



Regelungstechnik 2

Mehrgrößenregelung,
Digitale Regelungstechnik,
Fuzzy-Regelung

Prof. Dr. Gerd Schulz
Prof. Dr. Clemens Graf

3., überarbeitete und erweiterte Auflage

Oldenbourg Verlag München

Prof. Dr. Gerd Schulz studierte Regelungstechnik an der TH Darmstadt und an der Stanford University. Mit einem Thema zur Parameteridentifizierung promovierte er an der TH Darmstadt. Prof. Schulz arbeitete viele Jahre in der Luft- und Raumfahrtforschung und Luftfahrtindustrie. Er lehrte zunächst an der FH Landshut und hielt von 1989 bis 2009 Vorlesungen auf dem Gebiet der Regelungstechnik an der Hochschule München.

Prof. Dr. Klemens Graf studierte Elektrotechnik an der Universität Erlangen-Nürnberg. Nach einer Promotion auf dem Gebiet hydraulisch angetriebener Handhabungsgeräte arbeitete er in der Antriebsentwicklung für den Magnetschwebezug Transrapid bei der Siemens AG. Seit 2005 lehrt er Regelungstechnik an der Hochschule München.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© 2013 Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH
Rosenheimer Straße 143, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
www.oldenbourg-verlag.de

Das Werk einschließlich aller Abbildungen ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen.

Lektorat: Dr. Gerhard Pappert
Herstellung: Tina Bonertz
Titelbild: Raumstation ISS mit dem Endeavour Raumtransporter und einem ATV Modul ESA/
NASA
Einbandgestaltung: hauser lacour
Gesamtherstellung: Grafik + Druck GmbH, München

Dieses Papier ist alterungsbeständig nach DIN/ISO 9706.

ISBN 978-3-486-71281-0
eISBN 978-3-486-73615-1

Vorwort zur 3. Auflage

In der vorliegenden dritten Auflage wurden die bekannt gewordenen Unstimmigkeiten korrigiert und beseitigt. In Teil I über Mehrgrößenregelung wurde ein neues Kapitel über den Entwurf von Zustandsreglern im Frequenzbereich eingefügt.

Die Strukturierung des Buches in drei Teile wird beibehalten und nachfolgend im Einzelnen beschrieben:

Teil I: Mehrgrößen-Regelsysteme

Zur Einführung wird in Kapitel 1 die Drehzahlregelung eines Gleichstrommotors als typisches Eingrößensystem vorgestellt, und die Entwurfsanforderungen an einen Regelkreis werden erläutert. Ausgehend von der Darstellung eines Eingrößensystems durch eine lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung wird der Übergang zu einer Beschreibung durch n Differentialgleichungen 1. Ordnung, der so genannten Zustandsdarstellung, entwickelt. Die Variablen dieser n Differentialgleichungen 1. Ordnung sind die Zustände des Systems. Diese Darstellungsart ermöglicht Regelkonzepte, die auf der Basis von Übertragungsfunktionen nicht realisierbar sind. Verschiedene Normalformen der Zustandsdarstellung werden erstmals aufgezeigt, und es wird die Berechnung der Übertragungsfunktion aus der Zustandsdarstellung erläutert.

In Kapitel 2 werden vier verschiedene Beispiele von technischen Mehrgrößensystemen vorgestellt. Dies sind eine Hydraulik-Kaskade, der Schwebeflug eines Hubschraubers, eine Destillationskolonne und ein Dampferzeuger. Durch eine vektorielle Erweiterung der Eingrößensystem-Zustandsdarstellung können diese Mehrgrößensysteme ebenso durch eine Zustandsdarstellung beschrieben werden. Die numerischen Zahlenwerte der Beispiele werden angegeben. Daran schließt sich die numerische Lösung der Vektordifferentialgleichung, die Ermittlung der Übertragungsmatrix von Mehrgrößensystemen, die Stabilität und die Verknüpfung von Mehrgrößensystemen durch Reihen-, Parallel- und Kreisschaltung an.

Die Fragen der Steuer- und Beobachtbarkeit und die Normalformen von Mehrgrößensystemen sind Thema des Kapitels 3. Ausgehend von den Definitionen der Steuer- und Beobachtbarkeit werden deren Kriterien plausibel gemacht. Dieses Konzept der Steuer- und Beobachtbarkeit ist bei der Regelung von Eingrößensystemen auf der Basis von Übertragungsfunktionen irrelevant, da die Übertragungsfunktion ohnehin nur den steuer- und beobachtbaren Systemteil erfasst. Anschließend werden die von den Eingrößensystemen bekannten Normalformen der Zustandsdarstellung auch für die Mehrgrößensysteme vorgestellt und ihre Berechnung demonstriert.

Die Regelung von Eingrößensystemen durch den klassischen PID-Regler gestattet nur eine Einstellung der Pole des geschlossenen Regelkreises auf bestimmte, durch die Äste

einer Wurzelortskurve vorgegebene Positionen in der s -Ebene. Dagegen können mit den Mitteln der in Kapitel 4 vorgestellten Polfestlegung die Pole des geschlossenen Regelkreises beliebig festgelegt werden, falls die Steuerbarkeit des Mehrgrößensystems gegeben ist. Bei den Eingrößensystemen erfolgt diese Polfestlegung mittels Zustandsvektorrückführung vorteilhaft unter Verwendung der Regelungsnormalform. Auch bei den Mehrgrößensystemen ermöglicht die Verwendung der Brunovsky-Form eine analytische Polfestlegung. Numerische Methoden erlauben die Berücksichtigung von Empfindlichkeitsmaßen, welche die Lage der Pole unempfindlich gegen Parametervariationen der Mehrgrößen-Regelstrecke macht. Man spricht von einer robusten Polfestlegung. In einem gesonderten Abschnitt werden verschiedene Methoden zur Auswahl der gewünschten Pollagen untersucht

Als alternative Methode zur Polfestlegung für die Auslegung von Reglern mittels Zustandsvektorrückführung wird in Kapitel 5 die optimale Zustandsregelung betrachtet. Wie bei den Eingrößensystemen kann man eine konstante Rückführmatrix \mathbf{K} der Zustandsvektorrückführung so bestimmen, dass bestimmte quadratische Gütekriterien erfüllt sind. Diese integralen Kriterien bewerten die Abweichung des Zustands- und Stellvektors von der Ruhelage. Das Minimum des Integralkriteriums liefert die Lösung \mathbf{P} einer Matrix-Riccati-Gleichung, die dann die Berechnung der Rückführmatrix \mathbf{K} ermöglicht. Ansatz und Lösung dieses quadratischen Reglerproblems werden plausibel gemacht und an Beispielen demonstriert. Auch die Verschiebung der Pole des geschlossenen Mehrgrößen-Regelkreises auf Werte kleiner $-\alpha$ in der s -Ebene mithilfe der optimalen Regelung wird demonstriert.

Die Zustandsvektorrückführung über eine Rückführmatrix \mathbf{K} , die mit den Methoden der Polfestlegung oder der optimalen Regelung berechnet wird, setzt die Kenntnis des Zustandsvektors $\mathbf{x}(t)$ voraus. In Kapitel 6 wird gezeigt, wie man diesen Zustandsvektor aus den gemessenen Ein- und Ausgangsgrößen eines Mehrgrößensystems mit einem Zustandsbeobachter ermitteln kann. Ein derartiger Zustandsbeobachter bildet die Struktur des untersuchten Mehrgrößensystems nach. Die Berechnung der hierbei erforderlichen Rückführmatrix \mathbf{L} des Ausgangsfehlers kann sowohl mit den Methoden der Polfestlegung als auch mittels der quadratischen Regelung erfolgen. Damit ist man in der Lage, ein Mehrgrößensystem mittels Zustandsvektorrückführung zu stabilisieren, ohne den Zustandsvektor direkt zu messen, da der Zustandsbeobachter die Schätzung des Zustandsvektors ermöglicht. In einem gesonderten Unterkapitel wird gezeigt, wie man durch intelligente Verwendung der Messgrößen die Ordnung des Beobachters reduzieren kann und zu einem Beobachter reduzierter Ordnung gelangt. Die Auslegung des Zustandsbeobachters und die Auslegung der Rückführmatrix für die Zustandsvektorrückführung des Mehrgrößensystems sind unabhängig voneinander, wie das Separationstheorem zeigt.

Die in den Kapiteln 2 bis 6 behandelte Theorie der Mehrgrößensysteme ist erforderlich, um das in Kapitel 7 untersuchte zentrale Problem der Regelungstechnik, das Führungs- und Störverhalten von (in diesem Fall) Mehrgrößensystemen zu verstehen. Zunächst wird die Führungsgrößenaufschaltung behandelt, mittels der im Rahmen einer Steuerung die Regelgrößen auf den Sollwert geführt werden. Die dann untersuchte integrale Ausgangsvektorrückführung mit einem PI-Mehrgrößenregler demonstriert, wie durch diese Struktur alle s Regelgrößen auf ihre Sollwerte geregelt werden. Dies gilt auch beim

Auftreten von Parameteränderungen der Mehrgrößen-Regelstrecke. Sollen die Regelgrößen mit vorgeschriebenem Zeitverhalten auf die Sollwerte einschwingen, so kann man dies mit einem Modellfolgeregler erreichen, dessen Auslegung sich anschließt. Die Unterdrückung von Störgrößen durch Schätzung und Aufschaltung ist Thema des letzten Abschnitts Störgrößenaufschaltung. Durch Einsatz eines kombinierten Zustands- und Störbeobachters zusammen mit einem dynamischen Kompensator wird dieses Problem gelöst.

Das neu eingefügte Kapitel 8 über den Entwurf von Zustandsreglern im Frequenzbereich ermöglicht besonders im Eingrößenfall einen einfachen direkten Entwurf der Reglerübertragungsfunktionen. In *einem* Entwurfsschritt werden auf der Grundlage des Separationstheorems ohne explizite Auslegung eines ordnungsreduzierten Beobachters die Pole der Strecke mit Zustandsrückführung und des Beobachters festgelegt. Die Unterdrückung von konstanten und sinusförmigen Störsignalen kann in besonders einfacher Weise erfolgen.

Das Ziel von Teil I des Buchs ist, dem Leser mit möglichst wenig Mathematik eine grundlegende Einführung in die Regelung von Mehrgrößensystemen zu ermöglichen. Es werden wesentliche Grundlagen der Zustandsdarstellung und -regelung von Mehrgrößensystemen behandelt. Für Vertiefungen und weiterführende Untersuchungen wird auf die umfangreiche Literatur zu dieser Thematik verwiesen. Alle vorgestellten Methoden werden am Beispiel der Hydraulik-Kaskade demonstriert. Zum Selbststudium sind die Daten weiterer Beispiele aufgeführt.

Teil II: Digitale Regelung

Die Kapitel 9 bis 16 führen auf die Regelung von Eingrößensystemen zurück. Die Entwurfsanforderungen von Kapitel 1 bezüglich Führungs- und Störverhalten bleiben erhalten, erreicht werden sollen die Entwurfsziele mittels Verwendung digitaler Regler. Dazu werden in Kapitel 9 zunächst die Komponenten eines digitalen Regelkreises vorgestellt. Die Wirkung von Abtaster und Halteglied, die A/D- bzw. D/A-Wandlung¹ und die Verwendung eines Mikrocontrollers zur Regelung werden erläutert. Abschließend wird der Abtastvorgang mathematisch beschrieben.

Die mathematische Behandlung von Zahlenfolgen zu den Abtastzeitpunkten kT ermöglicht die in Kapitel 10 vorgestellte Theorie der z -Transformation. Ihre Rechen- und Transformationsregeln werden erläutert und mit vielen Beispielen demonstriert. Diese z -Transformation ermöglicht in Kapitel 11 die Einführung der z -Übertragungsfunktion. Die Berechnung der z -Übertragungsfunktion für die Regelstrecke mit vorgeschaltetem Halteglied und nachgeschaltetem Abtaster ist dabei das zentrale Thema. Abschließend werden Rechenregeln für das Rechnen mit z -Übertragungsfunktionen für die Reihen-, Parallel- und Kreisschaltung von digitalen Systemen aufgeführt.

In Kapitel 12 werden Stabilität und Zeitverhalten diskreter Systeme untersucht. Zunächst werden Stabilitätskriterien von z -Übertragungsfunktionen erläutert und Bedin-

¹A/D- und D/A-Wandlung bezeichnet die Analog/Digital- bzw. die Digital/Analog-Wandlung von Signalen.

gungen für die Lage der Pole in der z -Ebene genannt. Ein Vergleich zwischen der Lage der Pole in der s -Ebene und der z -Ebene schließt sich an.

Die zentrale Aufgabe der digitalen Regelung, die Ermittlung der in einem Mikrocontroller zu implementierenden Reglergleichung, ist Thema von Kapitel 13. Erst werden verschiedene Methoden der digitalen Realisierung analoger Regler vorgestellt und miteinander verglichen. Dabei erweist sich die Diskretisierung mit der Methode der bilinearen Transformation als besonders vorteilhaft. Dann folgt der Entwurf von digitalen Kompensationsreglern mit den Methoden von Ragazzini und der Reglerentwurf auf endliche Einstellzeit. Infolge von Stellgliedbegrenzungen kann es bei integrierenden Reglern zu einem Reglerüberlauf (Wind-Up) kommen. Maßnahmen gegen diesen Reglerüberlauf schließen das Kapitel ab.

In Kapitel 14 werden die von der klassischen Regelungstechnik bekannten Ortskurvenverfahren des Reglerentwurfs mithilfe des Bode-Diagramms und der Wurzelortskurve auf digitale Regelsysteme übertragen.

Im folgenden Kapitel 15 über den Entwurf digitaler Kompensationsregler werden ohne vorherigen Entwurf analoger Regler und anschließende Diskretisierung direkt digitale Kompensationsregler nach verschiedenen Methoden entworfen. Ein Entwurf mittels Polvorgabe wird dabei ebenfalls vorgestellt.

Das Kapitel 16 über adaptive und selbsteinstellende Regler behandelt das Autotuning von Reglern, Gain-Scheduling, selbsteinstellende Regler sowie Modell-Referenz-Adaptive Systeme. Diese komplexen Entwurfsverfahren ermöglichen eine Regleranpassung an sich verändernde Parameter der Regelstrecke.

Das Ziel von Teil II des Buchs ist, den Leser mit einfachen Mitteln mit den Methoden der digitalen Regelung vertraut zu machen. Anhand vieler Beispiele erfolgt eine Einführung in die Thematik, und die zahlreichen Aufgaben ermöglichen die selbständige Erarbeitung des Stoffes. Dabei wird das Ziel des Entwurfs digitaler Regler, die Ermittlung der im Mikrocontroller zu programmierenden Reglergleichung, nicht aus den Augen verloren.

Teil III: Fuzzy-Regelung

Die Ermittlung und Anwendung der Methoden der Fuzzy-Logik auf die Auslegung von Reglern für Eingrößensysteme bilden den Inhalt der Kapitel 17 bis 20 des Buches. Begonnen wird in Kapitel 17 mit der Definition unscharfer Mengen, den Fuzzy-Mengen, deren Zugehörigkeitsfunktion, anders als bei den klassischen Mengen, die Elemente der Grundmenge auch auf Werte zwischen Null und Eins abbildet. Nach der Vorstellung typischer Fuzzy-Mengen werden UND-, ODER- und NICHT-Operator für Fuzzy-Mengen erläutert. Die Einführung von linguistischen Variablen und Termen schließt sich an. Mit der Abbildung „scharfer“ Messwerte auf ihren Zugehörigkeitsgrad (die Fuzzifizierung) endet das Kapitel.

Kapitel 18 beginnt mit den Regeln für Fuzzy-logisches Schließen, den Fuzzy-Relationen und leitet über zur Fuzzy-Inferenz. Hierunter versteht man die Erarbeitung einer Schlussfolgerung auf der Basis des Wahrheitsgehaltes von Prämissen. WENN-DANN-Regeln

beschreiben formal die Verknüpfung von Prämisse und Konklusion (Schlussfolgerung). Die Erläuterung dieser Fuzzy-Inferenz erfolgt am Beispiel einer Füllstandsregelung eines Behälters. Verwendet wird hierbei die MAX-MIN-Inferenz, jedoch weitere Inferenzmethoden werden ebenso erläutert. Die Defuzzifizierung, d. h. die Gewinnung eines „scharfen“ Ausgangswertes aus der Ergebnis-Fuzzy-Menge der Fuzzy-Inferenz schließt sich an.

In Kapitel 19 wird die Anwendung der beiden vorangehenden Kapitel auf den Reglerentwurf vorbereitet. Die Konstruktion statischer und dynamischer Fuzzy-Regler wird ebenso erläutert wie die Konstruktion von Zwei- und Dreipunktreglern auf der Basis der Fuzzy-Inferenz. Die Beschreibung des Ein-/Ausgangsverhaltens von Fuzzy-Reglern durch Kennlinien und Kennflächen verdeutlicht die Wirkungsweise. Der Einfluss unterschiedlicher Fuzzy-Mengen und unterschiedlicher Inferenzmethoden wird für einen Fuzzy-PD-Regler anhand seiner Kennflächen demonstriert, bevor sich die Generierung von Fuzzy-PI- und -PID-Reglern anschließt.

Die beispielhafte Anwendung von Fuzzy-Reglern im Regelkreis im Vergleich zu einem konventionellen Regler wird in Kapitel 20 für eine Verzögerungsstrecke untersucht. Dies beinhaltet auch die Untersuchung des Einflusses verschiedener Inferenzmethoden. Es schließt sich die Untersuchung einer Störgrößenaufschaltung über einen Fuzzy-Regler für die Regelung einer integrierenden Regelstrecke an. Den Abschluss dieses Kapitels bildet ein Blick in die Problematik der Stabilität von Fuzzy-Regelungssystemen.

Das Ziel von Teil III des Buches ist, dem Leser ein Verständnis für den Einsatz der Fuzzy-Logik in der Regelungstechnik zu vermitteln. Daher wird der Vergleich zur konventionellen Regelung häufig betont. Beispiele und Aufgaben sollen die Einarbeitung erleichtern.

Anhang

Der Anhang bietet mit seinen Formeln zur Matrizenrechnung die Möglichkeit fehlendes Formelwissen nachzuschlagen. Dies kann nicht die intensive Beschäftigung mit der Matrizenrechnung, die in Teil I des Buches erforderlich ist, ersetzen. Jedoch sind hier einige, speziell in der Regelungstechnik hilfreiche Zusammenhänge leicht zu finden.

Allgemeine Bemerkungen

Voraussetzung für den Leser dieses Buches ist eine Grundvorlesung in Regelungstechnik. Die normalerweise in einer derartigen Vorlesung vermittelten Kenntnisse von PID-Regelungen sind nach wie vor die Basis und die erste Wahl zur Lösung von regelungstechnischen Aufgaben. Die Ziele der Autoren sind es, die über eine derartige Grundvorlesung hinausgehenden Theorien der Regelungstechnik in den drei Bereichen Mehrgrößenregelung, digitale Regelung und Fuzzy-Regelung zusammenfassend in einem Buch darzustellen. Dabei wird der mathematische Aufwand so gering wie möglich gehalten. Das Buch eignet sich sowohl für den in der Praxis tätigen Ingenieur zur schnellen Einarbeitung in die Problematik als auch für Studenten als Textbuch für weiterführende Vorlesungen zur Regelungstechnik. So sind z. B. die behandelten Themengebiete Inhalt von Vorlesungen an der Hochschule München in der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik.

Auf den Internetseiten des Oldenbourg Wissenschaftsverlages <http://www.oldenbourg-wissenschaftsverlag.de> sind unter dem Buchtitel die MATLAB-Programme einiger gerechneter Beispiele sowie weitere Informationen zum Buch zu finden. Dies soll insbesondere das Selbststudium und die ersten Schritte der Anwendung der Verfahren erleichtern. Dabei ist allerdings vorausgesetzt, dass der Leser leistungsfähige Programmsysteme wie z. B. MATLAB, DORA, MATRIXX ... zur Verfügung hat.

Zur Unterscheidung vom normalen Text werden Beispiele und Aufgaben mit dem Zeichen □ abgeschlossen.

Dank

Die Autoren möchte sich bei den Herren Prof. Dr. Wolfgang Höger und Prof. Dr. Dr. h.c. Hans-Joachim Kroll für wertvolle Anregungen bedanken. Der Dank geht außerdem an den Oldenbourg Verlag, bei dem wir jederzeit ein offenes Ohr für Probleme und Wünsche fanden.

München

Gerd Schulz und Klemens Graf

Inhaltsverzeichnis

I	Mehrgrößen-Regelsysteme	1
1	Zustandsdarstellung von Eingrößensystemen	3
1.1	Klassische Eingrößenregelung	3
1.2	Zustandsgleichungen von Eingrößensystemen	7
1.2.1	Ermittlung aus der Differentialgleichung, Normalformen	7
1.2.2	Ermittlung aus den Systemgleichungen	17
1.3	Ermittlung der Übertragungsfunktion	19
2	Zustandsdarstellung von Mehrgrößensystemen	23
2.1	Mehrgrößensysteme	23
2.1.1	Einführung	23
2.1.2	Beispiele von Mehrgrößensystemen	25
2.2	Zustandsgleichungen von Mehrgrößensystemen	28
2.2.1	Herleitung aus den Systemgleichungen	28
2.3	Lösung der Zustandsvektor-Differentialgleichung.....	35
2.4	Ermittlung der Übertragungsmatrix	41
2.5	Stabilität von Mehrgrößensystemen	43
2.6	Verknüpfung von Mehrgrößensystemen	46
3	Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit, Normalformen	51
3.1	Steuerbarkeit	51
3.2	Beobachtbarkeit	56
3.3	Transformation auf Normalform	63
3.3.1	Normalformen von Eingrößensystemen	64
3.3.2	Steuerbarkeitsnormalformen für Mehrgrößensysteme.....	67
3.3.3	Regelungsnormalformen für Mehrgrößensysteme	72
3.3.4	Weitere Normalformen	79

4	Reglerentwurf zur Polfestlegung	81
4.1	Polfestlegung für Eingrößensysteme	82
4.2	Polfestlegung für Mehrgrößensysteme	86
4.2.1	Systeme in Brunovsky-Form	87
4.2.2	Robuste Polfestlegung	90
4.3	Auswahl der gewünschten Pollagen	94
4.3.1	Dominierendes Polpaar	94
4.3.2	Prototypen-Entwurf	96
4.3.3	Symmetrischer Wurzelort	100
4.3.4	Pol-/Nullstellenkompensation	105
4.3.5	Resümee	106
5	Optimale Zustandsregelung	107
5.1	Lineare quadratische optimale Regelung	107
5.2	Erzeugung eines vorgeschriebenen Stabilitätsgrades	120
6	Zustandsbeobachter/-schätzer	125
6.1	Entwurf des Einheitsbeobachters mittels Polfestlegung	126
6.1.1	Eingrößensysteme	126
6.1.2	Mehrgrößensysteme	131
6.2	Entwurf des Einheitsbeobachters unter Verwendung quadratischer Güteindizes	133
6.3	Entwurf eines Beobachters reduzierter Ordnung	137
6.3.1	Messung von s Zuständen	137
6.3.2	Allgemeiner Fall des reduzierten Beobachters	142
6.4	Das Separationstheorem	143
7	Führungs- und Störverhalten von Mehrgrößensystemen	147
7.1	Führungsgrößenaufschaltung	148
7.2	Integrale Ausgangsvektorrückführung	152
7.3	Modellfolgeregler – Servo-Kompensator	159
7.4	Störgrößenaufschaltung	168
7.5	Abschließendes Eingrößenbeispiel	179
8	Zustandsreglerentwurf im Frequenzbereich	183
8.1	Aufstellen der Entwurfsgleichung	183
8.2	Zustandsregler mit Störmodell	188
8.3	Grenzen der erreichbaren Regelgüte	194
8.4	Bewertung des Frequenzbereichsentwurfs	195

II	Digitale Regelung	197
9	Grundlagen digitaler Regelsysteme	199
9.1	Aufbau digitaler Regelkreise	200
9.2	Mathematische Beschreibung des Abtastvorgangs	205
9.3	Standardform digitaler Regelkreise	210
10	Die z-Transformation	213
10.1	Definition	213
10.2	Rechenregeln der z-Transformation	219
10.2.1	Überlagerungssätze	219
10.2.2	Ähnlichkeitssatz (Dämpfungssatz)	220
10.2.3	Verschiebungssätze	221
10.2.4	Faltungssatz	223
10.2.5	Grenzwertsätze	224
10.3	Die inverse z-Transformation	225
10.3.1	Rücktransformation durch Polynomdivision	226
10.3.2	Partialbruchzerlegung	227
10.3.3	Auswertung des Umkehrintegrals (Residuensatz)	228
10.4	Anwendung der z-Transformation bei der Lösung von Differenzgleichungen	231
11	Diskrete Übertragungsfunktionen	235
11.1	Die z-Übertragungsfunktion	235
11.1.1	Definition	235
11.1.2	Die Gewichtsfolge	238
11.1.3	Anwendung des Faltungssatzes	239
11.2	Z-Übertragungsfunktion der Regelstrecke	239
11.2.1	Grundlegende Berechnungsmethode	240
11.2.2	Berechnung mittels Partialbruchzerlegung	244
11.2.3	Berechnung mittels der Residuenmethode	246
11.3	Z-Übertragungsfunktion des Reglers	247
11.3.1	Das Halteglied-Äquivalent	247
11.4	Rechenregeln für diskrete Übertragungsfunktionen	249
11.5	Kanonische Realisierungen von z-Übertragungsfunktionen	253
12	Stabilität und Zeitverhalten diskreter Systeme	259
12.1	Stabilitätsbedingungen	259
12.2	Das Jury-Stabilitätskriterium	263
12.3	Vergleich der Lage der Pole in der s-Ebene und der z-Ebene	265

13	Quasikontinuierlicher Entwurf digitaler Regler	273
13.1	Digitale Realisierung analoger Regler	273
13.1.1	Das Euler-Verfahren	273
13.1.2	Die bilineare Transformation	276
13.1.3	Der PID-Regelalgorithmus	278
13.1.4	Das diskrete Äquivalent	280
13.1.5	Das Halteglied-Äquivalent	284
13.1.6	„Direkte z-Transformation“	285
13.1.7	Vergleich der entworfenen Regler	287
13.2	Der digitale Regler nach Takahashi	292
13.3	„Reglerüberlauf“ (Controller Wind-Up)	295
14	Ortskurvenverfahren	303
14.1	Das Wurzelortskurvenverfahren	303
14.1.1	Grundlagen des Entwurfsverfahrens	303
14.1.2	Stabilitätsgebiete in der z-Ebene	304
14.1.3	Entwurf eines Reglers	306
14.2	Der Entwurf mithilfe des Bode-Diagramms	309
14.2.1	Das „diskrete“ Bode-Diagramm	309
14.2.2	Die w-Transformation	311
14.2.3	Entwurf eines Reglers	314
15	Entwurf digitaler Kompensationsregler	319
15.1	Der direkte Entwurf nach Ragazzini	319
15.2	Der Entwurf auf endliche Einstellzeit	329
15.3	Reglerentwurf mittels Polvorgabe	335
15.4	Entwurf von Kompensationsreglern für das Störverhalten	339
16	Adaptive und selbsteinstellende Regler	341
16.1	Autotuning von Reglern	342
16.2	Gain-Scheduling	345
16.3	Selbsteinstellende Regler	346
16.3.1	Parameterschätzung	347
16.3.2	Reglerentwurf	353
16.4	Modell-Referenz-Adaptive Systeme (MRAS)	355
16.4.1	Die MIT-Regel	355
16.4.2	Anwendung der MIT-Regel	356

III	Fuzzy-Regelung	361
17	Grundlagen „unscharfer“ Mengen (Fuzzy-Mengen)	363
17.1	Unscharfe Informationen und Fuzzy-Mengen	363
17.2	Operatoren für Fuzzy-Mengen	367
17.3	Linguistische Variablen und Terme — Fuzzifizierung.....	371
18	Fuzzy-logisches Schließen (Fuzzy-Inferenz)	375
18.1	Regeln für Fuzzy-logisches Schließen	375
18.2	Fuzzy-Relationen	376
18.3	Fuzzy-Inferenz	380
18.3.1	WENN-DANN-Regeln mit einer Prämisse	380
18.3.2	WENN-DANN-Regel mit mehreren Teilprämissen	383
18.3.3	Mehrere WENN-DANN-Regeln	384
18.3.4	Zusammenfassung des MAX-MIN-Inferenzschemas	388
18.3.5	Andere Inferenzschemata	391
18.4	Defuzzifizierung	392
18.4.1	Schwerpunktmethode	393
18.4.2	Singletons als Ausgangs-Fuzzy-Mengen	394
19	Grundlagen der Fuzzy-Regelung (Fuzzy-Control)	399
19.1	Struktur eines Fuzzy-Reglers	399
19.2	Entwurf eines Fuzzy-Reglers	402
19.2.1	Festlegung der Ein- und Ausgangsgrößen	402
19.2.2	Wertebereich der Ein- und Ausgangssignale	402
19.2.3	Definition der linguistischen Terme	403
19.2.4	Aufstellen der WENN-DANN-Regeln.....	404
19.2.5	Fuzzy-Mengen der Ausgangsgröße.....	405
19.3	Kennlinien von Fuzzy-Reglern	405
19.4	Fuzzy-PD-Regler	410
19.5	Fuzzy-PI-Regler	416
19.6	Fuzzy-PID-Regler.....	417
20	Fuzzy-Regler im Regelkreis	419
20.1	Einsatz von Fuzzy-Reglern	419
20.2	Regelung einer Verzögerungsstrecke mit einem Fuzzy-Regler	420
20.2.1	Fuzzy-PI-Regler mit MAX-PROD-Inferenz und Singletons als Ausgangs-Fuzzy-Mengen.....	420

20.2.2	Fuzzy-PI-Regler mit MAX-MIN-Inferenz und Defuzzifizierung mittels der Schwerpunkt-Methode	422
20.2.3	Eingangs-Fuzzy-Mengen nur teilweise überlappend, MAX-PROD- Inferenzmethode und Singletons als Ausgangs-Fuzzy-Mengen	423
20.3	Regelung einer integrierenden Regelstrecke mit einem Fuzzy-Regler	425
20.4	Stabilität von Fuzzy-Regelungssystemen	431
A	Formeln zur Matrizenrechnung	433
A.1	Grundlagen	433
A.2	Determinanten, Minoren und Kofaktoren	439
A.3	Adjungierte und inverse Matrizen	442
A.4	Lineare Unabhängigkeit, Rang einer Matrix	445
A.5	Eigenwerte und Eigenvektoren.	447
A.6	Das Caley-Hamilton-Theorem.	450
A.7	Definite und semidefinite Matrizen, Normen von Vektoren und Matrizen, Orthogonalität	450
	Literaturverzeichnis	453
	Glossar deutsch – englisch	459
	Namens- und Sachverzeichnis	467

Teil I

Mehrgrößen-Regelsysteme

1 Zustandsdarstellung von Eingrößensystemen

Eine Einführung in die Regelung von technischen Systemen wird im Allgemeinen anhand von Eingrößensystemen durchgeführt. Diese Systeme oder Anlagen besitzen *eine* Stellgröße für ihre Beeinflussung und *eine* dominierende Ausgangs- oder Regelgröße. Beispiele hierfür sind ein Gleichstrommotor (Stellgröße: Steuerspannung und Regelgröße: Drehzahl oder Drehwinkel), ein Flüssigkeitsbehälter (Stellgröße: Zufluss pro Zeiteinheit und Regelgröße: Füllstand) oder eine Raumheizung (Stellgröße: Heizleistung und Regelgröße: Temperatur).

In diesem Kapitel soll zunächst eine Einführung in die Beschreibung von Eingrößensystemen durch Differentialgleichung und Übertragungsfunktion gegeben werden. Sowohl der Regler als auch die Regelstrecke werden derart beschrieben. Durch Messung und Rückführung der Regelgröße, Soll-/Istwertvergleich und Verwendung eines Reglers entsteht dann der klassische *einschleifige* Regelkreis.

Die Betrachtung der Eingrößensysteme wird einführend am Beispiel des dynamischen Verhaltens und der Regelung eines permanenterregten Gleichstrommotors durchgeführt. An diesem Beispiel lässt sich die typische Untersuchung von Regelsystemen gut erläutern, da ein derartiger Motor die hinreichende Komplexität für die Analyse aufweist. Dabei werden auch die Anforderungen an die Auslegung von Regelkreisen kurz aufgeführt.

Ausgehend von dieser Einführung wird dann zur Beschreibung von dynamischen Systemen durch die *Zustandsgleichungen* übergegangen. Die Zustandsdarstellung wird zunächst allgemein an einem Beispiel zweiter Ordnung erläutert. Die Lösung wird dann auf Systeme n -ter Ordnung verallgemeinert. Da die Form der Zustandsdarstellung nicht eindeutig ist, werden einige unterschiedliche *kanonische* Formen der Zustandsdarstellung betrachtet.

1.1 Klassische Eingrößenregelung

Beschreibung. Bei der Regelung von Eingrößensystemen werden Regelstrecken mit *einer* Ein- und *einer* Ausgangsgröße, dargestellt als Block wie in Abb. 1.1, geregelt. Die Regelgröße bezeichnet man üblicherweise mit $x(t)$, das Stellsignal mit $y(t)$ und die Störgröße(n) mit $z(t)$.

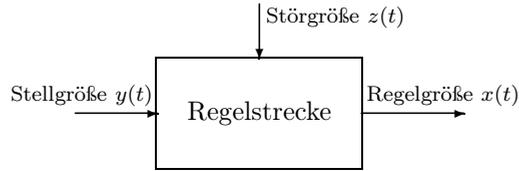


Abbildung 1.1: Blockdarstellung einer Regelstrecke

Die gleichungsmäßige Beschreibung des Übertragungsverhaltens einer derartigen Regelstrecke geht im Allgemeinen von den zugrunde liegenden Differentialgleichungen aus. Dies soll am Beispiel eines Gleichstrommotors erläutert werden, dessen technologische Ersatzdarstellung Abb. 1.2 zeigt:

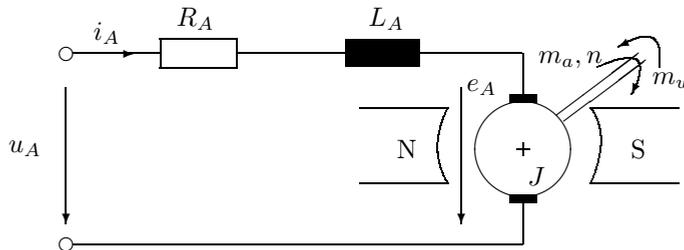


Abbildung 1.2: Technologische Ersatzdarstellung eines Gleichstrommotors

Die Grundgleichungen für die Beschreibung des Gleichstrommotors lauten¹:

$$\begin{array}{ll}
 u_A & = R_A i_A + L_A \frac{di_A}{dt} + e_A & \text{Maschengleichung} \\
 e_A & = 2\pi n \cdot c\Psi_f & \text{Induktionsgesetz} \\
 m_a & = i_A \cdot c\Psi_f & \text{Momentengleichung} \\
 m_a - m_w & = 2\pi J \cdot \frac{dn}{dt} & \text{Impulssatz (Bewegungsgl.).}
 \end{array}$$

Durch Einsetzen und Umformen ermittelt man dann die resultierende Differentialgleichung des Gleichstrommotors zu:

$$\frac{2\pi J L_A}{c\Psi_f} \cdot \ddot{n} + \frac{2\pi J R_A}{c\Psi_f} \cdot \dot{n} + 2\pi c\Psi_f \cdot n = u_A - \frac{R_A}{c\Psi_f} \cdot m_w - \frac{L_A}{c\Psi_f} \cdot \dot{m}_w. \quad (1.1)$$

Eingangsgröße des Motors ist die Ankerspannung $u_a(t)$ und die Ausgangsgröße ist die Drehzahl $n(t)$ (oder gegebenenfalls auch der Drehwinkel $\varphi(t)$). Das Lastmoment $m_w(t)$ ist die auf den Motor wirkende Störgröße.

¹Hierin bedeuten: J - Trägheitsmoment, R_A - Ankerkreiswiderstand, L_A - Ankerkreisinduktivität, Ψ_f - verketteter Fluss, c - Maschinenkonstante, $m_a(t)$ - Antriebsmoment, $m_w(t)$ - Lastmoment.

Diese Beschreibung des dynamischen Verhaltens des Gleichstrommotors durch eine Differentialgleichung wird in der Regelungstechnik im Allgemeinen überführt in die Beschreibung durch eine oder mehrere Übertragungsfunktionen:

$$N(s) = F_{S_y}(s) \cdot U_A(s) + F_{S_z}(s) \cdot M_W(s), \tag{1.2}$$

mit² $N(s) = \mathcal{L}\{n(t)\}$, $U_A(s) = \mathcal{L}\{u_A(t)\}$, $M_W(s) = \mathcal{L}\{m_W(t)\}$ und den Übertragungsfunktionen

$$F_{S_y}(s) = \frac{N(s)}{U_A(s)} = \frac{1}{\frac{2\pi J L_A}{c\Psi_f} \cdot s^2 + \frac{2\pi J R_A}{c\Psi_f} \cdot s + 2\pi c\Psi_f} \quad \text{und} \tag{1.3}$$

$$F_{S_z}(s) = \frac{N(s)}{M_W(s)} = \frac{-\frac{R_A}{c\Psi_f} - \frac{L_A}{c\Psi_f} s}{\frac{2\pi J L_A}{c\Psi_f} \cdot s^2 + \frac{2\pi J R_A}{c\Psi_f} \cdot s + 2\pi c\Psi_f}. \tag{1.4}$$

Die Blockdarstellung von Abb. 1.1 wird dann ersetzt durch die Blockdarstellung nach Abb. 1.3 mit den Übertragungsfunktionen als Blöcken in der Darstellung:

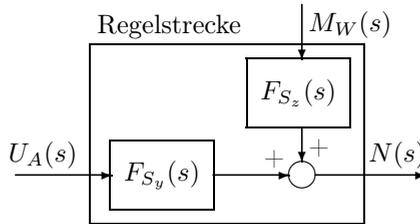


Abbildung 1.3: Blockdarstellung mit Übertragungsfunktionen

Nach Rückführung der Regelgröße und Entwurf eines Reglers mit der Übertragungsfunktion $F_R(s)$ entsteht dann der in Abb. 1.4 dargestellte *einschleifige* Regelkreis mit

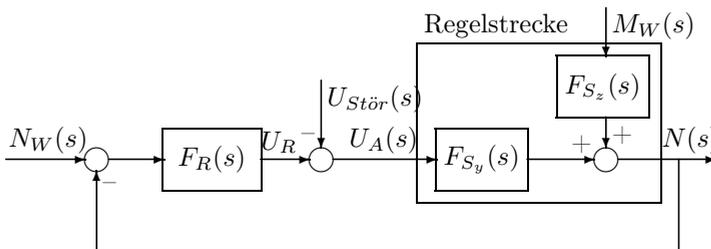


Abbildung 1.4: Einschleifiger Regelkreis

der Führungsgröße $N_W(s)$ und einer zusätzlich hinzugefügten Versorgungsstörgröße $U_{Stör}(s)$, wie z. B. Schwankungen der Ankerspannung.

²Mit $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$ wird die Laplace-Transformierte der Größe $x(t)$ bezeichnet.

Für die Regelung eines derartigen Systems hat sich der (reale) PID-Regler mit der Übertragungsfunktion

$$F_R(s) = \frac{X_a(s)}{X_e(s)} = K_P \cdot \frac{1 + T_N s + T_N T_V s^2}{T_N s \cdot (1 + T_D s)} \quad (1.5)$$

mit $X_a(s) = U_R(s)$, $X_e(s) = N_W(s) - N(s)$ und T_N , T_V und T_D als Zeitkonstanten, als der geeignete Regler erwiesen³.

Tritt keine Laststörung ($m_W(t)$) auf, so geht der obige Regelkreis nach Abb. 1.4 über in die Standarddarstellung eines einschleifigen Regelkreises nach Abb. 1.5. Der Entwurf der

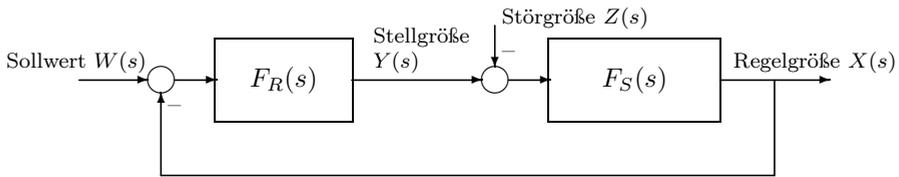


Abbildung 1.5: Einschleifiger Regelkreis

Übertragungsfunktion $F_R(s)$ ist die zentrale Aufgabe der klassischen Regelungstechnik. Ein dominierendes Entwurfsverfahren ist dabei das *Verfahren der dynamischen Kompensation*, bei dem Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion der Regelstrecke durch geeignete Nullstellen und Pole des Reglers kompensiert werden. Andere Entwurfsverfahren gehen auf grafische Darstellungen wie z. B. das *Bode-Diagramm* oder die *Wurzelortskurve* über und leiten unter Zuhilfenahme dieser Ortskurven die Übertragungsfunktion des Reglers ab.

Entwurfspanforderungen. Die zentralen Anforderungen an den Regelkreis beim Entwurf dieser Regler-Übertragungsfunktion $F_R(s)$ lauten dabei:

1. *Der Regelkreis muss stabil sein.* Ohne diese Hauptforderung ist die Erfüllung weiterer Anforderungen nicht möglich, bzw. hinfällig.
2. *Der Regelkreis soll ein „gutes“ Führungsverhalten aufweisen.* D. h., nach Vorgabe einer Führungsgröße $w(t)$ soll die Regelgröße $x(t)$ auf die Führungsgröße einschwingen. Dieser Einschwingvorgang ist näher zu spezifizieren. Falls die Führungsgröße zeitveränderlich ist, soll die Regelgröße der Führungsgröße folgen.
3. *Der Regelkreis soll ein „gutes“ Störverhalten aufweisen.* D. h., der Einfluss einer Störung $z(t)$ auf die Regelgröße $x(t)$ soll gering sein. Dieser Einfluss wird beschrieben durch Größen eines Einschwingvorgangs.

³Dabei soll außer Acht gelassen werden, dass die Verwendung *zweier* einschleifiger Regelkreise in Form einer Kaskadenregelung bei einem Gleichstrommotor bessere Ergebnisse liefert.

4. *Der Einfluss von Parameteränderungen auf das dynamische Verhalten des Regelkreises soll gering sein.* D. h., der Regelkreis soll möglichst unempfindlich (robust) gegenüber Schwankungen von Parametern (z. B. der Regelstrecke) sein.

Einen guten Überblick über die Methoden und Verfahren zum Entwurf geeigneter Regler findet man in der Literatur wie z. B. [19], [22], [43], [45], [53], [57], [62], [64], [65].

1.2 Zustandsgleichungen von Eingrößensystemen

1.2.1 Ermittlung aus der Differentialgleichung, Normalformen

Einführung. Die Beschreibung von dynamischen Systemen durch Zustandsgleichungen lässt sich anschaulich an einem System 2. Ordnung erklären. Dies könnte z. B. der Gleichstrommotor von Abschnitt 1.1 sein, bei dem zunächst das Störmoment $m_w(t)$ zu Null angenommen wird. Die Differentialgleichung eines derartigen Systems lautet dann in allgemeiner Form:

$$a_2 \ddot{x}_a + a_1 \dot{x}_a + a_0 x_a = b_0 x_e . \quad (1.6)$$

Hierin entspricht $x_e(t)$ der Eingangsgröße und $x_a(t)$ der Ausgangsgröße des Systems. Mit den Substitutionen

$$x_1 = x_a \quad \text{und} \quad (1.7)$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_a = x_2 \quad (1.8)$$

kann Gleichung 1.6 umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} \ddot{x}_a &= \dot{x}_2 = \frac{1}{a_2} \cdot [-a_1 \dot{x}_a - a_0 x_a + b_0 x_e] \\ &= \frac{1}{a_2} \cdot [-a_1 x_2 - a_0 x_1 + b_0 x_e] . \end{aligned} \quad (1.9)$$

Aus der Differentialgleichung 2. Ordnung werden zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung, dies sind die Gleichungen 1.8 und 1.9. Aus diesen zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung bildet man dann eine Vektordifferentialgleichung 1. Ordnung wie folgt:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \bullet = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b_0}{a_2} \end{bmatrix} \cdot x_e .$$

Die Ausgangsgröße $x_a(t)$ folgt dann aus Gleichung 1.7 zu

$$x_a = [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Nun werden die folgenden Abkürzungen⁴

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b_0}{a_2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}^T = [1 \ 0] \quad (1.10)$$

mit \mathbf{A} als Dynamikmatrix, \mathbf{b} als Eingangsvektor und \mathbf{c}^T als Ausgangsvektor eingeführt. Darin ist \mathbf{c}^T der transponierte Vektor von \mathbf{c} . Die Größen x_1 und x_2 heißen die Zustandsvariablen des Systems, sie bilden den Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a(t) \\ \dot{x}_a(t) \end{bmatrix}.$$

Mit diesen Abkürzungen kann dann die Differentialgleichung 2. Ordnung als Vektordifferentialgleichung 1. Ordnung in der allgemeinen Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot x_e \\ x_a &= \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \end{aligned}$$

geschrieben werden. Diese Darstellung einer Differentialgleichung durch eine Vektordifferentialgleichung mit den Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c} und dem Zustandsvektor \mathbf{x} nennt man die Zustandsdarstellung der Differentialgleichung.

Aufgabe 1.1: Berechnen Sie die Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c}^T und den Zustandsvektor \mathbf{x} für die folgende Differentialgleichung:

$$\ddot{x}_a(t) + 4\dot{x}_a(t) + 3x_a(t) = 2x_e(t).$$

Lösung: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}^T = [1 \ 0]$ und $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_a \\ \dot{x}_a \end{bmatrix}$. □

Aufgabe 1.2: Berechnen Sie die Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c}^T und den Zustandsvektor \mathbf{x} für die Differentialgleichung des Gleichstrommotors nach Gleichung 1.1 mit $u_A(t)$ als Eingangsgröße:

$$\frac{2\pi J L_A}{c\Psi_f} \cdot \ddot{n} + \frac{2\pi J R_A}{c\Psi_f} \cdot \dot{n} + 2\pi c\Psi_f \cdot n = u_A$$

⁴Fettgedruckte Großbuchstaben bezeichnen Matrizen und fettgedruckte Kleinbuchstaben bezeichnen Vektoren. Skalare Größen werden durch nicht fettgedruckte Kleinbuchstaben bezeichnet.

Lösung: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{(c\Psi_f)^2}{JL_A} & -\frac{R_A}{L_A} \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{c\Psi_f}{2\pi JL_A} \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}^T = [1 \ 0]$ und $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} n \\ \dot{n} \end{bmatrix}$. □

Sprungfähige Systeme, Regelungsnormalform der Zustandsdarstellung. Die zwei Differentialgleichungen 1.8 und 1.9 können in einem Simulationsdiagramm (siehe Abb. 1.6) dargestellt werden. Darin entspricht der Block mit dem Integralzeichen einer Integration, und die anderen Blöcke stellen die Multiplikation mit einem konstanten Faktor dar.

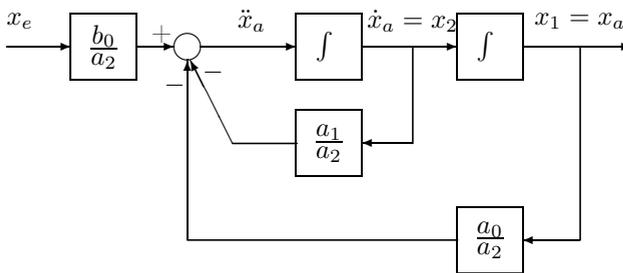


Abbildung 1.6: Simulationsdiagramm der Vektordifferentialgleichung

Mit diesem Simulationsdiagramm kann man sich auf einfache Art und Weise auch die Herleitung der Zustandsgleichungen für Differentialgleichungen mit *Ableitungen* der Eingangsgröße $x_e(t)$ klarmachen. Das Vorgehen soll wieder für eine Differentialgleichung 2. Ordnung erläutert werden. Die Differentialgleichung laute

$$a_2 \ddot{x}_a + a_1 \dot{x}_a + a_0 x_a = b_0 x_e + b_1 \dot{x}_e + b_2 \ddot{x}_e, \quad (1.11)$$

die Eingangsgröße $x_e(t)$ ist also bis zu zweimal abgeleitet. Systeme, bei denen die höchste Ableitung der Größen $x_a(t)$ und $x_e(t)$ in der Differentialgleichung identisch ist, bezeichnet man als *sprungfähige Systeme*. Bei einem Sprung der Eingangsgröße $x_e(t)$ ändert sich auch die Ausgangsgröße sprungförmig. Anstelle der Differentialgleichung 1.11 wird zunächst die reduzierte Differentialgleichung

$$a_2 \ddot{x}_1 + a_1 \dot{x}_1 + a_0 x_1 = x_e \quad (1.12)$$

analysiert. Für diese reduzierte Differentialgleichung gilt analog zu Abb. 1.6 das Simulationsdiagramm von Abb. 1.7.

Das reduzierte System hat als alleinige Eingangsgröße nur x_e , und die zugehörige Ausgangsgröße resultiert dann als $x_1(t)$. Die rechte Seite der Differentialgleichung 1.11, d. h. die Anregung der Differentialgleichung, lautet jedoch vollständig

$$b_0 x_e + b_1 \dot{x}_e + b_2 \ddot{x}_e.$$

Da Eingang x_e den Ausgang x_1 ergibt (siehe Abb. 1.7) bzw. Eingang $b_0 x_e$ den Ausgang $b_0 x_1$, muss Eingang $b_1 \dot{x}_e$ den Ausgang $b_1 \dot{x}_1$ ergeben (da die Differentiation eine lineare

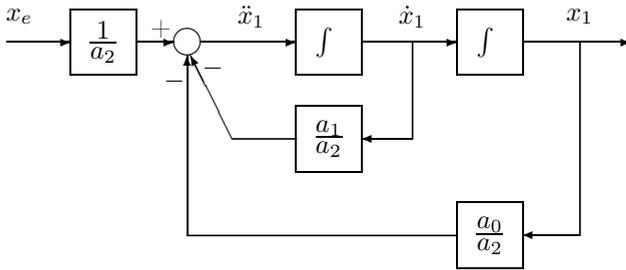


Abbildung 1.7: Simulationsdiagramm der reduzierten Differentialgleichung

Operation darstellt) und ebenso muss $b_2 \ddot{x}_e$ den Ausgang $b_2 \dot{x}_1$ erzeugen. Somit resultiert die Ausgangsgröße x_a dieser Differentialgleichung dann als lineare Überlagerung von

$$b_0 x_1 + b_1 \dot{x}_1 + b_2 \ddot{x}_1 \Rightarrow x_a .$$

Dieser Aufbau des Ausgangssignals x_a ergibt dann eine Erweiterung des Simulationsdiagramms 1.7 und ist in Abb. 1.8 dargestellt [36].

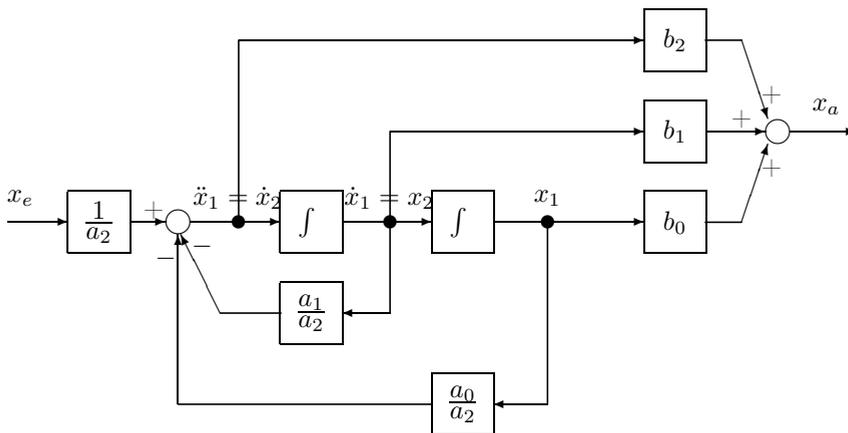


Abbildung 1.8: Simulationsdiagramm der vollständigen Differentialgleichung 2. Ordnung

Aus diesem Simulationsdiagramm 1.8 leitet man dann die Zustandsdarstellung der Differentialgleichung 2. Ordnung wie folgt ab. Es gilt:

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{1.13}$$

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = \frac{x_e}{a_2} - \frac{a_1}{a_2} x_2 - \frac{a_0}{a_2} x_1 \tag{1.14}$$

$$x_a = b_0 x_1 + b_1 x_2 + b_2 \dot{x}_2 . \tag{1.15}$$

Diese Gleichungen 1.13 und 1.14 ergeben die Vektordifferentialgleichung

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \bullet = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_2} \end{bmatrix} \cdot x_e$$

mit der Dynamikmatrix \mathbf{A} und dem Eingangsvektor \mathbf{b} wie folgt:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_2} \end{bmatrix} . \quad (1.16)$$

Das Einsetzen von Gleichung 1.14 in 1.15 ergibt dann

$$\begin{aligned} x_a &= b_0 x_1 + b_1 x_2 + b_2 \dot{x}_2 \\ &= b_0 x_1 + b_1 x_2 + b_2 \cdot \left\{ \frac{x_e}{a_2} - \frac{a_1}{a_2} x_2 - \frac{a_0}{a_2} x_1 \right\} \\ &= \left[b_0 - b_2 \frac{a_0}{a_2} \right] \cdot x_1 + \left[b_1 - b_2 \frac{a_1}{a_2} \right] \cdot x_2 + \frac{b_2}{a_2} x_e \\ &= \left[b_0 - b_2 \frac{a_0}{a_2} \quad b_1 - b_2 \frac{a_1}{a_2} \right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \left[\frac{b_2}{a_2} \right] \cdot x_e . \end{aligned} \quad (1.17)$$

Dann lauten die mit Ausgangsvektor \mathbf{c}^T und Durchgangsfaktor d bezeichneten Größen

$$\mathbf{c}^T = \left[b_0 - b_2 \frac{a_0}{a_2} \quad b_1 - b_2 \frac{a_1}{a_2} \right] \quad d = \left[\frac{b_2}{a_2} \right] . \quad (1.18)$$

Dieser Durchgangsfaktor d ist nur bei einem sprungfähigen System, d. h. bei einer Differentialgleichung mit gleicher Ordnung der höchsten Ableitung von x_a und x_e von Null verschieden.

Die Extrapolation der Ergebnisse von Gleichung 1.16 und 1.18 führt von der Differentialgleichung n -ter Ordnung in der Form

$$a_n x_a^n + a_{n-1} x_a^{n-1} + \dots + a_1 \dot{x}_a + a_0 x_a = b_0 x_e + b_1 \dot{x}_e + \dots + b_n x_e^n$$

zu den dazugehörigen Zustandsgleichungen:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot x_e \quad (1.19)$$

$$x_a = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} + d \cdot x_e , \quad (1.20)$$

mit den Matrizen und Vektoren

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \cdots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

$$\mathbf{c}^T = \left[b_0 - b_n \frac{a_0}{a_n} \quad b_1 - b_n \frac{a_1}{a_n} \quad b_2 - b_n \frac{a_2}{a_n} \quad \cdots \quad b_{n-1} - b_n \frac{a_{n-1}}{a_n} \right] \quad (1.22)$$

$$d = \left[\frac{b_n}{a_n} \right] , \quad (1.23)$$

und dem Zustandsvektor \mathbf{x} zu

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} .$$

Diese Form der Zustandsdarstellung bezeichnet man als *Regelungsnormalform* und die Form der \mathbf{A} -Matrix bezeichnet man als *Frobenius-Form*. Man kann die Zustandsbeschreibung dieses Systems mit den Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c}^T und d und dem Zustandsvektor \mathbf{x} (Anfangszustand $\mathbf{x}(0)$) in einem Blockschaltbild, wie in Abb. 1.9 gezeigt, darstellen⁵. Dabei repräsentiert der Block mit dem Integralzeichen die Integration des Zustandsvektors \mathbf{x} . Die anderen Blöcke enthalten die jeweiligen Systemmatrizen.

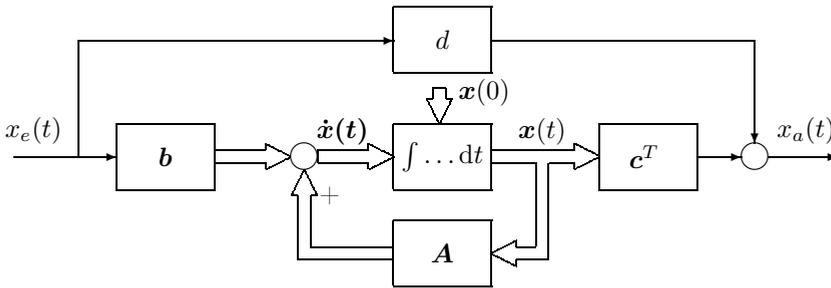


Abbildung 1.9: Allgemeines Blockschaltbild der Zustandsbeschreibung

Nicht sprunghafte Systeme. Bei einem nicht sprunghaften System (d. h. $b_n = 0$) vereinfachen sich bei unveränderter Dynamikmatrix \mathbf{A} und unverändertem Eingangsvektor \mathbf{b} der Ausgangsvektor \mathbf{c}^T und der Durchgangsfaktor d zu:

$$\mathbf{c}^T = [b_0 \ b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_{n-1}] \quad \text{und} \quad d = 0 . \quad (1.24)$$

Besonders einfach wird die Zustandsdarstellung für eine normierte Differentialgleichung mit $a_n = 1$ und $b_n = 0$

$$\overset{n}{x}_a + a_{n-1} \overset{n-1}{x}_a + \cdots + a_1 \dot{x}_a + a_0 x_a = b_0 x_e + b_1 \dot{x}_e + \cdots + b_{n-1} \overset{n-1}{x}_e .$$

Dann besitzt für diese Differentialgleichung die *Regelungsnormalform* die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

$$\mathbf{c}^T = [b_0 \ b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_{n-1}] \quad d = 0 . \quad (1.26)$$

⁵Es werden vektorielle Größen im Blockschaltbild durch breite Pfeile dargestellt.

In der letzten Zeile der Matrix \mathbf{A} stehen die Koeffizienten a_i mit negativem Vorzeichen. Oberhalb der Hauptdiagonalen von \mathbf{A} steht eine Eins, alle weiteren Elemente von \mathbf{A} sind Null. Der Vektor \mathbf{c}^T enthält die Koeffizienten b_i . Vektor \mathbf{b} ist bis auf das letzte Element gleich Null.

Die normierte Blockdarstellung dieser Form mit $a_n = 1$, $b_n \neq 0$ und einzelnen Integratoren zeigt Abb. 1.10. Die mit einem Faktor multiplizierte Aufsummierung der x_i und ihrer Ableitungen ergibt die Ausgangsgröße x_a .

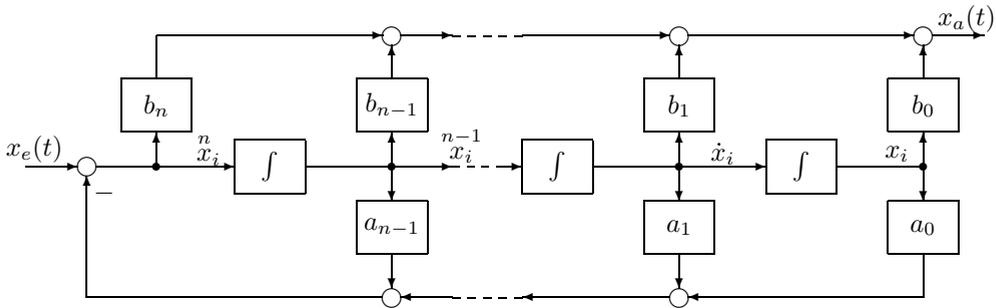


Abbildung 1.10: Normierte Blockdarstellung der Regulationsnormalform

Aufgabe 1.3: Berechnen Sie die Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c}^T in Regulationsnormalform und den Zustandsvektor \mathbf{x} für die folgende Differentialgleichung:

$$\ddot{x}_a(t) + 6\dot{x}_a(t) + 11x_a(t) = 3x_e(t).$$

Lösung: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}^T = [3 \ 0 \ 0]$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

□

Aufgabe 1.4: Berechnen Sie die Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c}^T in Regulationsnormalform und den Zustandsvektor \mathbf{x} für die folgende Differentialgleichung:

$$\ddot{x}_a(t) + 2\dot{x}_a(t) + 4x_a(t) = x_e(t) + 3\dot{x}_e(t) + 2\ddot{x}_e(t).$$

Lösung: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}^T = [1 \ 3 \ 2]$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

□

Aufgabe 1.5: Berechnen Sie die Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c}^T und d in Regelungsnormalform sowie den Zustandsvektor \mathbf{x} für die folgende Differentialgleichung:

$$2 \ddot{x}_a(t) + 4\dot{x}_a(t) + 5x_a(t) + 3x_a(t) = x_e(t) + 3\dot{x}_e(t) + 4\ddot{x}_e(t) + 2 \ddot{x}_e(t) .$$

Lösung: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1,5 & -2,5 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}^T = [-2 \ -2 \ 0]$ sowie

$$d = 1 \text{ und } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} .$$

□

Beobachtungsnormalform. Die als *Beobachtungsnormalform* bezeichnete Darstellung soll anhand einer Differentialgleichung dritter Ordnung entwickelt werden. Es gelte die Differentialgleichung

$$\ddot{x}_a + a_2\dot{x}_a + a_1x_a + a_0x_a = b_0x_e + b_1\dot{x}_e + b_2\ddot{x}_e .$$

Es wird als erstes der Term a_0x_a auf die rechte Seite gebracht und die Zustandsvariable \dot{x}_1 definiert:

$$\ddot{x}_a + a_2\dot{x}_a + a_1x_a = \overbrace{b_0x_e - a_0x_a}^{= \dot{x}_1} + b_1\dot{x}_e + b_2\ddot{x}_e = b_1\dot{x}_e + \dot{x}_1 + b_2\ddot{x}_e .$$

Danach bringt man den Term a_1x_a auf die rechte Seite und definiert die Zustandsvariable \ddot{x}_2 :

$$\ddot{x}_a + a_2\dot{x}_a = \overbrace{b_1\dot{x}_e + \dot{x}_1 - a_1x_a}^{= \ddot{x}_2} + b_2\ddot{x}_e = b_2\ddot{x}_e + \ddot{x}_2 .$$

Zuletzt bringt man den Term $a_2\dot{x}_a$ auf die rechte Seite und definiert die Zustandsvariable $\ddot{x}_3 = \ddot{x}_a$, d. h. $x_3 = x_a$:

$$\ddot{x}_a = \overbrace{b_2\ddot{x}_e + \ddot{x}_2 - a_2\dot{x}_a}^{= \ddot{x}_3} = \ddot{x}_3 .$$

Die Zusammenfassung der eingeführten Definitionen der Zustandsvariablen ergibt:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= b_0x_e - a_0x_a \\ \dot{x}_2 &= b_1x_e + x_1 - a_1x_a \\ \dot{x}_3 &= b_2x_e + x_2 - a_2x_a \\ x_a &= x_3 \end{aligned}$$

Daraus resultiert die Zustandsdarstellung

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \cdot x_e \quad \text{und}$$

$$x_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} .$$

Abb. 1.11 zeigt eine Blockdarstellung dieses Systems in Beobachtungsnormalform.

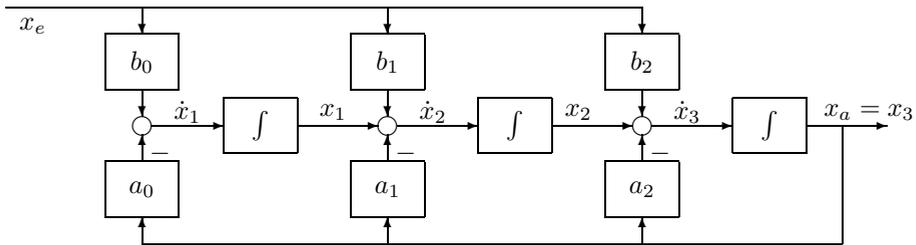


Abbildung 1.11: Blockdarstellung der Beobachtungsnormalform

Die Erweiterung dieser Darstellung für eine normierte Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$\overset{n}{x}_a + \dots + a_2 \overset{2}{x}_a + a_1 \overset{1}{x}_a + a_0 x_a = b_0 x_e + b_1 \overset{1}{x}_e + \dots + b_{n-1} \overset{n-1}{x}_e$$

ergibt die Zustandsdarstellung in *Beobachtungsnormalform* als

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \cdot x_e \quad \text{und} \quad (1.27)$$

$$x_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} . \quad (1.28)$$

In dieser Beobachtungsnormalform lassen sich besonders einfach mehrere Eingangsgrößen, wie z. B. Stell- und Störsignal bei der Differentialgleichung des Gleichstrommotors,

berücksichtigen. Die Zustandsdarstellung des Gleichstrommotors nach Gleichung 1.1 lautet dann

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{(c\Psi_f)^2}{JL_A} \\ 1 & -\frac{R_A}{L_A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c\Psi_f}{2\pi JL_A} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_A + \begin{bmatrix} -\frac{R_A}{2\pi JL_A} \\ -\frac{1}{2\pi J} \end{bmatrix} \cdot m_w$$

$$n = [0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

bzw. in Kurzform

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot u_a + \mathbf{b}' \cdot m_w$$

$$n = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}.$$

Das Blockschaltbild dieser Zustandsdarstellung zeigt Abb. 1.12.

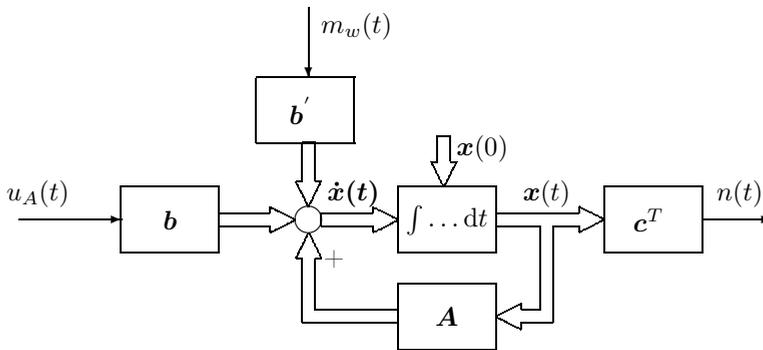


Abbildung 1.12: Blockschaltbild des Gleichstrommotors mit zwei Eingangsgrößen

Diagonalform der Zustandsdarstellung. Die Repräsentation einer Differentialgleichung durch ihre Zustandsdarstellung ist, wie die beiden obigen Normalformen zeigen, nicht eindeutig. Der nachfolgenden Differentialgleichung mit $m \leq n$

$$a_n \overset{n}{x}_a + \dots + a_2 \ddot{x}_a + a_1 \dot{x}_a + a_0 x_a = b_0 x_e + b_1 \dot{x}_e + \dots + b_m \overset{m}{x}_e$$

entspricht die Übertragungsfunktion

$$F(s) = \frac{X_a(s)}{X_e(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n}.$$

Die Residuendarstellung dieser Übertragungsfunktion lautet für *einfache* Pole s_{pi} von $F(s)$

$$F(s) = \frac{X_a(s)}{X_e(s)} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{s - s_{p1}} + \frac{\alpha_2}{s - s_{p2}} + \dots + \frac{\alpha_n}{s - s_{pn}}.$$

Die Terme α_i sind die *Residuen*. Der Term α_0 ist nur für $m = n$ von Null verschieden. Jeder Einzelterm $X_i(s)/X_e(s) = \frac{\alpha_i}{s - s_{pi}}$ entspricht hierbei einer Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{x}_i = s_{pi} \cdot x_i + \alpha_i \cdot x_e .$$

Der Ausgang $x_a(t)$ ist dann die Summe der n einzelnen Terme $x_i(t)$. Hieraus kann man direkt eine einfache Zustandsdarstellung ableiten zu

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \bullet = \begin{bmatrix} s_{p1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_{p2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{pn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \cdot x_e$$

$$x_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \alpha_0 \cdot x_e$$

mit den Systemmatrizen und Vektoren

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} s_{p1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_{p2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{pn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad d = [\alpha_0] . \quad (1.30)$$

Diese Darstellungsform bezeichnet man als *Diagonalform* der Zustandsdarstellung, oder auch als *Jordan'sche Normalform*.

Außer der bisher genannten Regelungs- und Beobachtungsnormalform sowie der Diagonalform existieren weitere Normalformen der Zustandsdarstellung von Systemen. Mit geeigneten Transformationen [36] (siehe auch Kapitel 3.3) können die Darstellungen von einer in die andere Normalform umgerechnet werden.

1.2.2 Ermittlung aus den Systemgleichungen

Eine weitere Methode zur Aufstellung der Zustandsgleichungen, die sich insbesondere bei den Mehrgrößensystemen als sehr vorteilhaft erweist, geht von den zugrunde liegenden Systemgleichungen aus. Dies soll am Beispiel des Gleichstrommotors erläutert werden.

Die vier Grundgleichungen für die Beschreibung des Gleichstrommotors lauten gemäß Seite 4

$$\begin{array}{lll}
 u_A & = & R_A i_A + L_A \frac{di_A}{dt} + e_A & \text{Maschengleichung} \\
 e_A & = & 2\pi n \cdot c\Psi_f & \text{Induktionsgesetz} \\
 m_a & = & i_A \cdot c\Psi_f & \text{Momentengleichung} \\
 m_a - m_w & = & 2\pi J \cdot \frac{dn}{dt} & \text{Impulssatz (Bewegungsgl.)}
 \end{array}$$

Herleitung ohne Lastmoment. Es sei für die folgenden Betrachtungen zunächst das Lastmoment $m_w(t) \equiv 0$. Nach Ersetzen von $e_A(t)$ in der Maschengleichung und $m_a(t)$ im Impulssatz resultieren die zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 u_A &= R_A i_A + L_A \frac{di_A}{dt} + 2\pi n \cdot c\Psi_f \\
 i_A \cdot c\Psi_f &= 2\pi J \cdot \frac{dn}{dt} .
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Nun bringt man die Terme mit der Ableitung auf die linke Seite und erhält:

$$\begin{aligned}
 \frac{di_A}{dt} &= \frac{1}{L_A} \cdot \{-R_A i_A - 2\pi n \cdot c\Psi_f + u_A\} \\
 \frac{dn}{dt} &= \frac{1}{2\pi J} \cdot \{i_A \cdot c\Psi_f\} .
 \end{aligned}$$

Wählt man nun als Zustandsvariablen die Größen $i_A(t)$ und $n(t)$, so lauten die Zustandsgleichungen

$$\begin{bmatrix} i_A(t) \\ n(t) \end{bmatrix} \bullet = \begin{bmatrix} -\frac{R_A}{L_A} & -\frac{2\pi c\Psi_f}{L_A} \\ \frac{c\Psi_f}{2\pi J} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_A(t) \\ n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_A} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_A(t) .$$

Die Ausgangsgröße $n(t)$ resultiert zu

$$n(t) = [0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} i_A(t) \\ n(t) \end{bmatrix} .$$

Es resultiert eine andere Zustandsdarstellung als in Aufgabe 1.2. Während dort die Zustandsvariablen die Größen $n(t)$ und $\dot{n}(t)$ waren, sind es bei der obigen Vorgehensweise die Größen $n(t)$ und $i_A(t)$. Die Zustandsvariablen sind im Allgemeinen physikalisch messbare Größen, bzw. man wählt sie als solche. Dies ist bei den Verfahren, die zu den speziellen Normalformen führen, nicht immer der Fall. Das Ein-/Ausgangsverhalten von $u_A(t)$ nach $n(t)$ ist dasselbe obwohl andere Zustandsvariablen vorliegen. Dies liegt daran, dass die Zustandsdarstellung bezüglich der Zustandsvariablen und der Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{b} ... nicht eindeutig ist, obwohl das Ein-/Ausgangsverhalten unverändert erhalten bleibt.

Herleitung mit Lastmoment. Ist das Lastmoment $m_w(t)$ nicht gleich Null, so lautet Gleichung 1.31

$$i_A \cdot c\Psi_f = 2\pi J \cdot \frac{dn}{dt} + m_w .$$

Aufgelöst nach \dot{n} folgt daraus:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{c\Psi_f}{2\pi J} \cdot i_A - \frac{1}{2\pi J} \cdot m_w .$$

Damit resultiert die Zustandsdarstellung für den Gleichstrommotor mit Stell- und Störgröße zu:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_A \\ \dot{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_A}{L_A} & -\frac{2\pi c\Psi_f}{L_A} \\ \frac{c\Psi_f}{2\pi J} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_A \\ n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_A} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_A + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2\pi J} \end{bmatrix} \cdot m_w .$$

Die Dynamikmatrix \mathbf{A} entspricht bei dieser Vorgehensweise keiner der zuvor behandelten Normalformen für Eingrößensysteme. Die Ausgangsgleichung für $n(t)$ bleibt unverändert

$$n(t) = [0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} i_A(t) \\ n(t) \end{bmatrix} .$$

Auch in dieser Form kann man die Regelstrecke *Gleichstrommotor* als Block mit zwei Eingängen und einem Ausgang in einem Blockschaltbild darstellen. Diese Blockdarstellung ist dann äquivalent zu der Darstellung nach Abb. 1.9, die Systemmatrizen sind nun jedoch andere.

Die in diesem Abschnitt behandelte Ermittlung der Zustandsgleichungen aus der Systemdarstellung stellt die Grundlage der Zustandsdarstellung von Mehrgrößensystemen dar.

1.3 Ermittlung der Übertragungsfunktion

Herleitung. Die Beschreibung eines Eingrößensystems durch die Zustandsdarstellung wurde in den Gleichungen 1.19 und 1.20 angegeben zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot x_e \tag{1.32}$$

$$x_a = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} + d \cdot x_e . \tag{1.33}$$

Diese Zustandsdarstellung kann mithilfe der Laplace-Transformation in eine Übertragungsfunktion überführt werden. Die Laplace-Transformation von Gleichung 1.32 ergibt

$$s \cdot \mathbf{X}(s) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(s) + \mathbf{b} \cdot X_e(s) ,$$

mit s als Laplace-Variable und $\mathbf{X}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\}$ bzw. $X_e(s) = \mathcal{L}\{x_e(t)\}$ als Laplace-transformierte Größen $\mathbf{x}(t)$ bzw. $x_e(t)$. Fasst man die Größen mit $\mathbf{X}(s)$ auf der linken Seite zusammen, so erhält man

$$\{s\mathbf{I} - \mathbf{A}\} \cdot \mathbf{X}(s) = \mathbf{b} \cdot X_e(s) ,$$

mit \mathbf{I} als Einheitsmatrix. Die Linksmultiplikation dieser Gleichung mit $\{s\mathbf{I} - \mathbf{A}\}^{-1}$ führt dann zu

$$\mathbf{X}(s) = \{s\mathbf{I} - \mathbf{A}\}^{-1} \cdot \mathbf{b} \cdot X_e(s) .$$

Setzt man diese Lösung für $\mathbf{X}(s)$ ein in die Laplace-transformierte Gleichung 1.33

$$X_a(s) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{X}(s) + d \cdot X_e(s) ,$$

(mit $X_a(s) = \mathcal{L}\{x_a(t)\}$) so resultiert für $X_a(s)$ die folgende Gleichung:

$$X_a(s) = \mathbf{c}^T \cdot \{s\mathbf{I} - \mathbf{A}\}^{-1} \cdot \mathbf{b} \cdot X_e(s) + d \cdot X_e(s) .$$

Abschließend fasst man noch die Terme mit $X_e(s)$ zusammen und erhält als Ergebnis die Gleichung

$$X_a(s) = [\mathbf{c}^T \cdot \{s\mathbf{I} - \mathbf{A}\}^{-1} \cdot \mathbf{b} + d] \cdot X_e(s) . \quad (1.34)$$

Die zu Gleichung 1.34 gehörende Übertragungsfunktion lautet dann

$$F(s) = \frac{X_a(s)}{X_e(s)} = \mathbf{c}^T \cdot \{s\mathbf{I} - \mathbf{A}\}^{-1} \cdot \mathbf{b} + d . \quad (1.35)$$

Die Anwendung dieser Gleichung soll an dem einfachen Beispiel von Aufgabe 1.1 erläutert werden.

Beispiel 1.1: Es seien die Zustandsmatrizen eines Systems gegeben zu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = [1 \ 0] \text{ und } d = 0.$$

Man beginnt mit der Berechnung der Matrix $\{s\mathbf{I} - \mathbf{A}\}$ welche man auch als *charakteristische Matrix*⁶ bezeichnet. Sie lautet hier

$$\{s\mathbf{I} - \mathbf{A}\} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s + 4 \end{bmatrix} .$$

⁶Näheres hierzu siehe Abschnitt 2.4.

Die Inverse dieser Matrix resultiert zu:

$$\{s\mathbf{I} - \mathbf{A}\}^{-1} = \frac{\text{Adj} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}}{\text{Det} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}}{s \cdot (s+4) + 3}. \quad (1.36)$$

Die Determinante der charakteristischen Matrix $\text{Det}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ also

$$\text{Det} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix} = s \cdot (s+4) + 3 = s^2 + 4s + 3 = (s+3) \cdot (s+1),$$

ist das *charakteristische Polynom*. Es gilt also allgemein die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} \text{Det}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \\ &= (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n) \end{aligned} \quad (1.37)$$

mit λ_i als Wurzeln⁷ der charakteristischen Gleichung ($\text{Det}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$) und a_i als Koeffizienten der charakteristischen Gleichung. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind gleichzeitig die *charakteristischen Werte* oder *Eigenwerte* der Matrix \mathbf{A} (siehe Anhang A.5). Diese Zusammenhänge werden in Kapitel 2 noch ausführlicher betrachtet.

Die Linksmultiplikation von Gleichung 1.36 mit $\mathbf{c}^T = [1 \ 0]$ ergibt dann

$$\mathbf{c}^T \cdot \{s\mathbf{I} - \mathbf{A}\}^{-1} = [1 \ 0] \cdot \frac{\begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}}{s \cdot (s+4) + 3} = \frac{\begin{bmatrix} s+4 & 1 \end{bmatrix}}{s \cdot (s+4) + 3}.$$

Die abschließende Rechtsmultiplikation mit $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ führt dann zu:

$$\mathbf{c}^T \{s\mathbf{I} - \mathbf{A}\}^{-1} \mathbf{b} = \frac{\begin{bmatrix} s+4 & 1 \end{bmatrix}}{s \cdot (s+4) + 3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} s+4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}{s \cdot (s+4) + 3} = \frac{2}{s^2 + 4s + 3}.$$

Damit lautet die Übertragungsfunktion $F(s)$ der gegebenen Zustandsdarstellung unter Beachtung von $d = 0$ dann

$$F(s) = \frac{X_a(s)}{X_e(s)} = \frac{2}{s^2 + 4s + 3}.$$

□

⁷Man bezeichnet die Wurzeln einer Gleichung mathematisch auch als Nullstellen der Gleichung.

Aufgabe 1.6: Die Zustandsmatrizen eines Systems sind gegeben zu: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$,
 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}^T = [2 \ 0]$ und $d = 0$.

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion dieser Zustandsdarstellung.

Lösung: $F(s) = \frac{2s + 14}{s^2 + 5s + 2}$ □

Aufgabe 1.7: Die Zustandsmatrizen eines Systems sind gegeben zu: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -2 \end{bmatrix}$,
 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}^T = [1 \ 3 \ 2]$ und $d = 0$.

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion dieser Zustandsdarstellung.

Lösung: $F(s) = \frac{2s^2 + 3s + 1}{s^3 + 2s^2 + 4s + 3}$ □

Aufgabe 1.8: Die Zustandsmatrizen eines Systems sind gegeben zu: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$,
 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}^T = [2 \ 1]$ und $d = 1$.

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion dieser Zustandsdarstellung.

Lösung: $F(s) = \frac{s^2 + 7s + 18}{s^2 + 3s + 2}$ □

2 Zustandsdarstellung von Mehrgrößensystemen

Allgemeines. Im Unterschied zu den Eingrößensystemen weisen die Mehrgrößensysteme *mehrere* Eingangsgrößen und *mehrere* Ausgangsgrößen auf. Beispiele hierfür sind ein Hydrauliksystem bestehend aus mehreren Behältern mit Zu- und Abflüssen (Stellgrößen: Zufluss 1, 2 ... und Regelgrößen: Füllstand 1, 2 ...), die Längsbewegung eines Flugzeugs (Stellgrößen: Höhenruder und Schub, Regelgrößen: Flughöhe und Geschwindigkeit), ein Dampferzeuger (Stellgrößen: Frischwassereinspeisung und Brennstoffzufuhr, Regelgrößen: Dampfdruck und Dampftemperatur).

Auch hier werden die interessierenden Regelgrößen (Istwerte) mit den entsprechenden Sollwerten verglichen und als Eingangsgrößen in einen Mehrgrößenregler geführt. Dieser liefert dann die Stellsignale, die dafür sorgen, dass die Regelgrößen zu den Sollwerten geführt werden.

Mehrgrößen-Regelsysteme können wie Eingrößensysteme sowohl im Zeitbereich durch Differentialgleichungen als auch im Frequenzbereich durch Übertragungsfunktionen beschrieben werden. Beide Darstellungen können ineinander überführt werden. Das Schwergewicht bei den Untersuchungen soll hier auf die Darstellung im Zeitbereich gelegt werden. Auf die Analogie zu Eingrößensystemen wird an den Stellen wo es möglich ist hingewiesen.

2.1 Mehrgrößensysteme

2.1.1 Einführung

Definitionen. Systeme mit mehreren Eingangs- und Ausgangsgrößen bezeichnet man in der Regelungstechnik als Mehrgrößensysteme oder als Mehrgrößen-Regelsysteme. Es wirken gleichzeitig mehrere Eingangsgrößen auf das System ein und beeinflussen wechselseitig die vorhandenen Ausgangsgrößen. Die Ein- und Ausgangsgrößen werden zu Vektoren wie folgt zusammengefasst¹:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_s(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_q(t) \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

¹Es wird ab hier die für die Zustandsdarstellung von Systemen übliche Schreibweise mit $\mathbf{u} = \mathbf{x}_e$ als Eingangsvektor und $\mathbf{y} = \mathbf{x}_a$ als Ausgangsvektor verwendet.

mit $\mathbf{u}(t)$ als Vektor der r Stellgrößen, $\mathbf{y}(t)$ als Vektor der s Ausgangsgrößen und $\mathbf{z}(t)$ als Vektor der q Störgrößen. Der Übergang zu diesen im Vergleich zum Eingrößensystem geänderten Bezeichnungen ist durch die in Kapitel 1 eingeführte Zustandsdarstellung bedingt.

Die Blockdarstellung² einer Mehrgrößen-Regelstrecke zeigt Abb. 2.1.

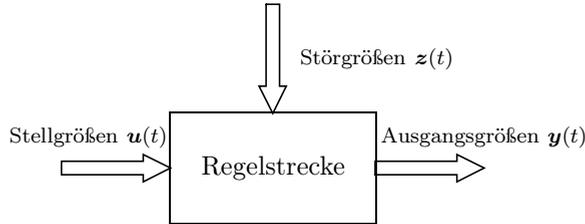


Abbildung 2.1: Mehrgrößen-Regelstrecke

Jede der Stell- bzw. Störgrößen u_α , $\alpha \in \{1 \dots r\}$, bzw. z_β , $\beta \in \{1 \dots q\}$, beeinflusst eine oder mehrere der Ausgangsgrößen y_γ , $\gamma \in \{1 \dots s\}$. Ein- und Ausgangsgrößen sind also

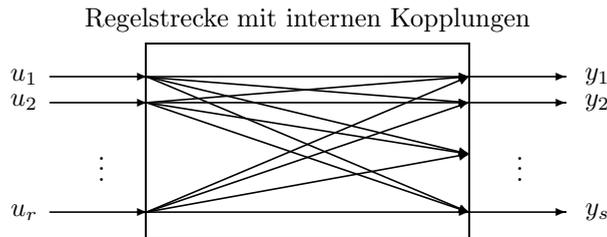


Abbildung 2.2: Mehrgrößen-Regelstrecke mit internen Kopplungen

miteinander verkoppelt. Dies deutet die Abb. 2.2 (für $\mathbf{z}(t) \equiv \mathbf{0}$) an.

Diese Regelstrecken mit mehreren Eingangs- und Ausgangsgrößen werden mit Reglern geregelt, die ebenfalls mehrere Ein- und Ausgangsgrößen enthalten. Es liegen mehrere Regelgrößen und somit auch mehrere Sollwerte vor. Somit entsteht ein mehrschleifiger Regelkreis, wie ihn Abb. 2.3 darstellt.

Bevor auf die mathematische Beschreibung derartiger Mehrgrößen-Regelstrecken sowie auf die Beschreibung und den Entwurf der Mehrgrößenregler eingegangen wird, sollen zunächst einige Beispiele für diese Mehrgrößen-Regelsysteme vorgestellt werden.

²Es werden vektorielle Größen in der Blockdarstellung als breite Pfeile hervorgehoben.

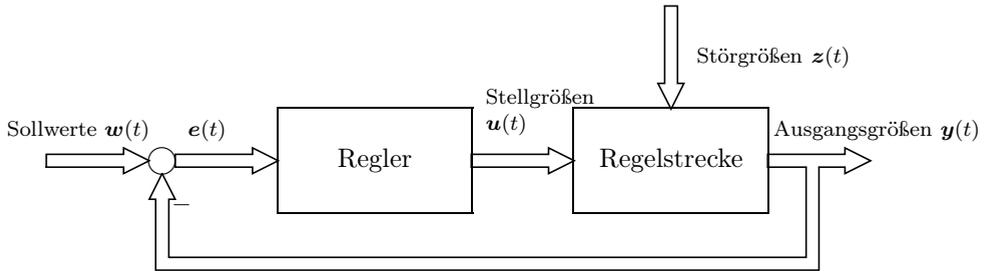


Abbildung 2.3: Mehrschleifiger Regelkreis – Mehrgrößen-Regelsystem

2.1.2 Beispiele von Mehrgrößensystemen

Beispiel 2.1 Hydraulik-Kaskade: Ein Hydrauliksystem, bestehend aus drei verbundenen Flüssigkeitsbehältern, enthalte die Stellgrößen³ Q_{Zu1} und Q_{Zu3} und die zwei Störgrößen Q_{Ab2} und Q_{Ab3} . Der Füllstand h_1 und h_3 in den Behältern 1 und 3 soll geregelt werden. Abb. 2.4 zeigt die technologische Ersatzdarstellung dieser Regelstrecke.

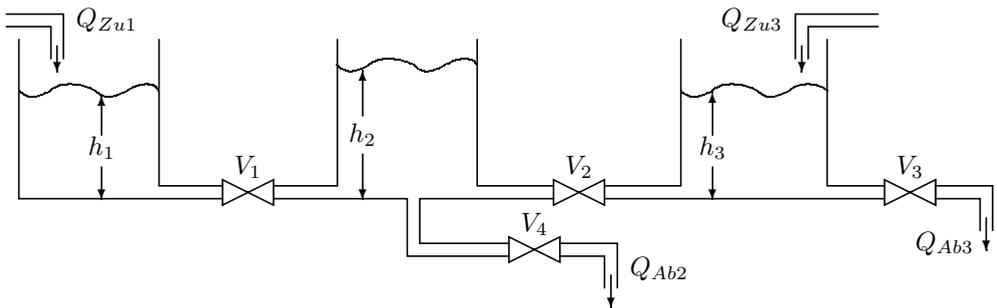


Abbildung 2.4: Regelstrecke Hydraulik-Kaskade

Die Bauteile V_1 bis V_4 sollen Ventile darstellen. Aus technischen Gründen kann z. B. die Regelgröße h_2 nicht gemessen werden, sondern nur die Größen h_1 und h_3 sind messtechnisch erfassbar. Aufgrund der Verkopplung der drei Behälter ist die Stellgröße Q_{Zu1} nicht nur für Behälter 1 zuständig, sondern sie wirkt ebenso auf Behälter 2 und 3. Entsprechendes gilt für die Stellgröße Q_{Zu3} und die Störgrößen Q_{Ab2} und Q_{Ab3} .

³Mit der Größe Q als Menge pro Zeiteinheit.

Die klassische Eingrößenregelung kann diese Regelaufgabe nicht bewältigen, da die Systemgrößen Druck, Füllstand, Zufluss und Abfluss sich gegenseitig beeinflussen. Dies ist eine typische Aufgabe für eine Mehrgrößenregelung.

Beispiel 2.2 Hubschrauber-Schwebeflug: Die Bewegung eines Hubschraubers im Schwebeflug stellt ebenfalls ein Mehrgrößen-Regelsystem dar. Abb. 2.5 zeigt die Aufsicht und Seitenansichten eines Hubschraubers.

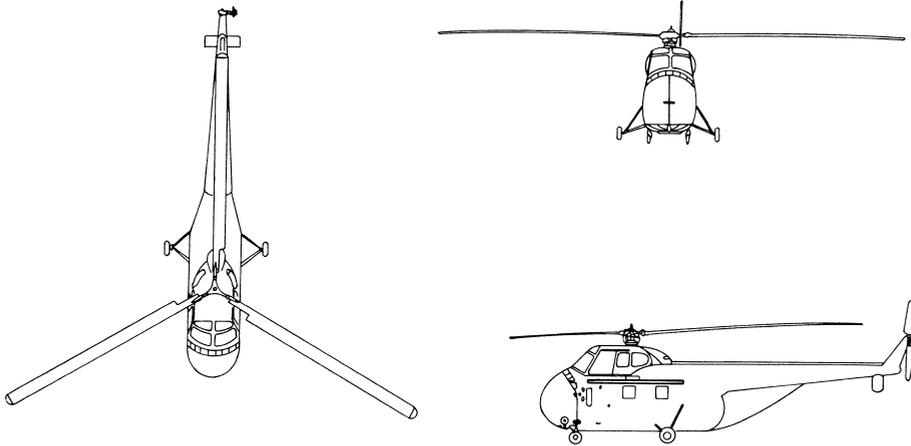


Abbildung 2.5: Aufsicht und Seitenansichten eines Hubschraubers [54]

Stellgrößen für die Bewegung des Hubschraubers sind z. B. der Anstellwinkel des Hauptrotors α_M und des Heckrotors α_T . Ausgangsgrößen sind z. B. die Höhe $z(t)$ und der Gierwinkel⁴ $\Psi(t)$. Auch bei diesem Beispiel sind die Systemgrößen, wie z. B. Höhe z , Vertikalgeschwindigkeit \dot{z} , Gierwinkel Ψ , Gierwinkelgeschwindigkeit $\dot{\Psi}$ sowie Rotordrehzahl Ω miteinander verkoppelt. Eine oder mehrere Eingrößenregelungen sind nicht in der Lage, das System zufriedenstellend zu regeln.

Beispiel 2.3 Destillationskolonne: In einer Destillationskolonne soll die aus zwei Bestandteilen bestehende Flüssigkeit mittels Destillation in ihre beiden Bestandteile zerlegt werden. In Abb. 2.6 ist die technologische Ersatzdarstellung gezeigt.

Das Flüssigkeitsgemisch wird bei a in die Anlage eingefüllt. Der schwerer siedende Bestandteil sinkt in der mit Füllkörpern und Zwischenböden gefüllten Kolonne hinab und sammelt sich im unteren Teil, dem „Sumpf“. Die mit Dampf beheizte Heizschlange im Sumpf trennt die leichter siedenden Bestandteile, die sich als Dampf im „Kopf“ der Kolonne sammeln und im Kühler d kondensieren. Das leichter siedende Produkt wird bei

⁴Der Gierwinkel ist der Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor des Hubschraubers und seiner Längsachse.

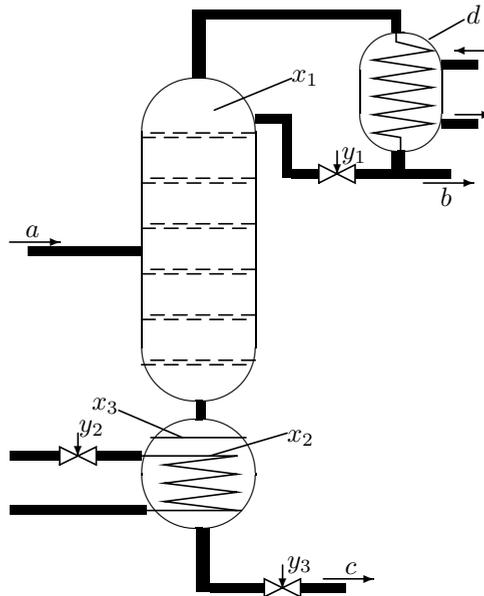


Abbildung 2.6: Aufbau einer Destillationskolonne

b abgezogen und das schwerer siedende bei c . Mehrere Regler regeln die Temperatur im Kolonnenkopf bzw. Temperatur und Füllstand im Sumpf. Ist der Reinheitsgrad der Produkte b und c nicht ausreichend, so können diese Produkte bei a wieder dem Prozess zugeführt werden. Regelgrößen dieser Kolonne sind die Temperatur x_1 im Kopf, Temperatur x_2 und Füllstand x_3 im Sumpf und die betreffenden Stellgrößen sind die Ventilstellungen y_1 , y_2 und y_3 . Aufgrund der Verkopplung der Systemgrößen können auch hier die Größen unabhängig voneinander nicht zufriedenstellend geregelt werden, sodass eine Mehrgrößenregelung vorzunehmen ist.

Es ist ein Mehrgrößenregler so zu entwerfen, dass durch geeignete Rückführung der Mess-(Regel-)größen x_1 bis x_3 die Stellgrößen y_1 bis y_3 so angesteuert werden, dass die Regelgrößen die gewünschten Werte annehmen.

Beispiel 2.4 Dampferzeuger: In einem Dampferzeuger (Abb. 2.7) wird das zugeführte Speisewasser in einem Kessel erhitzt, um den Dampf zu erzeugen. Die Aufheizung des Speisewassers geschieht im Feuerraum des Kessels. Regelgrößen sind der Füllstand x_1 des Speisewasserbehälters, die entnommene Dampfmenge x_2 , die zugeführte Luftmenge x_3 sowie der Feuerraumdruck x_4 . Als Stellgrößen stehen zur Verfügung die Einstellung der zugeführten Speisewassermenge über ein Stellventil y_1 , die zugeführte Brennstoffmenge y_2 (hier z. B. Gas), die Stellklappe für die Regelung der zugeführten Luftmenge y_3 sowie die Stellklappe y_4 für die Regelung des Feuerraumdrucks. Als Störgrößen treten beispielsweise auf: der Heizwert des Brennstoffs, die Menge des entnommenen Dampfes, Speisewasserdruck und Speisewassertemperatur, die Verschmutzung der Feuerung ...

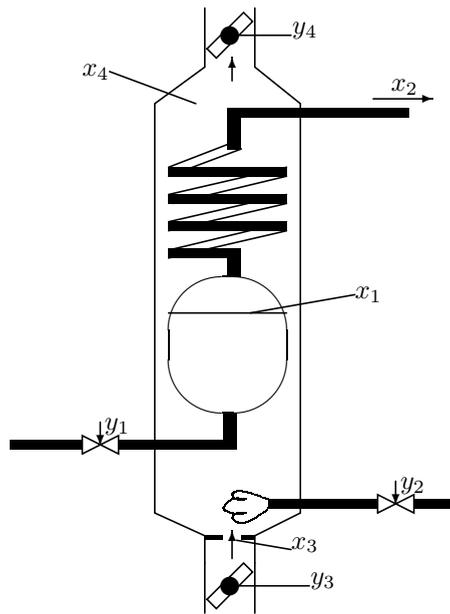


Abbildung 2.7: Aufbau eines Dampferzeugers

Auch hier ist das System so verkoppelt, dass ein getrennter Reglerentwurf für die Regelung der Größen x_1 bis x_4 nicht zu einem befriedigenden Ergebnis führt.

□

2.2 Zustandsgleichungen von Mehrgrößensystemen

2.2.1 Herleitung aus den Systemgleichungen

Grundlagen. Der Übergang von den Zustandsgleichungen für Eingrößensysteme zu den Zustandsgleichungen für Mehrgrößensysteme lässt sich formal sehr einfach an den Zustandsgleichungen 1.19 und 1.20 (mit $u = x_e$ und $y = x_a$) zeigen:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} + d \cdot u .\end{aligned}$$

In diesen Gleichungen sind die Ein- und Ausgangsgröße u und y skalare Größen. In einem Mehrgrößensystem sind die Ein- und Ausgangsgrößen \mathbf{u} und \mathbf{y} jedoch Vektoren.

Dann werden die zugehörigen Vektoren \mathbf{b} und \mathbf{c} und der Skalar d ebenfalls zu Matrizen und es resultiert die folgende Zustandsdarstellung:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} . \quad (2.3)$$

Auch hier ist die Matrix \mathbf{D} nur für sprungfähige Systeme von Null verschieden. Für ein System mit r Eingangsgrößen, s Ausgangsgrößen und einem Zustandsvektor der Dimension n ist \mathbf{A} eine $n \times n$ Matrix, \mathbf{B} eine $n \times r$ Matrix, \mathbf{C} eine $s \times n$ Matrix und \mathbf{D} eine $s \times r$ Matrix.

Die nachfolgende Umformung eines Systems vierter Ordnung in die Zustandsdarstellung zeigt die Ermittlung der Systemmatrizen und -vektoren. Das Gleichungssystem für ein System mit zwei Eingängen $u_1(t)$, $u_2(t)$ und zwei Ausgängen $y_1(t)$, $y_2(t)$ sei beispielsweise gegeben zu:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 - 3x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 + x_4 \\ \dot{x}_3 &= -x_2 - x_3 + 2u_2 \\ \dot{x}_4 &= x_1 - 3x_3 - 4x_4 + u_1 \quad \text{und} \\ y_1 &= x_2 + 2x_3 \\ y_2 &= x_2 + x_3 - x_4 + u_1 . \end{aligned}$$

Schreibt man diese Gleichungen in Matrizenform so resultiert:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \bullet = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} .$$

Die Matrizen des Systems in Zustandsdarstellung sind damit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

und Zustands-, Ein- und Ausgangsvektor des Systems lauten:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

In allgemeiner Form kann diese Zustandsdarstellung durch das Blockschaltbild nach Abb. 2.8 repräsentiert werden (Anfangszustand $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$).

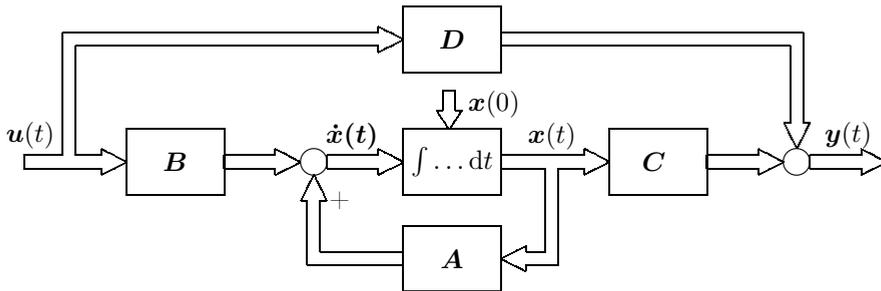


Abbildung 2.8: Blockschaltbild der Zustandsbeschreibung eines Mehrgrößensystems

Falls zusätzlich zum Eingangsvektor \mathbf{u} ein weiterer Eingangsvektor \mathbf{z} (z. B. ein Störeingang) vorhanden ist, dann wird dieser Eingang über eine zusätzliche Eingangs- und Durchgangsmatrix \mathbf{B}_z bzw. \mathbf{D}_z wie folgt erfasst:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{B}_z \cdot \mathbf{z} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{D}_z \cdot \mathbf{z}. \quad (2.5)$$

Aufgabe 2.1: Ermitteln Sie die Systemmatrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und gegebenenfalls \mathbf{D} des folgenden Differentialgleichungssystems:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 + 3x_4 + 2u_1 + u_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - 4x_2 + x_4 - u_2$$

$$\dot{x}_3 = 2x_1 - x_2 - x_3 + 3u_1$$

$$\dot{x}_4 = x_1 - 3x_3 - 2x_4 + u_1 \quad \text{und}$$

$$y_1 = x_1 - x_2 + 2x_3 - 3u_2$$

$$y_2 = 2x_2 + x_3 - x_4 + u_1.$$

Lösung:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Nachfolgend sollen einige Beispiele für die Zustandsdarstellung der technischen Mehrgrößensysteme gegeben werden, die zuvor vorgestellt wurden.

Beispiel 2.5 Hydraulik-Kaskade: Die technologische Ersatzdarstellung der untersuchten Hydraulik-Kaskade zeigt Abb. 2.4. Für eine derartige Kaskade gelten die folgenden Grundgleichungen:

$$p_i = \rho \cdot g \cdot h_i \quad \text{Druck im Behälter } i$$

$$Q_{Ein} - Q_{Aus} = A_i \cdot \frac{dh_i}{dt} \quad \text{Füllstandsgleichung Behälter } i$$

$$Q_{ab} = K_j \cdot (p_a - p_b) \quad \text{Ventilgleichung für Ventil } j$$

mit p_i als Druck in kPascal am Boden des jeweiligen Behälters, ρ in kg/dm^3 als spezifische Dichte der Flüssigkeit, g als Gravitationskonstante in m/s^2 , A_i als Grundfläche des i -ten Behälters in m^2 , K_j als Ventilkonstante des Ventils j in $\text{m}^4\text{s}/(10^3 \text{ kg})$, und dem Zu- und Abfluss pro Zeiteinheit Q in m^3/s sowie dem Ventildurchfluss pro Zeiteinheit Q_{ab} von Behälter a in Behälter b in m^3/s .

Stellt man für die drei Behälter mit ihren Zu- und Abflüssen und die Ventile nach obiger Vorgabe die Grundgleichungen auf, so lauten diese:

$$h_1 = \frac{1}{A_1} \cdot \int (Q_{Zu1} - Q_{12}) dt$$

$$h_2 = \frac{1}{A_2} \cdot \int (Q_{12} - Q_{23} - Q_{Ab2}) dt$$

$$h_3 = \frac{1}{A_3} \cdot \int (Q_{Zu3} + Q_{23} - Q_{Ab3}) dt$$

$$Q_{12} = K_1 \cdot (p_1 - p_2)$$

$$Q_{23} = K_2 \cdot (p_2 - p_3)$$

$$Q_{Ab2} = K_4 \cdot p_2$$

$$Q_{Ab3} = K_3 \cdot p_3$$

$$p_1 = \rho \cdot g \cdot h_1$$

$$p_2 = \rho \cdot g \cdot h_2$$

$$p_3 = \rho \cdot g \cdot h_3 .$$

Die Ableitungen der Gleichungen für den Füllstand h_i und das Einsetzen der Gleichungen für den Druck in die jeweiligen Durchflüsse ergibt

$$\begin{aligned}\dot{h}_1 &= \frac{1}{A_1} \cdot (Q_{Zu1} - Q_{12}) \\ \dot{h}_2 &= \frac{1}{A_2} \cdot (Q_{12} - Q_{23} - Q_{Ab2}) \\ \dot{h}_3 &= \frac{1}{A_3} \cdot (Q_{Zu3} + Q_{23} - Q_{Ab3}) \quad \text{und} \\ Q_{12} &= K_1 \rho g \cdot h_1 - K_1 \rho g \cdot h_2 \\ Q_{23} &= K_2 \rho g \cdot h_2 - K_2 \rho g \cdot h_3 .\end{aligned}$$

Das Einsetzen der Gleichungen für die Durchflüsse in die Ableitungen der Füllhöhen h_i ergibt die resultierenden Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{h}_1 &= \frac{1}{A_1} \cdot (Q_{Zu1} - K_1 \rho g \cdot h_1 + K_1 \rho g \cdot h_2) \\ \dot{h}_2 &= \frac{1}{A_2} \cdot (K_1 \rho g \cdot h_1 - K_1 \rho g \cdot h_2 - K_2 \rho g \cdot h_2 + K_2 \rho g \cdot h_3 - Q_{Ab2}) \\ \dot{h}_3 &= \frac{1}{A_3} \cdot (Q_{Zu3} + K_2 \rho g \cdot h_2 - K_2 \rho g \cdot h_3 - Q_{Ab3}) ,\end{aligned}$$

die nur noch in Matrixform zu schreiben sind. Damit lauten dann die Zustandsgleichungen der Hydraulik-Kaskade:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{K_1 \rho g}{A_1} & +\frac{K_1 \rho g}{A_1} & 0 \\ +\frac{K_1 \rho g}{A_2} & -\frac{K_1 \rho g}{A_2} - \frac{K_2 \rho g}{A_2} & +\frac{K_2 \rho g}{A_2} \\ 0 & +\frac{K_2 \rho g}{A_3} & -\frac{K_2 \rho g}{A_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_{Zu1} \\ Q_{Zu3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{A_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{A_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_{Ab2} \\ Q_{Ab3} \end{bmatrix} .\end{aligned}\quad (2.6)$$

Die Hydraulikkaskade ist ein verkoppeltes System, wie man an der Dynamikmatrix \mathbf{A} erkennt. Die Füllstände h_i beeinflussen sich gegenseitig, da sonst \mathbf{A} eine Diagonalmatrix wäre. Da nur h_1 und h_3 als Ausgangsgrößen gemessen werden, lautet die Ausgangsgleichung (mit $[h_i]$ in m):

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} .\quad (2.7)$$

Mit den Zahlenwerten $A_1 = 8 \text{ m}^2$, $A_2 = 10 \text{ m}^2$, $A_3 = 12 \text{ m}^2$, $\rho = 1 \text{ kg/dm}^3$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, $K_1 = K_2 = 0,1 \text{ m}^4\text{s}/(10^3\text{kg})$ lauten die Zustandsgleichungen dann:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0,125 & 0,125 & 0 \\ 0,1 & -0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,0833 & -0,0833 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0,1250 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,0833 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_{Zu1} \\ Q_{Zu3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0,1 & 0 \\ 0 & -0,0833 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_{Ab2} \\ Q_{Ab3} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Hierin sind $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$ der Zustandsvektor, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} Q_{Zu1} \\ Q_{Zu3} \end{bmatrix}$ der Stellvektor, $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} Q_{Ab2} \\ Q_{Ab3} \end{bmatrix}$ der Störvektor und $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_3 \end{bmatrix}$ der Ausgangsvektor. \square

Beispiel 2.6 Hubschrauber im Schwebeflug: Das nachfolgende Zustandsmodell beschreibt die Bewegung eines Helikopters im Schwebeflug (siehe Seite 26) in der Vertikalen und um die Hochachse [75].

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \Psi \\ \dot{\Psi} \\ \Omega \end{bmatrix} \bullet &= \begin{bmatrix} 0 & 0,4989 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,4022 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,008 & 0 \\ 0 & -0,009793 & 0 & -0,7637 & -0,9658 \\ 0 & 0,03684 & 0 & -1,498 & -3,000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \Psi \\ \dot{\Psi} \\ \Omega \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 12,04 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1,728 & -6,541 \\ 6,680 & -6,984 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_M \\ \alpha_T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{bmatrix} z \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \Psi \\ \dot{\Psi} \\ \Omega \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

In diesen Zustandsgleichungen sind die skalierten Zustandsvariablen die Höhe z (bezogen auf 1 m), die Vertikalgeschwindigkeit \dot{z} (bezogen auf 0,5 m/s), der Gierwinkel Ψ