

Theorie der Wechselströme

in

analytischer und graphischer Darstellung.

Von

Dr. Frederick Bedell und Dr. A. C. Crehore.

Autorisirte deutsche Uebersetzung

von

Alfred H. Bucherer.

~~~~~  
*Mit 112 in den Text gedruckten Figuren.*  
~~~~~

Berlin. 1895. **München.**
Julius Springer. **R. Oldenbourg.**

Vorwort.

--- --

Die Theorie der Wechselströme ist von grosser technischer und wissenschaftlicher Bedeutung. Die Verfasser haben es sich daher zur ihrer Aufgabe gemacht, diesen Gegenstand, der bisher von verschiedenen Schriftstellern nur fragmentarisch behandelt worden ist, systematisch zu entwickeln. Dieselben glauben hiermit einem langgefühlten Bedürfnisse entgegenzukommen.

Die Behandlung der Theorie der Wechselströme ist streng wissenschaftlich. Dabei haben sich aber die Verfasser bemüht, die Resultate in eine solche Form zu bringen, dass sie auch für denjenigen verständlich und brauchbar sind, welcher der logischen Ableitung derselben nicht folgen kann.

Da die graphischen Methoden den Vorzug der Anschaulichkeit besitzen, so ist der graphischen Behandlung besondere Beachtung geschenkt worden, besonders bei solchen Fällen, wo sich analytische Methoden als schwerfällig und verwickelt erweisen würden. — Das Buch zerfällt in zwei Hauptabtheilungen, die analytische und die graphische.

Im ersten Kapitel wird die Theorie des Magnetismus und der Elektrizität in elementarer Weise auf Grundlage der Experimente von Coulomb, Faraday, Joule und Ohm entwickelt. Die Darstellung dieser elementaren Principien ist in sich abgeschlossen, so dass zum Verständniss dieses Buches ein eingehenderes Studium der Elektrizität und des Magnetismus kaum erforderlich sein dürfte.

Alsdann wird die Energiegleichung aufgestellt und daraus werden dann in den folgenden Kapiteln die Differential- und Integralgleichungen des Stromes abgeleitet.

Die Wichtigkeit, die bei der Theorie der Wechselströme den harmonischen Funktionen beizumessen ist, hat die Verfasser veranlasst, diesem Gegenstande ein besonderes Kapitel zu widmen.

Die analytische Entwicklung der Theorie der Wechselströme ist in der Weise vorgenommen worden, dass zunächst Stromkreise, die Widerstand und Selbstinduktion enthalten, der Betrachtung unterzogen worden sind. Hieran schloss sich dann naturgemäss. die Behandlung von Stromkreisen mit Widerstand und Kapazität, und endlich von Stromkreisen, die Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität enthalten.

Bei dieser stufenweisen Entwicklung wurden die verschiedenen Arten von elektromotorischen Kräften nicht vernachlässigt. Ferner wird die Wirkung einer Aenderung der Konstanten in eingehender Weise erörtert und für specielle Fälle durch Kurven illustriert. Die Wechselwirkungen von Selbstinduktion und Kapazität werden alsdann erläutert. Diese Beziehungen und Gesetzmässigkeiten werden auch für die complicirteren Fälle dargelegt, wo Kapazität und Selbstinduktion vertheilt ist, wie z. B. bei unterseeischen Kabeln und Telephonsystemen.

Die graphische Behandlung ist analog der analytischen. Bei der graphischen Behandlung wurde besonderer Werth darauf gelegt, die Richtigkeit der angewandten Methoden durch die bereits früher erlangten analytischen Ergebnisse zu bestätigen. Obwohl in dieser Beziehung die graphischen Methoden sich auf die analytischen stützen, so haben sich die Verfasser doch bemüht, den graphischen Theil als ein Ganzes für sich zu behandeln, so dass die einzelnen Resultate auf technische Probleme ohne Weiteres anwendbar sind.

Es erübrigt, auf einen Punkt aufmerksam zu machen, der bei der Anwendung der Theorie der Wechselströme auf

technische Probleme von grosser Bedeutung ist. Es ist dies die Veränderlichkeit der Selbstinduktion L , welche wir bei unserer Behandlung des Gegenstandes als konstant angenommen haben. Es ist bekannt, dass die Permeabilität des Eisens für magnetische Induktion sich bei sehr hohen Graden der Magnetisirung ändert, d. h. kleiner wird. Dass die Permeabilität sich mit der Temperatur ändert, ist ebenfalls bekannt.

Da nun L der Permeabilität proportional ist, so ergibt sich, dass L streng genommen keine Konstante sein kann.

Wie bereits erwähnt, ist dieser Gegenstand schon früher, nicht allein von den Verfassern, sondern auch von mehreren bedeutenden Technikern, Dr. Duncan, Professor Ryan, Professor Ayrton, Dr. Sumpner, Dr. Fleming, Mr. Blakesley u. A. behandelt worden. Die Arbeit der Verfasser hat sich grösstentheils darauf beschränkt, das vorliegende treffliche Material systematisch zu ordnen.

Manche Abschnitte dieses Buches waren bereits vorher als besondere Aufsätze in verschiedenen Zeitschriften erschienen, so in der *Electrical World*, dem *London Electrician*, *American Journal of Science*, *Philosophical Magazine* und den *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*. Für die Erlaubniss des Abdrucks der Zeichnungen wünschen wir letzterer Gesellschaft an dieser Stelle unseren besonderen Dank auszudrücken.

Mit Ausnahme der Methode des äquivalenten Widerstandes, der Selbstinduktion und Kapazität für parallele Stromkreise erscheint der Inhalt des zweiten Theiles zum ersten Mal.

Auch die schon vorher veröffentlichten Theile des Buches sind in sorgfältigster Weise ergänzt und verbessert worden.

Cornell Universität, Ithaca, N.Y., August 1892.

Vorrede zur deutschen Ausgabe.

Indem wir dem deutschen Leser eine theoretische Abhandlung über Wechselströme bieten, hoffen wir einem wirklichen Bedürfniss Genüge zu thun. Denn obwohl die technische Seite dieses wichtigen Gegenstandes von Prof. Kittler, Gisbert Kapp und Anderen in geschickter und durchaus zufriedenstellender Weise behandelt worden ist, so fehlte es doch bisher an einer rein theoretischen Darstellung.

In Anbetracht des Zieles, welches wir bei Abfassung unseres Werkes im Auge hatten, hielten wir es für geboten, auf industrielle Punkte nicht einzugehen, vielmehr uns auf das rein Wissenschaftliche zu beschränken. — Seit dem Erscheinen der ersten englischen Auflage im Jahre 1892 ist den Wechselströmen eine ungemein rege Beachtung zu Theil geworden und Methoden, welche von uns zuerst entwickelt worden sind, sind seitdem allgemein bekannt geworden.

Wir wünschen Herrn Alfred H. Bucherer für seine mit Genauigkeit und Sachkenntniss ausgeführte Uebersetzung unseren wärmsten Dank auszudrücken.

Ithaca, N. Y., im März 1895.

Frederick Bedell.
Albert C. Crehore.

Inhaltsverzeichniss.

I. Theil. Analytische Behandlung.

Erstes Kapitel.

Einleitung zur Abhandlung über Stromkreise, welche Widerstand und Selbstinduktion enthalten.

Seite

Der Magnet. Kraftlinien. Pole. Gleichnamige Pole stoßen sich ab, ungleichnamige Pole ziehen sich an. Einheit der Polstärke. Gesetz der Anziehung. Intensität eines Magnetfeldes. Gleichförmiges Feld. Einheit der Kraftlinie. Ein Pol von der Einheit der Polstärke hat 4π Kraftlinien. Induktion. Der Strom entwickelt ein Feld. Einheit der Stromstärke. Die Anzahl der Kraftlinien sind dem Strome proportional. Selbstinduktion. E. M. K. Das Ohm'sche Gesetz. Quantität. Die Quantität ist bestimmt durch eine bestimmte Aenderung in der Anzahl der Kraftlinien. Die in Wärme umgesetzte Energie. Die ganze einem Stromkreise ertheilte Energie. Die dem Felde ertheilte Energie. Die Energiegleichung. Die Gleichung der E. M. K. 3—15

Zweites Kapitel.

Harmonische Funktionen.

Die Annahme einer harmonischen E. M. K. Einfache harmonische Bewegung. Amplitude. Periode. Winkelgeschwindigkeit. Epoche. Phase. Verzögerung. Graphische Darstellung einfach harmonischer Funktionen. Der Durchschnittswerth der Ordinaten der Sinuskurve. Werth des mittleren Quadrats der Ordinaten der Sinuskurve. Periodische Funktionen, welche aus mehreren einfachen Sinusfunktionen derselben Periode und ebenfalls ungleicher Periode bestehen. Fourier's Princip 16—25

Drittes Kapitel.

Stromkreise, welche Widerstand und Selbstinduktion enthalten.

E. M. K. und Energiegleichungen. Das Kennzeichen der Integrirbarkeit. Allgemeine Lösung, wenn $e = f(t)$. — I. Fall: Plötzliche Entfernung der elektromotorischen Kraft. Die Lösung nach der Differentialgleichung — aus der allgemeinen Gleichung. Die geometrische Konstruktion einer logarithmischen Kurve. — II. Fall:

	Seite
Plötzliche Einführung einer E.M.K. Die Lösung nach der Differentialgleichung — allgemeine Lösung. — III. Fall: Einfache harmonische elektromotorische Kraft. Die Lösung nach der allgemeinen Gleichung. Impedanz. Remanenz. Die Wirkung des Exponentialausdrucks beim Schliessen. — IV. Fall: Eine beliebige periodische elektromotorische Kraft. Die Summe zweier Sinusfunktionen. Die Summe einer beliebigen Anzahl von Sinusfunktionen	26—42

Viertes Kapitel.

Einleitung zur Abhandlung von Stromkreisen, die Widerstand und Kapazität enthalten.

Allgemeine Uebersicht. Ladung. Gesetz der Kraft. Die Einheit der Ladung. Die Arbeit bei Verschiebung einer Ladung. Das Potential. Kapazität. Die Energie der Ladung. Der Kondensator, seine Energie und Kapazität. Die Kapazität paralleler Platten; von kontinuierlichen Leitern. Die Energiegleichung in Ausdrücken von i ; in Ausdrücken von q . Die Gleichung von E.M.K.K. 43—51

Fünftes Kapitel.

Stromkreise, die Widerstand und Kapazität enthalten.

Die Gleichung der E.M.K.K. Die Differentialgleichung in linearer Form. Das Merkmal der Integrierbarkeit. Allgemeine Lösung, wenn $e = f(t)$. — I. Fall: Entladung. Quantität und Strom aus der allgemeinen Gleichung, — aus den Differentialgleichungen. — II. Fall: Ladung. Desgl. — III. Fall: Einfache harmonische E.M.K. Quantität und Strom aus der allgemeinen Lösung. Erörterung. — IV. Fall: Eine beliebige periodische E.M.K. 52—61

Sechstes Kapitel.

Stromkreise mit Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität. Allgemeine Lösung.

Die Energiegleichung in Ausdrücken von e , i und t ; in Ausdrücken von e , q und t . Die Gleichung der E.M.K.K. in Ausdrücken von e , i und t ; in Ausdrücken von e , q und t . Die Umwandlung der Gleichungen zur Lösung in Ausdrücken von i und t ; in Ausdrücken von q und t . Vollständige Lösung nach i in Ausdrücken von t . Vollständige Lösung nach q in Ausdrücken von t . Die vier Fälle: I. $e = f(t) = 0$; II. $e = f(t) = E$; III. $e = f(t) = E \sin \omega t$; IV. $e = f(t) = \sum E \sin(b \omega t + \theta)$ 62—69

Siebentes Kapitel.

Stromkreise mit Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität.

I. Fall. Entladung.

Integral- und Differentialgleichungen, wenn $e = f(t) = 0$. Lord Kelvin's Lösung. Die Stromgleichung nach Ersetzung von T . Drei

Formen von Strom- und Ladungsgleichung. Die Umformung der Stromgleichung, wenn $R^2 C$ kleiner als $4 L$ ist. Ableitung der Lösung aus den Differentialgleichungen, wenn $R^2 C = 4 L$. — Nicht oscillirende Entladung. Bestimmung der Konstanten. Vollständige Lösung. Ersetzung des Werthes von T . Strom- und Ladungskurven für einen besonderen Stromkreis. Der Zeitpunkt des Maximalstromes. Die Gleichung (125) für einen Stromkreis mit R und L , und für einen Stromkreis mit R und C . — Oscillirende Entladung. Bestimmung der Konstanten. Vollständige Lösung nach i und q . Strom- und Ladungskurven für einen besonderen Stromkreis. — Die Entladung eines Kondensators, wenn $R^2 C = 4 L$. Bestimmung der Konstanten. Vollständige Lösungen nach i und q . Methode zur Konstruktion von Strom- und Ladungskurven. Kurven für i und q in einem besonderen Stromkreis 70—89

Achtes Kapitel.

Stromkreise mit R, L und C.

II. Fall. Die Ladung.

Differentialgleichungen mit $e = f(t) = E$. Lösungen: Aus der allgemeinen Integralgleichung. Drei Formen für i - und q -Gleichungen. — Nicht oscillirende Ladung. Bestimmung der Konstanten. Vollständige Lösung nach i und q . Anwendung von (101) auf einen Stromkreis mit R und L ; mit R und C . — Oscillirende Ladung. Bestimmung der Konstanten. Vollständige Lösungen nach i und q . Strom- und Ladungskurven für einen besonderen Stromkreis. — Ladung eines Kondensators, wenn $R^2 C = 4 L$. Bestimmung der Konstanten. Vollständige Lösungen nach i und q . Strom- und Ladungskurven in einem besonderen Stromkreis 90—100

Neuntes Kapitel.

Stromkreise mit Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität.

III. Fall. Lösung und Erörterung für den Fall einer harmonischen E.M.K.

Ableitung der besonderen Gleichung aus den allgemeinen Gleichungen für den Fall einer harmonischen E.M.K. Vollständige Lösungen nach i und q . Direkte Ableitung derselben Gleichung von den Differentialgleichungen. — Erörterung des III. Falles. Harmonische E.M.K. Das Impediment. Fall A: Stromkreise mit R und L . Fall B: Stromkreise mit R und C . Fall C: Stromkreise mit R . Fall D: Stromkreise mit C . — Wirkungen der Aenderung der Konstanten eines Stromkreises. I. Aenderung der E.M.K. II. Aenderung von R . III. Aenderung der Konstanten L . IV. Aenderung von C . V. Aenderung der Periode. Die Energie, die pro Sekunde in einem Stromkreise verausgabt wird, in dem ein harmonisch veränderlicher Strom fließt . 101—119

Zehntes Kapitel.

Stromkreise mit R, L und C.*III. Fall (Fortsetzung). Ströme beim „Schliessen“ bei einer harm. E.M.K.*

Vollständige Gleichungen für i und q mit der Komplementfunktion.	Seite
Bestimmung der Konstanten A' und ϕ' . Bestimmung der Konstanten A und ϕ . Vollständige Lösung für i , wenn die Konstanten bestimmt sind. Beispiele der allgemeinen Gleichung. Kurven, die den Strom beim „Schliessen“ darstellen. Die Phase, in der die E.M.K. eingeführt werden muss, um die Oscillation zu einem Maximum zu bringen	120—130

Elftes Kapitel.

Stromkreise mit R, L und C.*IV. Fall. Eine beliebige periodische E.M.K.*

Fourier's Princip. Allgemeine Gleichungen für i und q mit beliebiger periodischer E.M.K. Gegenseitige Neutralisation von L und C , in welchem Falle der Stromkreis gleichwerthig mit einem solchen ist, in dem L und C nicht vorhanden sind; die treibende E.M.K. ist dann eine einfach harmonische E.M.K. Ist die Wärmewirkung oder irgend eine Wirkung, die von $\int i^2 dt$ abhängt, dieselbe, wenn L und C vorhanden, als wenn sie nicht vorhanden sind, so muss die E.M.K. einfach harmonisch sein. Verschiedene Arten von Stromkurven. Sind Kurven nicht symmetrisch und ist dennoch die Quantität, die in der positiven Richtung fließt, gleich der Quantität, die in der negativen Richtung fließt, so wird doch im Allgemeinen die Wirkung von $\int i^2 dt$ in beiden Richtungen verschieden sein. Beweisführung durch eine besondere Kurve. Kohlenstifte des Wechselstrombogenlichtes	131—148
---	---------

Zwölftes Kapitel.

Stromkreise mit vertheilter L und C. Allgemeine Lösung.

Ableitung der Differentialgleichung für Stromkreise, die nur vertheilte C enthalten. Erweiterung der Gleichung auf einen speciellen Fall, dass C und L vertheilt sind. Die Formen für E.M.K. und Strom sind identisch. Allgemeine Lösungen der Differentialgleichungen. Besondere Annahme einer harmonischen E.M.K. Bestimmung der Konstanten der allgemeinen Gleichung unter dieser Voraussetzung, 1. für den Fall der Exponentialgleichung, 2. für die Sinusgleichung. Bestimmung des Stromes aus der E.M.K.-Gleichung	149—162
--	---------

Dreizehntes Kapitel.

Stromkreise mit vertheilter Capacität und Selbstinduktion.

Stromkreise ohne L . Specielle Form von e - und i -Gleichungen. Beschaffenheit der Welle. Geschwindigkeit der Ausbreitung. Wellenlänge. Abnahme der Amplitude. Maass der Abnahme	
--	--

Seite

mit der Entfernung und mit der Zeit. — Stromkreise mit L . Phasendifferenz. Geschwindigkeit der Ausbreitung. Verringerung der Amplitude. Maass der Abnahme. Begrenzung der Wirksamkeit des Telephons. — Wellenausbreitung in geschlossenen Stromkreisen. Das Aussterben der Schwingungen. Die resultirende Wirkung. Das Potential in der Mitte des Kabels. Die Vereinfachung des Potentialausdrucks, wenn die Länge des Kabels ein Vielfaches der Wellenlänge ist. Anwendung auf die Stromgleichung 163—174

II. Theil. Graphische Behandlung.

Vierzehntes Kapitel.

Einleitung zum II. Theil und Einleitung zur Behandlung von Stromkreisen mit R und L .

Analytische Lösungen des ersten Theils für einfache Stromkreise auf verzweigte Stromkreise mittelst der graphischen Methode ausgedehnt. Anordnung vom II. Theil. Graphische Darstellung einfacher harmonischer E. M. K. K. Graphische Darstellung der Summe einfacher harmonischer E. M. K. K. derselben Periode. Das Dreieck der E. M. K. K. für einen einzelnen Stromkreis mit R und L . Die treibende E. M. K. Die wirkende E. M. K. Die Gegenkraft der E. M. K. der L . Graphische Darstellung. Verwendung der Symbole in der graphischen Behandlung. Verwendung von Buchstaben in der graphischen Konstruktion 177—185

Fünfzehntes Kapitel.

Stromkreise mit R und L . Einfache und verzweigte Stromkreise.

I. Wirkung einer Aenderung der Konstanten R und L in einem einfachen Stromkreis. Aenderung von R und L . — II. Einfacher Stromkreis, in dem der Strom bekannt ist. — III. Einfacher Stromkreis, in dem die E. M. K. bekannt ist. — IIIa. Messung. — IV. Vertheilter Stromkreis. Zwei Zweige. Treibende E. M. K. bekannt. Definition von äquivalentem R und L . — V. Verzweigter Stromkreis. Beliebige Anzahl von Zweigen. Aequivalente R und L für Nebenfüsse. — VI. Verzweigter Stromkreis, wo Strom bekannt. Erste ganz graphische Methode. Zweite Methode: Lösung mit Anwendung des äquivalenten Werthes von R und L . — VII. Wirkungen der Aenderung der Konstanten R und L in einem verzweigten Stromkreis. Stromkreise mit zwei Zweigen. Aenderung von R , von L . Grenzfälle. Beispiel von konstantem Potential und konstantem Strom 186—208

Sechszehntes Kapitel.

Behandlung von Stromkreisen mit L und R . Zusammengesetzte Stromkreise.

Seite

- VIII. Parallele und hintereinander geschaltete Stromkreise. Die treibende E.M.K. ist bekannt. Lösung durch äquivalente Werthe von R und L . — IX. Desgleichen. Strom bekannt. Gleiche Lösung. — X. Erweiterung von VIII. und IX. — XI. Rein graphische Lösung. — XII. Kombination von parallelen und hintereinander geschalteten Stromkreisen 209—219

Siebzehntes Kapitel.

Behandlung von Stromkreisen, die Widerstand und Selbstinduktion enthalten und in denen mehr als eine Quelle der E.M.K. thätig ist.

- XIII. Hintereinander geschaltete E.M.K.K. — XIV. Drehungsrichtung der E.M.K.-Vektoren. — XV. Nebeneinander geschaltete E.M.K.K. — XVI. E.M.K.K. verschiedener Perioden 220—226

Achtzehntes Kapitel.

Einleitung zur Behandlung von Stromkreisen mit L und C .

- Aehnlichkeit der Verhältnisse für den Fall, dass R und C , und für den Fall, dass R und L im Stromkreis vorhanden sind. E.M.K.-Dreieck für einen einzelnen Stromkreis mit R und C . Treibende E.M.K. Wirksame E.M.K. Kondensator-E.M.K. Graphische Darstellung. Zwei Methoden. 1. Anwendung der E.M.K., die zur Ueberwindung der Kondensator-E.M.K. nothwendig ist. 2. E.M.K. des Kondensators. Beziehungen der analytischen und graphischen Behandlung. Illustration durch ein Beispiel aus der Mechanik 227—231

Neunzehntes Kapitel.

Stromkreise mit R und C .

- XVII. Wirkungen der Aenderung der Konstanten R und C bei Hintereinanderschaltung. — XVIII. Desgleichen bei bekannter Stromstärke. Aequivalentes R und C bei Hintereinanderschaltung. — XIX. Desgleichen. Treibende E.M.K. bekannt. — XX. Verzweigter Stromkreis. Zwei Zweige. Treibende E.M.K. bekannt. Aequivalentes R und C bei Nebeneinanderschaltung. — XXI. Verzweigter Stromkreis. Beliebige Anzahl von Zweigen. Treibende E.M.K. bekannt. Aequivalentes R und C bei Nebeneinanderschaltung. — XXII. Verzweigter Stromkreis. Rein graphische Methode. Lösung durch äquivalentes R und C . — XXIII. Wirkungen der Aenderung der Konstanten R und C in einem verzweigten Stromkreis von zwei Zweigen. — XXIV. Hinter- und Nebeneinanderschaltung. Treibende E.M.K. bekannt. Lösung durch äquivalentes R und C . — XXV. Desgleichen. Strom bekannt. Lösung auf gleiche Weise. — XXVI. Desgleichen. Rein

	Seite
graphische Lösung. — XXVII. Wirkungen der Aenderung der Konstanten R und C in einem einfachen Stromkreis (bei Hintereinanderschaltung)	232—246

Zwanzigstes Kapitel.

Stromkreise mit R , L und C .

Graphische Methoden. Diagramm für vier E.M.K.K. Dreieck der E. M. K. K. Richtigkeit der Methode. Aequivalente Kombination von L und C . — XXVIII. Wirkungen der Veränderung der Konstanten bei Hintereinanderschaltung. — XXIX. Aequivalentes R , L und C bei Hintereinanderschaltung, wenn Strom bekannt. — XXX. Wenn treibende E. M. K. bekannt. — XXXI. Verzweigter Stromkreis. Treibende E. M. K. bekannt. Aequivalentes R , L und C für parallele Stromkreise. — XXXII. Beispiel eines verzweigten Stromkreises. Treibende E. M. K. bekannt. — XXXIII. Desgleichen. Strom bekannt. — XXXIV. Kombination von Neben- und Hintereinanderschaltung	247—262
---	---------

Anhang A.

Praktische und C.G.S.-Einheiten. Elektrische Einheiten.	263
---	-----

Anhang B.

Ausdruck elektrischer Grössen durch mechanische. Tafel I. Linearbewegung. Tafel II. Rotation. Tafel III. Elektrischer Strom	263—266
---	---------

Anhang C.

Art der Bezeichnung	266.
-------------------------------	------

I. Theil.

Analytische Behandlung.

Erstes Kapitel.

Einleitung zur Abhandlung über Stromkreise, welche Widerstand und Selbstinduktion enthalten.

Inhalt: Der Magnet. Kraftlinien. Pole. Gleichnamige Pole stoßen sich ab, ungleichnamige Pole ziehen sich an. Einheit der Polstärke. Gesetz der Anziehung. Intensität eines Magnetfeldes. Gleichförmiges Feld. Einheit der Kraftlinie. Ein Pol von der Einheit der Polstärke hat 4π Kraftlinien. Induktion. Der Strom entwickelt ein Feld. Einheit der Stromstärke. Die Anzahl der Kraftlinien sind dem Strome proportional. Selbstinduktion. E. M. K. Das Ohm'sche Gesetz. Quantität. Die Quantität ist bestimmt durch eine bestimmte Aenderung in der Anzahl der Kraftlinien. Die in Wärme umgesetzte Energie. Die ganze einem Stromkreise ertheilte Energie. Die dem Felde ertheilte Energie. Die Energiegleichung. Die Gleichung der E. M. K.

Zur gründlichen Erörterung von Stromkreisen, welche Widerstand und Selbstinduktion enthalten, wollen wir zunächst eine kurze Uebersicht über die elementare Theorie des Magnetismus, des magnetischen Kraftfeldes und der Beziehungen zwischen elektrischem Strom und Magnetismus geben. Wir werden so im Stande sein, die Ausdrücke für die dem Stromkreise ertheilte Energie, für die in Wärme umgesetzte Energie und die im magnetischen Felde verausgabte Energie abzuleiten und endlich die Energiegleichung und die Gleichung der elektromotorischen Kräfte für Stromkreise mit Widerstand und Selbstinduktion aufzustellen.

Magnetisirt man eine Nadel gleichförmig in ihrer Längsrichtung und legt sie dann in Eisenfeilspähne, so werden letztere von den Enden der Nadel angezogen und bilden strahlenförmige Büschel. Die Anziehungskraft der magnetisirten Nadel ist anscheinend an den Enden concentrirt, welche Pole genannt werden. Die Feilspähne in dem den Magneten umgebenden

Raume zeigen das Bestreben, sich in Linien, Kraftlinien genannt, zu vereinigen und Pol mit Pol zu verbinden. Der Magnet ist also von einem Kraftfelde umgeben, in welchem die Linien in jedem Punkte des Feldes die Richtung der Kraft angeben. Wird eine Kompassnadel in das Feld gebracht, so nimmt dieselbe immer eine bestimmte Stellung an in der Weise, dass sie zur Kraftlinie, welche durch den betreffenden Punkt geht, eine Tangente bildet. Die Erde verhält sich wie ein sehr grosser Magnet, welcher ein magnetisches Feld entwickelt, in dem die Kraftlinien ungefähr von Norden nach Süden laufen. Eine frei im magnetischen Felde der Erde hängende Magnetnadel nimmt eine zu den Kraftlinien der Erde tangentielle Richtung an und zwar annähernd in dem geographischen Meridian. Der nach Norden zeigende Pol wird als + bezeichnet, der Südpol als -. Wenn Magnetpole einander genähert werden, so findet entweder Anziehung oder Abstossung statt. Gleichnamige Pole stossen sich ab, ungleichnamige Pole ziehen sich an.

Die Definition der Einheit der magnetischen Polstärke ist naturgemäss folgende: Ein Magnetpol, welcher mit der Kraft von einem dyn auf einen anderen gleichstarken und gleichnamigen Pol wirkt, welcher einen cm entfernt ist, besitzt die Einheit der Polstärke. Auf dieser Definition beruht das ganze elektromagnetische Maasssystem und dieselbe verdient deshalb besondere Beachtung. Wirkliche Magnete haben endliche Dimensionen und man ist deshalb genöthigt, die mittlere Entfernung zu bestimmen. Zu diesem Zwecke wählt man die Entfernung zwischen zwei Punkten, die so gelegen sind, dass die Wirkung zwischen den beiden Polen dieselbe bleiben würde, falls dieselben in diesen Punkten konzentriert wären. Wir denken uns also einen Magnetpol in einem Punkte konzentriert.

Diese Anschauung ist durchaus nicht gezwungener als der Begriff des Schwerpunkts, gemäss welchem wir uns die Masse eines Körpers in einem Punkte konzentriert denken. In ähnlicher Weise messen wir die Länge des zusammengesetzten Pendels. Wir betrachten die Masse des Pendels in einem solchen Punkte konzentriert, dass die Schwingungsperiode nicht geändert wird.

Gesetz der Anziehung.

Das Gesetz der Aufeinanderwirkung zweier Magnetpole, wie es zuerst von Coulomb bestimmt wurde, besagt, dass die Anziehung oder Abstossung zweier Pole dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional und dem Produkt der Polstärken direkt proportional ist. Also ist:

$$F \sim \frac{m m'}{r^2}.$$

m und m' bedeuten hier die Polstärken, d. h. die Anzahl der Einheiten der Polstärke, welcher jeder einzelne Pol äquivalent ist; r ist die Entfernung zwischen den Polen. Gemäss der obigen Definition kann das Zeichen der Proportionalität gegen das Gleichheitszeichen vertauscht werden, wenn man die Entfernung r in cm und die Kraft F in dyn misst. Die Kraft, mit der zwei Pole auf einander wirken, ist also:

$$F = \frac{m m'}{r^2}.$$

Wenn die Pole gleichnamig sind, so ist das Produkt positiv. Eine Abstossung erhält also ein positives Vorzeichen, und demgemäss ist eine Anziehung negativ.

Die Intensität eines Kraftfeldes.

Man bestimmt die Stärke eines magnetischen Feldes in einem Punkte, indem man die Wirkung, welche dasselbe auf einen positiven Pol von der Einheit der Polstärke, welcher an jenen Punkt gebracht wird, misst. Könnten wir einen freien Magnetpol in ein magnetisches Feld bringen, so würde derselbe immer in eine bestimmte Richtung gedrängt werden; und könnte er sich frei bewegen, so würde er sich thatsächlich in dieser Richtung in Bewegung setzen. Die Richtung, die ein positiver Pol einnehmen würde, heisst die positive Richtung der durch den betreffenden Punkt gehenden Kraftlinien. Die Kraft, mit der ein magnetisches Feld in irgend einem Punkte auf einen dahin gebrachten positiven Pol von der Stärke 1 wirkt, heisst die Feldstärke jenes Punktes und wird

mit H bezeichnet. Gewöhnlich findet man, dass H in verschiedenen Punkten des Feldes variiert; hat aber H in jedem Punkte in Bezug auf Richtung und Intensität denselben Werth, so nennt man das Feld ein gleichförmiges. Besitzt ein gleichförmiges Feld die Intensität eins — also $H=1$ —, so sagt man, dass eine Kraftlinie auf 1 qcm komme. Ist die Intensität H , dann kommen H Linien auf den qcm. Man denkt sich also die Intensität eines magnetischen Feldes durch die Anzahl der Kraftlinien bestimmt, welche durch einen qcm einer Fläche gehen, welche zur Richtung der Kraftlinien senkrecht ist.

So ist gemäss der Definition der Einheit der Polstärke die Intensität $H=1$ bei 1 cm Entfernung vom Pole von der Stärke eins. Denken wir uns eine Kugelfläche, welche diesen Pol zum Mittelpunkte hat und deren Radius gleich eins ist, dann geht also eine Kraftlinie durch jeden qcm der Oberfläche. Da die Kugel eine Oberfläche von 4π qcm hat, so gehen im Ganzen 4π Kraftlinien vom Pole aus, und folglich $4\pi m$ Linien von einem Pole, dessen Stärke $=m$ ist.

Induktion.

Die Anzahl der Kraftlinien in der Luft ist dieselbe, als die Anzahl der Linien der magnetisirenden Kraft.

Bei einer Substanz wie Eisen werden die Kraftlinien bedeutend vermehrt, und man nennt sie alsdann Linien der Magnetisation oder Induktionslinien. Die Anzahl der Induktionslinien N , welche durch eine beliebige Fläche gehen, nennt man die totale magnetische Induktion durch diese Fläche. Die Anzahl der Kraftlinien pro qcm, welche durch die zu den Kraftlinien senkrechte Fläche gehen, nennt man die Induktion pro qcm oder einfach die Induktion B .

In einem nicht magnetischen Mittel ist die Induktion B gleich der magnetisirenden Kraft H . In einem magnetischen Mittel wie Eisen entwickelt die magnetisirende Kraft eine Induktion B , welche grösser als H ist. Das Verhältniss der Induktion zur magnetisirenden Kraft nennt man Permeabilität oder Durchlässigkeit μ , das heisst $\mu = \frac{B}{H}$.

Ein elektrischer Strom, welcher in einem Stromkreise fließt, entwickelt in dem umgebenden Mittel stets ein Feld. Die Kraftlinien, welche diesem Felde eigen sind, sind in sich zurücklaufende Linien, welche den Leiter in konzentrischen Kreisen umgeben. Die gesammte Anzahl der Linien welche durch die vom Leiter begrenzte Fläche gehen, nennt man die gesammte magnetische Induktion des Stromkreises. Wie der Strom an Stärke zunimmt, wächst in jedem Punkte die Intensität des magnetischen Feldes und im Falle, dass keine magnetische Substanz in der Nähe ist, nimmt die Intensität des Feldes proportional der Stromstärke zu. Man definiert die Einheit des Stromes in Ausdrücken der Intensität des magnetischen Feldes, welches derselbe erzeugt. — Die Einheit der Stromstärke ist derjenige Strom, welcher in einem Kreise vom Radius 1 cm fließen muss, um mit jedem cm des Umfangs auf einen im Mittelpunkt befindlichen Magnetpol von der Stärke eins mit der Kraft von einem dyn zu wirken. Dies ist die Einheit der Stromstärke im C.G.S.-System. Der im Mittelpunkte befindliche Pol wirkt also mit derselben Kraft auf jede Längeneinheit des Umfangs wie auf einen im Abstände von 1 cm befindlichen Pol von der Stärke eins.

Die praktische Einheit des Stromes, der Ampère, ist $\frac{1}{10}$ der C.G.S.-Einheit.

Die Anzahl der Kraftlinien, welche einem Strome proportional ist.

Wir haben gesehen, dass der Strom, welcher in einem geschlossenen Leiter fließt, ein magnetisches Feld entwickelt, in der Weise, dass eine bestimmte Anzahl Linien durch die vom Leiter begrenzte Fläche gehen. Ist keine magnetische Substanz in der Nähe, d. h. ist die Permeabilität des umgebenden Raumes konstant, so ist die durch den Strom entwickelte Anzahl von Kraftlinien der Stromstärke direkt proportional, und irgend eine Schwankung des Stromes bedingt eine entsprechende Aenderung in der Anzahl der Kraftlinien. Also ist

$$N \sim i \quad \text{und} \quad \frac{dN}{dt} \sim \frac{di}{dt}.$$

Da N wie i variirt, so können wir sagen, dass

$$N = L i$$

und folglich

$$(1) \quad \frac{dN}{dt} = L \frac{di}{dt}.$$

Den Koeffizienten L nennt man den Koeffizienten der Selbstinduktion, und er stellt das Verhältniss der ganzen Induktion zum Strome, welcher dieselbe erzeugt, dar. Bei der Einheit der Stromstärke ist der Koeffizient der Selbstinduktion gleich der vom Strome erzeugten Anzahl von Linien. Ist die Durchlässigkeit des den Leiter umgebenden Mittels konstant, so ist letzteres der Werth für L für alle Werthe des Stromes und L ist dann konstant.

Mit Ausnahme des Falles, dass die Magnetisation einen hohen Werth erreicht, ist L für jeden Stromkreis eine konstante Grösse und wird im Folgenden als solche behandelt werden.

Faraday's Gesetz der E. M. K.

Bewegt man einen Leiter in ein magnetisches Feld, so dass die Kraftlinien geschnitten werden, so wird in dem Leiter eine elektromotorische Kraft erregt. Faraday bewies durch seine Forschungen, dass diese E. M. K. dem Verhältniss der geschnittenen Linien zu der dazu erforderlichen Zeit direkt proportional ist. Die E. M. K. ist in ihrer Richtung senkrecht zur Bewegungsrichtung des Leiters und ebenfalls zur Richtung der Kraftlinien. Faraday zeigte ferner, dass eine beliebige Aenderung der magnetischen Induktion, welche durch einen geschlossenen Leiter geht, in dem Leiter eine E. M. K. entwickelt, welche in jedem Zeitpunkte dem Maasse der Aenderung der magnetischen Induktion (Abnahme) in Bezug auf die Zeit proportional ist. Bei Anwendung des C.G.S.-Systems kann dieses Experimentalgesetz durch diese Gleichung ausgedrückt werden:

$$(2) \quad e = - \frac{dN}{dt},$$

wo e die erzeugte E. M. K. und N die magnetische Induktion des Stromkreises bedeutet, d. h. eine C.G.S.-Einheit der E. M. K.

wird erzeugt, wenn die magnetische Induktion, also die Anzahl der dem Stromkreise eigenen Kraftlinien, sich pro Sekunde um eine Linie ändert. Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die E. M. K. in einer solchen Richtung inducirt wird, dass sie sich der Aenderung der Anzahl der Kraftlinien, welche vom Leiter eingeschlossen sind, widersetzt. Die praktische Einheit der E. M. K., das Volt, ist 10^8 Mal so gross als die C.G.S.-Einheit.

Das Ohm'sche Gesetz.

Die einem geschlossenen Leiter ertheilte E. M. K. erzeugt einen Strom, dessen Stärke von dem Widerstande des Leiters abhängt. Ohm bewies zuerst, was andere seitdem mit einem hohen Grade der Genauigkeit bestätigt haben, dass bei konstanter E. M. K. der Strom der E. M. K. direkt und dem Widerstande umgekehrt proportional ist. Also:

$$I \sim \frac{E}{R},$$

wo I den Strom, E die E. M. K. und R den Widerstand bedeutet. Da E. M. K. und Strom bereits unabhängig definirt sind, so wählen wir als Einheit des Widerstandes denjenigen Widerstand, gegen den die Einheit des Stromes in einem Stromkreise fliesst, welcher die Einheit der E. M. K. besitzt:

$$I = \frac{E}{R}.$$

Aus dem Verhältniss der praktischen Einheiten des Stromes und der E. M. K., nämlich des Volt und Ampère, zu den C.G.S.-Einheiten erkennen wir, dass der Ohm 10^9 Mal so gross als die C.G.S.-Einheit ist.

Quantität.

Die elektrische Einheit der Quantität fliesst in einem Stromkreise, wenn die Stromeinheit während einer Sekunde fliesst.

Fliesst ein Strom J in einem Leiter während t Sekunden, so fliesst die Quantität Jt . In der sehr kurzen Zeit dt wird eine Quantität $i dt$ oder dq fließen, indem wir haben:

$$\frac{dq}{dt} = i,$$

wo q die Quantität bedeutet. Bei einer konstanten E.M.K. war der Strom gleich der E.M.K. dividirt durch den Widerstand. Während des Zeitelementes dt kann man eine beliebige E.M.K. als konstant ansehen und wir können dann sagen, dass während der Zeit dt :

$$i = \frac{e}{R}.$$

Die grossen Buchstaben E, I, Q werden verwandt, wenn konstante Grössen gemeint sind. Sind hingegen E.M.K., Strom und Quantität veränderliche Grössen, so werden die kleinen Buchstaben e, i und q angewandt.

Aendert man die Lage eines in einem magnetischen Felde befindlichen Leiters in der Weise, dass die Anzahl N der eingeschlossenen Kraftlinien sich von N_1 zu N_2 ändert, so ist die in dem Stromkreise fliessende Quantität immer bestimmt und zwar gleich der Aenderung in der Anzahl der Kraftlinien, $N_2 - N_1$, dividirt durch den Widerstand des Stromkreises, und ist von der Art und Weise der Aenderung und von der Zeitdauer der Aenderung unabhängig. Dies ist einleuchtend, wenn wir Faraday's Gesetz: $e = -\frac{dN}{dt}$ betrachten und erwägen, dass dies die einzige E.M.K. ist, welche in dem Stromkreise wirksam ist. Wir haben also die folgenden Beziehungen:

$$\frac{dq}{dt} = i = \frac{e}{R} = -\frac{1}{R} \frac{dN}{dt}.$$

Daher:

$$(3) \quad Q = \frac{N_1 - N_2}{R}.$$

Hier bedeutet Q die Summe aller einzelnen kleinen Quantitäten, welche während der Bewegung des Leiters fliessen, und ist also gleich der Aenderung der magnetischen Induktion dividirt durch den Widerstand.

Der ballistische Erdinduktor ist ein gutes Beispiel eines Instrumentes, welches auf der Anwendung des vorerwähnten Principes beruht. Verbindet man einen ballistischen Galvano-

meter mit einem Erdinduktor, so ist der Ausschlag der Nadel der Aenderung der Anzahl der Kraftlinien proportional. Die Aenderung in der Anzahl der Kraftlinien wird in diesem Falle durch die Aenderung in der Lage der Induktionsspule hervorgebracht. Die Nadel darf sich natürlich nicht in Bewegung setzen, als bis die ganze Quantität der Elektrizität durch den Galvanometer geflossen ist.

Joule's Gesetz.

Das vierte und letzte grosse Experimentalgesetz, welches wir erwähnen müssen, ist die Entdeckung von Joule, dass die in einem Leiter durch einen elektrischen Strom entwickelte Wärme dem Produkte aus dem Quadrate der Stromstärke, dem Widerstande des Leiters und der Zeitdauer genau proportional ist. Durch dieses Gesetz ist uns ein Mittel gewährt, den Energieverbrauch zu bemessen, welcher stattfindet, wenn ein Strom einen Leiter durchfließt, vorausgesetzt, dass der Strom keine andere Arbeit verrichtet als die Ueberwindung des Ohm'schen Widerstandes. Joule brachte den experimentellen Beweis, dass die in einem Leiter durch den elektrischen Strom erzeugte Wärme dem Produkte aus dem Quadrate des Stromes, dem Widerstande und der Zeit proportional ist. Also:

$$W \sim I^2 R T.$$

Ist die Stromstärke i veränderlich, so kann man sie während der sehr kurzen Zeit dt als konstant betrachten, und dann ist die in der Zeit dt in Wärme umgesetzte Energie:

$$(4) \quad w \sim i^2 R dt.$$

Wird die ganze einem Stromkreise ertheilte Energie in Wärme verwandelt, d. h. ist die Stromstärke konstant, dann lässt sich der Energieverbrauch durch $E I T$ ausdrücken, denn nach Ohm's Gesetz ist $I R = E$.

Also:

$$W \sim E I T.$$

Wir werden sehen, dass dieser Ausdruck im C.G.S.-System eine bestimmtere Form annimmt. Wir denken uns einen Leiter, in dem der Strom J fließt, in ein gleichförmiges mag-

netisches Feld gebracht, so dass die Kraftlinien senkrecht darauf stehen. Dann wirkt das magnetische Feld, welches die Intensität H besitze, auf jede Längeneinheit des Stromes mit einer Kraft HJ . Ist l die Länge des Leiters, so wird die Kraft lHJ sein. Bewegt man diesen Leiter mit einer Geschwindigkeit v gegen diese Kraft, so wird Arbeit geleistet, welche pro Sekunde $lHJv$ beträgt oder

$$W = lHJv.$$

Diese Arbeit ist offenbar gleich der Arbeit, die pro Sekunde geleistet werden muss, um den Strom von der Stärke J durch Bewegung des Leiters im magnetischen Felde zu erzeugen. Der Leiter, welcher sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, schneidet pro Sekunde lHv Linien, erzeugt also eine E.M.K.:

$$E = lHv.$$

Setzen wir diesen Werth in obige Gleichung ein, so erhalten wir pro Sekunde:

$$W = EJ,$$

das heisst, der Energieaufwand ist gleich dem Produkte aus der Stromstärke, der E.M.K. und der Zeit. Man erkennt aus Obigem die Uebereinstimmung mit dem Joule'schen Gesetz. Im C.G.S.-System misst man die Energie in Erg, und so drückt die Gleichung die Thatsache aus, dass die in Erg ausgedrückte Energie gleich dem im C.G.S.-System ausgedrückten Produkte vom Strom, E.M.K. und Zeit ist.

Die praktische Einheit der Energie ist der Watt, und ist so berechnet, dass die Gleichung $W = EJ T$, welche für Erg und die andern C.G.S.-Einheiten wahr ist, auch für praktische Einheiten wahr bleibt, nämlich für Volt, Ampère und Watt. Die Gleichung bedeutet alsdann, dass die in Watt gemessene Energie pro Sekunde gleich dem in Volt und Ampère gemessenen Produkte aus Strom und E.M.K. ist. Aus der Angabe der Beziehungen zwischen Volt und Ampère einerseits und den C.G.S.-Maassen andererseits geht hervor, dass ein Watt pro Sekunde 10^7 Mal so gross ist als ein Erg.

Ist die E.M.K., e , veränderlich und fliesst der Strom i , so ist die dem Stromkreise in der Zeit dt ertheilte Energie gleich:

$$(5) \quad w = e i dt.$$

Durch diese Gleichung ist es uns möglich, die dem magnetischen Felde eigene Energie zu bestimmen. Gemäss dem Gesetze von Faraday entsteht in einem geschlossenen Leiter immer eine E.M.K., wenn die von demselben eingeschlossene Anzahl von Kraftlinien sich in irgend einer Weise ändert. Diese E.M.K. ist:

$$e = - \frac{dN}{dt} = - L \frac{di}{dt}.$$

Diese E.M.K. verdankt ihren Ursprung der Existenz des magnetischen Feldes. Eine gleiche und entgegengesetzte E.M.K., $L \frac{di}{dt}$, ist erforderlich, um das Feld zu entwickeln. Wie aus früher Gesagtem hervorgeht, ist die Arbeit dieser Kraft gleich dem Produkte aus der Kraft, dem Strome, welcher im Leiter fliesst, und der Zeit dt . Die Energieänderung des magnetischen Feldes in der Zeit dt beträgt daher:

$$(6) \quad i \frac{dN}{dt} dt = L i \frac{di}{dt} dt.$$

Die Aenderung der Induktion eines Stromkreises kann ihre Ursache in äusseren Vorgängen wie in der Bewegung von Magneten haben oder auch in einer Aenderung des Stromes selbst. In letzterem Falle vermehrt ein Wachsen des Stromes die Energie des Feldes, und positive Arbeit wird vom Strome durch die Entwicklung des Feldes geleistet. Nimmt der Strom ab, so nimmt die Energie des Feldes ab, und negative Arbeit wird vom Strome am Felde verrichtet. Denn wenn der Strom abnimmt, so ist $\frac{di}{dt}$ negativ. Der Ausdruck, dass der Strom negative Arbeit verrichte, bedeutet so viel, als dass das magnetische Feld während seiner Abnahme dem Stromkreise Energie ertheilt. Man ersieht hieraus, dass Energie in einem magnetischen Felde aufgespeichert werden kann, und dass diese nicht beim Schwächerwerden des Feldes verloren geht, sondern vielmehr dem Stromkreis zurückertheilt wird. Um den Werth der gesammten Energie eines Feldes, welches seine Existenz dem Strome i verdankt, zu berechnen, brauchen wir

nur die Summe aller der kleinen Energiemengen zu finden, welche dem Felde ertheilt werden, wenn der Strom von 0 bis zum Endwerthe J wächst. Man findet, dass dieser Werth der folgende ist

$$(7) \quad \int_0^J L i \, di = \frac{1}{2} L J^2.$$

Die Energiegleichung.

Bedeutet e die E.M.K., welche den Strom im Leiter treibt, dessen Widerstand $= R$ und dessen Coëfficient der Selbstinduktion $= L$ ist, so ist gemäss der Gleichung (5) die gesammte dem Stromkreise ertheilte Energie gleich $e i \, dt$.

Ein Theil dieser Energie wird durch den Widerstand des Leiters in Wärme umgesetzt und ist gleich $R i^2 \, dt$ während der Zeit dt . Ein zweiter Theil wird im magnetischen Felde aufgespeichert und beträgt in der sehr kurzen Zeit dt

$$L i \frac{di}{dt} \, dt \quad [\text{Gleichung (6)}].$$

Enthält der Stromkreis keine elektrostatische Capacität oder elektromotorische Gegenkraft ausser derjenigen des magnetischen Feldes, so sind die beiden erwähnten Arten die einzigen, in welchen die Energiequelle verbraucht wird. Wenden wir also das Princip der Erhaltung der Energie an, so können wir sagen, dass die von der Energiequelle geleistete Arbeit in der Erzeugung von Wärme und in Aenderungen der Induktion besteht. Wir haben also die Energiegleichung

$$(8) \quad e i \, dt = R i^2 \, dt + L i \frac{di}{dt} \, dt.$$

Dividiren wir jedes Glied der Gleichung durch $i \, dt$, so erhalten wir

$$(9) \quad e = R i + L \frac{di}{dt}.$$

Dies ist eine Gleichung der elektromotorischen Kräfte. e ist die von der Quelle dem Stromkreise eingeprägte E.M.K., $R i$ ist die zur Ueberwindung des Ohm'schen Widerstandes