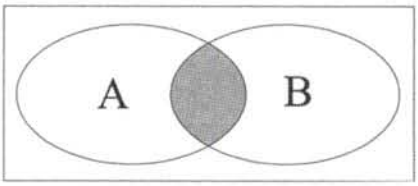
Vereinigung: $A \cup B$ oder $A + B$

(auch Summe genannt)
$A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$ [1]
sprich: „A oder B" (inklusives oder)



Durchschnitt: $A \cap B$ oder AB

(auch Produkt oder Konjunktion)
$A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
sprich: „sowohl A als auch B"



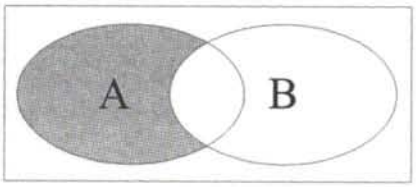
[1] Dies ist eine Definition. Fast alles, was im folgenden dargestellt wird, sind Definitionen. Nur einige besonders hervorzuhebende Definitionen sind numeriert worden.

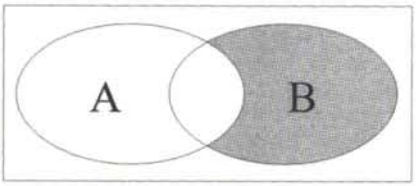
Differenz: A\B oder A - B

(auch relatives Komplement)

$A \setminus B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$ dagegen $B \setminus A$

auch zu definieren mit $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

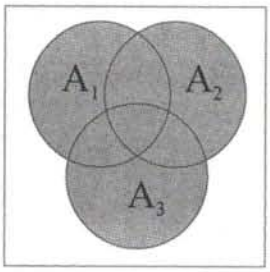




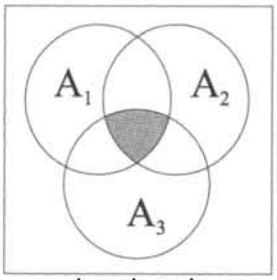
Mehr als zwei Ereignisse:

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ etwa $n = 3$: $A_1 \cup A_2 \cup A_3$

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ etwa $n = 3$: $A_1 \cap A_2 \cap A_3$



$A_1 \cup A_2 \cup A_3$



$A_1 \cap A_2 \cap A_3$

Auch die Übertragung auf überabzählbar unendlich viele Ereignisse ist möglich.

Eigenschaften der Operationen $\cap$ (und $\cup$)

1. Kommutativität: $A \cap B = B \cap A$ [2)]
2. Assoziativität: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Distributivität: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Adjunktivität: $A \cap (A \cup B) = A$
5. Idempotenz: $A \cap A = A$

Die Differenz \ ist nicht kommutativ und nicht assoziativ.

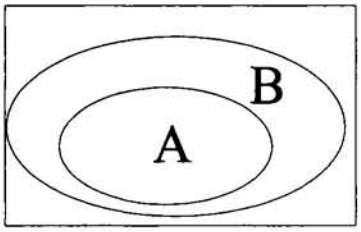
---

[2] Das Zeichen = bedeutet Gleichwertigkeit (Gleichheit), d.h. gleiche Elemente enthaltend, von Mengen bzw. Ereignissen.

b) Relationen

Teilereignis $A \subset B$

$x \in A \Rightarrow x \in B$
$A \cap B = A,\ A \cup B = B$
(auch Inklusion genannt)[3]



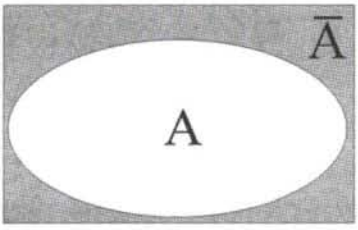
Eigenschaften der Relationen $\subset$

asymmetrisch:	$A \subset B \neq B \subset A$
antisymmetrisch:	$A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$
transitiv:	$A \subset B \wedge B \subset D \Rightarrow A \subset D$
reflexiv:	wenn A=B, denn dann gilt $A \subset A$

Komplementärereignis $\overline{A}$

$\overline{A} := \{x | x \notin A\}$
$\overline{A} = \Omega \backslash A$
$\overline{A} \cup A = \Omega$ und $\overline{A} \cap A = \emptyset$

(auch absolutes Komplement oder Gegenereignis genannt)



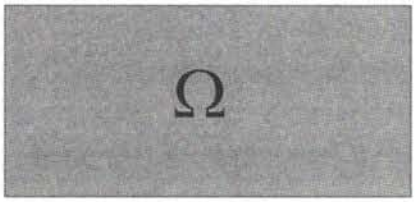
$A \cup \overline{A} = \Omega,\quad A \cap \overline{A} = \emptyset,\quad \overline{\overline{A}} = A$
$A \cup \emptyset = A,\quad A \cap \emptyset = \emptyset$
$A \cup \Omega = \Omega,\quad A \cap \Omega = A$

(de Morgansche Gesetze)
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ und $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

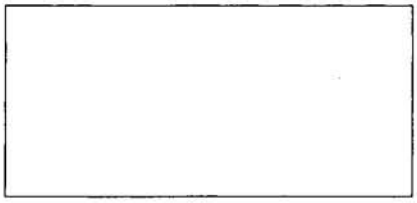
[3] Gemeint sind echte Teilmengen im Sinne der Mathematik.

c) Besondere Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

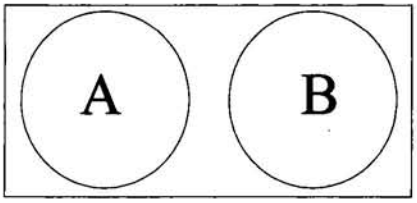
- sicheres Ereignis Ω



- unmögliches Ereignis $\varnothing$



- disjunkte Ereignisse
  (oder elementfremd, unvereinbar,
  nicht: unabhängig)
  $A \cap B = \varnothing$, $A \setminus B = A$



Mit dem Alltagsverständnis der Wahrscheinlichkeit als einer Zahl P, die zwischen 0 und 1 liegen muß, lassen sich hieraus bereits folgende Aussagen gewinnen:

1. $P(\varnothing) = 0$
2. $P(\Omega) = 1$, daraus folgt $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, denn wegen $A \cup \overline{A} = \Omega$ soll gelten
   $P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega) = 1$
3. Wenn A und B unvereinbar sind, dann gilt
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ und $P(A \cap B) = P(AB) = 0$
4. Wenn $A \subset B$, dann
   $P(A) \leq P(B)$ und $P(A \cup B) = P(B)$, so daß auch gilt $P(B - A) = P(B) - P(A)$,
   statt allgemein $P(B - A) = P(A \cup B) - P(A)$.

d) Zusammengesetzte Ereignisse und Elementarereignisse

Def. 3.1:

Ein Ereignis $A \neq \varnothing$ heißt <u>zusammengesetzt</u>, wenn A dargestellt werden kann als $A = B \cup C$ (mit $B \neq A$ und $C \neq A$), andernfalls liegt ein Elementarereignis vor.

Äquivalente Definition:

Def. 3.2:

Das Ereignis $A \neq \varnothing$ ist genau dann <u>Elementarereignis</u>, wenn es kein Ereignis $B \neq \varnothing$, $B \neq A$ gibt, das Teilereignis von A ist. $\varnothing$ ist kein Elementarereignis. Folgerung: Je zwei Elementarereignisse A_1 und A_2 sind disjunkt.

1.2. Produktmenge, Mengenfunktion

Def. 3.3: Produktmenge, Kartesisches Produkt

Bei zwei Mengen Ω_1, Ω_2 sind beispielsweise (a_1, b_1) oder (a_2, b_3) mit $a_i \in \Omega_1$ und $b_j \in \Omega_2$ jeweils ein geordnetes Paar (Tupel). Die Menge $\Omega_1 \times \Omega_2$ aller geordneten Paare ist die Produktmenge von Ω_1 und Ω_2.

$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(a,b) | a \in \Omega_1 \wedge b \in \Omega_2\}$

Allgemein: $\Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_n = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} \Omega_i = \{(x_1, ..., x_n) | x_i \in \Omega_i\}$.

Im Falle von $\Omega_1 = ... = \Omega_n = \Omega$ schreibt man auch Ω^n. Eine Produktmenge (ihre Elemente) ist mit einem Baumdiagramm darstellbar. Eine "Relation" ist eine Teilmenge der Produktmenge.

Def. 3.4: Mengenfunktion

Wird einer Menge A nach einer Zuordnungsvorschrift eine Zahl Q(A) zugeordnet, so spricht man von einer Mengenfunktion.

1.3. Mengensysteme

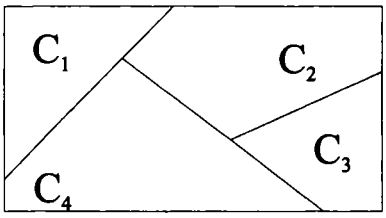
Mengen, deren Elemente selbst wieder Mengen darstellen, nennt man Mengensysteme. Sie werden häufig abgeleitet aus einer Menge Ω, die eine Klasseneinteilung ist.

Def. 3.5: Vollständige Zerlegung, Klasseneinteilung, Partition

Ein Stichprobenraum Ω wird in n nichtleere, paarweise disjunkte Mengen (Ereignisse C_i) zerlegt, wenn gilt:

1. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i = \Omega$ (Ausschöpfung)
2. $C_i \cap C_j = \varnothing \quad i,j = 1,2,...,n; \quad i \neq j$
3. $C_i \neq \varnothing$ für alle $i = 1,2,...,n$ (n kann auch unendlich sein).

Veranschaulichung einer Zerlegung
$\Omega = \{C_i | i = 1,2,...,n\}$ für $n = 4$ (vgl. Abb.)
Ein solches vollständiges System von Ereignissen ist die Menge der Elementarereignisse oder auch $\Omega = \{A, \overline{A}\}$.



Folgerung
Ist A ein beliebiges Ereignis und $\{C_1, C_2, ..., C_n\}$ eine Zerlegung (vollständiges System), so gilt:

(3.1) $$A = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap C_i)$$

(Darauf beruht der Satz der totalen Wahrscheinlichkeit, Gl. 3.14). Die Mengen (Ereignisse) $A \cap C_1$, $A \cap C_2$,... sind disjunkt (unvereinbar).

Def. 3.6: Potenzmenge

Das Mengensystem $\mathbf{P}(\Omega)$, dessen Mengen alle möglichen Teilmengen von Ω, einschließlich $\varnothing$ und Ω umfassen, heißt Potenzmenge (Ereignisfeld) von Ω.
Bei einem endlichen Stichprobenraum, etwa $\Omega = \{a, b, c\}$ ist das Ereignisfeld

$$\mathbf{P}(\Omega) = \{\Omega, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \varnothing\}.$$

Bei n Elementen von Ω besteht das Ereignisfeld aus $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$ Elementen.

Motivation
Es genügt nicht, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (Elementarereignisses) von Ω, etwa von A, B usw. zu definieren, sondern es muß für alle durch $\cap$ und $\cup$ zu bildenden, zusammengesetzten Ereignisse, eine Wahrscheinlichkeit definiert sein. Ereignisfelder sind bezüglich Vereinigung, Durchschnitt und Komplementbildung abgeschlossen.

Def. 3.7: Sigma-(σ-)Algebra

Eine Teilmenge M von $\mathbf{P}(\Omega)$, zu der Ω gehört und mit einer Menge A auch deren Komplement $\overline{A}$, die wegen der folgenden Festlegung Nr. 2 auch $\varnothing$ enthält und die abgeschlossen ist gegenüber der Vereinigung (Summe) $\cup$ von n oder auch abzählbar unendlich vielen Ereignissen A_i [Summe, daher σ; M ist wegen Nr. 2 auch hinsichtlich $\cap$ abgeschlossen]

(1) $\Omega \in M$
(2) wenn $A \in M$, dann auch $\overline{A} \in M$
(3) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in M$

heißt σ-Algebra. Anders als $\mathbf{P}(\Omega)$ muß M nicht einelementige Mengen enthalten.

Motivation
Die Potenzmenge kann sehr groß oder bei nicht endlichem Ω auch unendlich sein. Die Wahrscheinlichkeit ist eine auf ein Mengensystem definierte reellwertige Funktion, eine Mengenfunktion, deren Definitionsbereich eine σ-Algebra ist. Sie gibt an, welche Mengen in ihm mindestens enthalten sein müssen, um die Wahrscheinlichkeit definieren zu können.

Def. 3.8: Wahrscheinlichkeit

Sei M eine σ-Algebra. Eine auf M definierte Funktion P: M → IR heißt Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn die folgenden (Kolmogroff'schen) Axiome erfüllt sind.

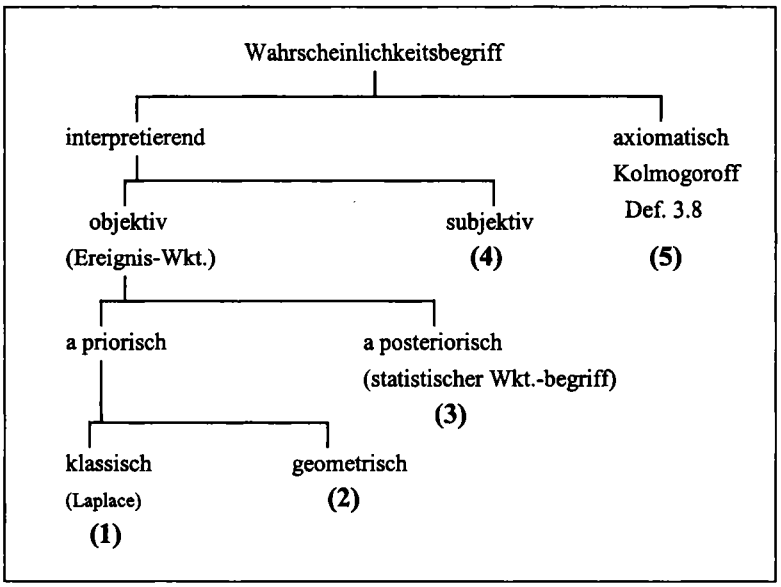
1) $P(A) \geq 0$	Nichtnegativität für alle $A \in M$
2) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$	Volladditivität (σ-Additivität), wobei alle Folgen A_i Zerlegungen von Ω seien also $A_i \cap A_j = \emptyset$
3) $P(\Omega) = 1$	Normierung $(0 \leq P(\cdot) \leq 1)$, sicheres Ereignis

Die Wahrscheinlichkeit ist ein normiertes, additives Maß auf eine σ-Algebra. Ist Ω endlich, so genügt es, Wahrscheinlichkeiten für Elementarereignisse zu definieren, alle anderen Wahrscheinlichkeiten folgen daraus. Wegen Axiom 2 und 3 folgt aus Axiom 1 auch $P(A) \leq 1$.

2. Wahrscheinlichkeitsbegriff

Die Axiome von Definition 3.8 legen die mathematischen Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten fest. Sie geben keine Auskunft darüber, wie man den numerischen Wert einer bestimmten Wahrscheinlichkeit erhält und interpretiert (Berechnungsanweisung, Interpretationsproblem). Zu Versuchen, diese Probleme im Wahrscheinlichkeitsbegriff zu lösen, vgl. Übersicht 3.1.

Übersicht 3.1



(1) *Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff*

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A ist die Häufigkeit n_A des Eintretens von A (oder $|A|$ = Mächtigkeit der Menge A) dividiert durch die Anzahl n aller möglichen Fälle:

$$\boxed{P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der gleichmöglichen Fälle}}}$$

(2) *Geometrischer Wahrscheinlichkeitsbegriff*
Auch anwendbar bei überabzählbar unendlichem Stichprobenraum Ω.

(3) *A posteriorisch (v. Mises)*
Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeit bei sehr vielen Beobachtungen $(n \to \infty)$.

(4) *Subjektiver Wahrscheinlichkeitsbegriff*
Maß für den Grad der Überzeugtheit von der Richtigkeit einer Aussage (logische Wahrscheinlichkeit, Hypothesenwahrscheinlichkeit).

(5) *Axiomatischer Begriff*
Er ist z.B. insofern allgemeiner als 1, weil nicht eine endliche Menge Ω mit gleichwahrscheinlichen Elementarereignissen vorausgesetzt wird. Begriff 1 ist als Spezialfall enthalten.

3. Additionssätze

Bestimmung der Wahrscheinlichkeit einer Vereinigung. Im Falle unverträglicher Ereignisse Vereinfachung (spezielle Additionssätze, Übersicht 3.2). Allgemein gilt:

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \le \sum P(A_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{(Boolesche Ungleichung).}$$

Übersicht 3.2: Additionssätze allgemein, darunter (*) speziell ($A_i \cap A_j = \varnothing$, $\forall$ i, j)

	Additionssätze	
Zwei Ereignisse A, B	(3.3)	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
	(3.3*)	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
Drei Ereignisse A, B, C	(3.4)	$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$
	(3.4*)	$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$
Allgemeine Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$	(3.5)	Formel von Sylvester (siehe unten)
	(3.5*)	$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Formel von Sylvester

$$(3.5) \qquad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = (-1)^2 \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + (-1)^3 \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \ldots A_n)$$

Interpretation: Summanden

erster Summand: $\sum P(A_i)$ → Vorzeichen positiv, denn $(-1)^2=+1$ bestehend aus $\binom{n}{1} = n$ Summanden

zweiter Summand: $\sum P(A_iA_j)$ → Vorzeichen negativ, denn $(-1)^3=-1$ bestehend aus $\binom{n}{2}$ Summanden A_1A_2, $A_1A_3,\ldots,A_1A_n$, $A_2A_3,\ldots,A_2A_n$ usw.

letzter Summand: bestehend aus $\binom{n}{n} = 1$ Summanden

4. Multiplikationssätze, stochastische Unabhängigkeit

Def. 3.9: Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$P(A|B)$ ist die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens des Ereignisses A unter der Voraussetzung, daß Ereignis B eingetreten ist (muß nicht eine zeitliche Folge, "zuerst B, dann A", sein).

$$\boxed{(3.6)\quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{entsprechend} \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Für bedingte Wahrscheinlichkeiten gelten die gleichen Axiome und Sätze wie für unbedingte Wahrscheinlichkeiten, z.B. $P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B) - P(AC|B)$ (Additionssatz).

Generell gilt:

(3.13) $P(A|B) + P(\overline{A}|B) = 1$ oder $P(AB|C) + P(\overline{AB}|C) = 1$ usw., aber nicht

$P(A|B) + P(A|\overline{B}) = 1$ oder $P(AB|C) + P(AB|\overline{C}) = 1$.

Def. 3.10: Stochastische Unabhängigkeit

a) **paarweise** (pairwise) Unabhängigkeit von zwei Ereignissen A, B bedeutet:

$$\boxed{(3.7)\quad P(AB) = P(A)\,P(B)}$$

oder gleichbedeutend

(3.8) $P(A) = P(A|B)$

und wegen der Symmetrie der Unabhängigkeit gilt dann auch $P(B) = P(B|A)$ oder

(3.9) $P(A|B) = P(A|\overline{B}) = P(A)$ und $P(B|A) = P(B|\overline{A}) = P(B)$

b) **wechselseitige** (mutual) Unabhängigkeit bei mehr als zwei, z.B. bei drei Ereignissen bedeutet:

$$(3.10) \quad P(ABC) = P(A)\,P(B)\,P(C)$$

Mit Gleichung 3.10 gilt auch paarweise Unabhängigkeit von A und B, A und C sowie B und C, nicht aber umgekehrt. Wechselseitige Unabhängigkeit ist also eine strengere Forderung als paarweise Unabhängigkeit.

Bemerkung zu Definition 3.10

Mehrdeutigkeit des Begriffs Unabhängigkeit in der Statistik:

- unabhängige Züge (bei wiederholter Ziehung aus einer Urne mit Zurücklegen, → Kap. 4, 5)
- bei mehrdimensionaler Zufallsvariable (→ Kap. 4)
- unabhängige und abhängige (verbundene) Stichproben (→ Kap. 9)
- in der Regressionsanalyse: "unabhängige Variablen"

Multiplikationssätze

Gegenstand: Bestimmung der Wahrscheinlichkeit P(AB), P(ABC), usw. aus bedingten und unbedingten Wahrscheinlichkeiten. Bei Unabhängigkeit jeweils Spezialfall des Multiplikationssatzes. Vgl. Übersicht 3.3.

Folgerungen, Verallgemeinerungen

Bedingte Wahrscheinlichkeit allgemeinerer Art: $P(A_1 \ldots A_m | B_1 \ldots B_k) = \dfrac{P(A_1 \cap \ldots \cap B_k)}{P(B_1 \cap \ldots \cap B_k)}$.

Entsprechend läßt sich auch der Multiplikationssatz allgemeiner formulieren. Beispiel:
$P(A_1A_2|B_1B_2B_3) = P(A_1A_2|B_1B_2B_3)\,P(B_1|B_2B_3)\,P(B_2|B_3)\,P(B_3)$.

Übersicht 3.3: Multiplikationssätze allgemein, darunter (*) speziell (A_i, A_j paarweise unabhängig)

	Multiplikationssätze
Zwei Ereignisse A, B	(3.11) $P(AB) = P(A)P(B\|A) = P(B)P(A\|B)$
	(3.11*) $P(AB) = P(A)\,P(B)$
n Ereignisse $A_1,\ldots,A_n$	(3.12) $P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1\|A_2 \ldots A_n) \cdot P(A_2\|A_3 \ldots A_n) \cdot P(A_3\|A_4 \ldots A_n) \cdot \ldots \cdot P(A_{n-1}\|A_n) P(A_n)$
	(3.12*) $P(A_1 \ldots A_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$

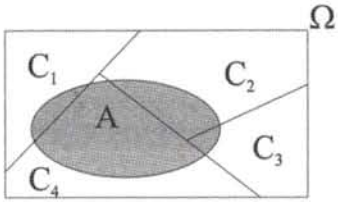
5. Totale Wahrscheinlichkeit, Bayessches Theorem

1) Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Es sei $\{C_i | i = 1,...,n\}$ eine vollständige Zerlegung von Ω mit sich gegenseitig ausschließenden Ereignissen C_i mit $P(C_i) > 0$. Weiterhin sei $A \subset \Omega$. Dann gilt nach Gl. 3.1:

(3.14) $P(A) = \sum_i P(C_i) \cdot P(A|C_i) = \sum_i P(C_i \cap A)$

(3.14a) $P(AB) = \sum_i P(C_i) \cdot P(AB|C_i)$



2) Bayessches Theorem

$$\boxed{(3.15) \qquad P(C_i|A) = \frac{P(C_i) \cdot P(A|C_i)}{\sum_i P(C_i) \cdot P(A|C_i)} = \frac{P(A \cap C_i)}{P(A)}}$$

Interpretation: Bedeutung für Schätz- und Testtheorie:

$C_1, C_2,...$:	Alternativen, Hypothesen, Ursachen (für Beobachtungen)
$P(C_1), P(C_2),...$:	a priori Wahrscheinlichkeiten $\left(\sum_i P(C_i) = 1\right)$
$P(C_1\|A), P(C_2\|A),...$	a posteriori Wahrscheinlichkeiten $\left(\sum_i P(C_i\|A)\right) = 1$
$P(A\|C_1), P(A\|C_2),...$	Likelihoods

Spezielle Fälle

- $P(C_i|A) = P(C_i)$ für alle i, wenn Likelihoods gleich sind
- $P(C_i|A) = 0$ oder $P(C_i|A) = 1$, d.h. bei extremen Werten für a priori-Wahrscheinlichkeiten von 0 oder 1 nehmen auch die a posteriori Wahrscheinlichkeiten extreme Werte an; entsprechend
- extreme Werte für die Likelihoods von 0 oder 1: a posteriori-Wahrscheinlichkeiten sind dann auch 0 oder 1, unabhängig von den a priori-Wahrscheinlichkeiten
- alle a priori-Wahrscheinlichkeiten gleich $P(C_1) = P(C_2) = ... = P(C_n) = 1/n$ (Prinzip des mangelnden Grundes): dann gilt $P(C_i|A) = P(A|C_i) / \sum P(A|C_i)$.

Die totale Wahrscheinlichkeit $P(A)$ ist nach Gl. 3.14 ein gewogenes Mittel der Likelihoods. Ist $P(A|C_i) > P(A)$, dann ist $P(C_i|A) > P(C_i)$. Ist $P(A|C_i) < P(A)$, dann ist $P(C_i|A) < P(C_i)$.

Beachte: $\sum_i P(C_i|A) = 1$, aber $\sum_i P(A|C_i)$ muß nicht 1 sein.