





# Technische Mechanik 2

Band 2: Festigkeitslehre

von

Prof. Bruno Assmann

Prof. Dr.-Ing. Peter Selke

18., überarbeitete Auflage

Oldenbourg Verlag München

**Prof. Bruno Assmann** lehrte über 30 Jahre lang Maschinenbau an der Fachhochschule Frankfurt am Main. Sein Wissen und seine Erfahrungen aus der Lehre hat er in die drei Bände zur „Technischen Mechanik“ einfließen lassen.

**Prof. Dr.-Ing. Peter Selke** lehrte von 1992 bis 2009 Technische Mechanik, Maschinendynamik und Finite-Elemente-Methode an der Technischen Hochschule (FH) Wildau.

### **Das Gesamtwerk**

Assmann/Selke, Technische Mechanik  
umfasst folgende Bände:

Band 1: Statik (inkl. Aufgaben)

Band 2: Festigkeitslehre

Band 3: Kinematik und Kinetik

Aufgaben zur Festigkeitslehre

Aufgaben zur Kinematik und Kinetik

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© 2013 Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH  
Rosenheimer Straße 143, D-81671 München  
Telefon: (089) 45051-0  
[www.oldenbourg-verlag.de](http://www.oldenbourg-verlag.de)

Das Werk einschließlich aller Abbildungen ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen.

Lektorat: Dr. Gerhard Pappert  
Herstellung: Tina Bonertz  
Titelbild: Prof. Bruno Assmann  
Einbandgestaltung: hauser lacour  
Gesamtherstellung: freiburger graphische betriebe GmbH & Co. KG, Freiburg

Dieses Papier ist alterungsbeständig nach DIN/ISO 9706.

ISBN 978-3-486-70886-8  
eISBN 978-3-486-71999-4

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>IX</b>
<b>Verwendete Bezeichnungen</b>	<b>XI</b>
<b>Indizes</b>	<b>XII</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
1.1 Aufgabe der Festigkeitsberechnung .....	1
1.2 Einiges zur Lösung von Aufgaben .....	4
<b>2 Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1 Einführung .....	7
2.2 Normal- und Schubspannungen .....	8
2.3 Der einachsige Spannungszustand .....	9
2.3.1 Spannung, Formänderung, das HOOKEsche Gesetz .....	9
2.3.2 Das Festigkeitsverhalten verschiedener Werkstoffe .....	12
2.4 Der ebene Spannungszustand für Schubspannung .....	15
2.5 Die Belastungsfälle nach BACH .....	16
2.6 Die Dauer-, Zeit- und Betriebsfestigkeit .....	19
2.7 Die Kerbwirkung .....	22
2.8 Die Bauteilsicherheit .....	25
2.9 Zusammenfassung .....	28
<b>3 Zug und Druck</b>	<b>31</b>
3.1 Einführung .....	31
3.2 Die Spannung .....	31
3.2.1 Schnitt senkrecht zur Achse .....	31
3.2.2 Beliebiger Schnitt .....	33
3.3 Die Formänderung .....	41
3.4 Die Formänderungsarbeit .....	51
3.5 Flächenpressung, Lochleibung .....	57
3.6 Zusammenfassung .....	59
<b>4 Biegung</b>	<b>63</b>
4.1 Einführung .....	63
4.2 Allgemeines .....	64
4.3 Die Grundgleichung der Biegung .....	66

4.4	Das Biegemoment und die Querkraft . . . . .	79
4.4.1	Analytische Lösung für Träger auf zwei Stützen und eingespannten Träger	79
4.4.2	Rahmen . . . . .	98
4.5	Schnittgrößen im räumlichen Kräftesystem . . . . .	106
4.6	Axiale Flächenmomente und Widerstandsmomente . . . . .	110
4.6.1	Flächenmomente einfacher Flächen für eine vorgegebene Achse . . . . .	110
4.6.2	Umrechnung eines Flächenmoments auf eine parallele Achse (STEINERScher Satz) . . . . .	112
4.6.3	Flächenmomente zusammengesetzter Flächen . . . . .	116
4.6.4	Das Widerstandsmoment . . . . .	122
4.7	Die Formänderung . . . . .	130
4.7.1	Die Integrationsmethode . . . . .	130
4.7.2	Überlagerung einzelner Belastungsfälle . . . . .	142
4.7.3	Bestimmung der Deformation aus der Formänderungsarbeit (Satz von CASTIGLIANO)/Kraftgrößenverfahren . . . . .	147
4.7.4	Verfahren nach MOHR und FÖPPL . . . . .	153
4.8	Die schiefe Biegung . . . . .	164
4.8.1	Profile mit zwei senkrecht zueinander stehenden Symmetrieachsen . . . . .	164
4.8.2	Symmetrieachse senkrecht zur Belastungsebene . . . . .	169
4.8.3	Unsymmetrische Profile und Hauptachsen . . . . .	170
4.9	Zusammenfassung . . . . .	186
<b>5</b>	<b>Schub</b>	<b>191</b>
5.1	Einführung . . . . .	191
5.2	Der Satz von den zugeordneten Schubspannungen . . . . .	191
5.3	Schubspannungen in einem auf Biegung beanspruchten Träger . . . . .	193
5.4	Der Schubmittelpunkt . . . . .	201
5.5	Abscheren . . . . .	202
5.6	Zusammenfassung . . . . .	205
<b>6</b>	<b>Verdrehung</b>	<b>207</b>
6.1	Einführung . . . . .	207
6.2	Verdrehung eines Kreiszylinders . . . . .	208
6.2.1	Die Spannungen . . . . .	208
6.2.2	Die Formänderung . . . . .	215
6.3	Verdrehung beliebiger Querschnitte . . . . .	220
6.3.1	Der Vollquerschnitt . . . . .	220
6.3.2	Der Hohlquerschnitt . . . . .	224
6.4	Die Formänderungsarbeit . . . . .	228
6.5	Zusammenfassung . . . . .	230
<b>7</b>	<b>Das Stabilitätsproblem Knickung</b>	<b>233</b>
7.1	Einführung . . . . .	233
7.2	Stabilität eines Druckstabes . . . . .	233
7.3	Die Knickspannung und der Schlankheitsgrad . . . . .	236
7.4	Die elastische Knickung nach EULER . . . . .	239
7.5	Die elastisch-plastische Knickung . . . . .	246

---

7.6	Allgemeine Hinweise zur Stabilitätsberechnung .....	248
7.7	Beispiele .....	249
7.8	Zusammenfassung .....	256
<b>8</b>	<b>Der ebene Spannungszustand</b>	<b>259</b>
8.1	Einführung .....	259
8.2	Das Hauptachsenproblem; der MOHRSCHE Spannungskreis .....	260
8.3	Die verschiedenen Beanspruchungsarten .....	271
8.3.1	Zug .....	271
8.3.2	Druck .....	272
8.3.3	Verdrehung .....	273
8.4	Zusammenfassung .....	274
<b>9</b>	<b>Zusammengesetzte Beanspruchung</b>	<b>277</b>
9.1	Einführung .....	277
9.2	Addition von Normalspannungen .....	278
9.2.1	Zug und Biegung .....	278
9.2.2	Druck und Biegung .....	281
9.3	Zusammensetzung von Normal- und Schubspannung .....	281
9.3.1	Bruchhypothesen und Vergleichsspannungen .....	281
9.3.2	Biegung und Verdrehung .....	291
9.3.3	Biegung und Schub .....	297
9.3.4	Verdrehung und Zug/Druck .....	299
9.3.5	Mehrachsiges Zug/Druck .....	302
9.4	Zusammenfassung .....	303
<b>10</b>	<b>Versuch einer wirklichkeitsnahen Festigkeitsberechnung</b>	<b>305</b>
10.1	Einführung .....	305
10.2	Problembeschreibung .....	306
10.3	Der Festigkeitsnachweis .....	314
10.3.1	Berechnungskonzepte .....	314
10.3.2	Der statische Festigkeitsnachweis .....	317
10.3.3	Der Dauerfestigkeitsnachweis .....	323
10.3.4	Hinweis zum Betriebsfestigkeitsnachweis .....	345
10.4	Zusammenfassung .....	351
<b>11</b>	<b>Die statisch unbestimmten Systeme</b>	<b>355</b>
11.1	Einführung .....	355
11.2	Reduktion von statisch unbestimmten Systemen .....	355
11.3	Zug .....	359
11.4	Biegung .....	365
11.4.1	Integrations-Verfahren .....	365
11.4.2	Das Kraftgrößenverfahren .....	368
11.4.3	Überlagerung bekannter Belastungsfälle .....	372
11.5	Zusammenfassung .....	374

---

<b>12</b>	<b>Verschiedene Anwendungen</b>	<b>375</b>
12.1	Einführung .....	375
12.2	Die Wärmespannung .....	375
12.2.1	Die Wärmedehnungszahl .....	375
12.2.2	Die Spannungen .....	376
12.3	Umlaufende Bauteile .....	382
12.3.1	Der umlaufende Stab .....	382
12.3.2	Der umlaufende Ring .....	383
12.3.3	Die umlaufende Scheibe gleicher Dicke .....	384
12.3.4	Scheibe gleicher Festigkeit .....	390
12.4	Zylinder und Kugel unter Innendruck .....	390
12.4.1	Der dünnwandige Behälter .....	390
12.4.2	Der dickwandige Zylinder .....	393
<b>Anhang</b>		<b>395</b>
	Differentiation und Integration mit Hilfe des FÖPPL-Symbols .....	395
<b>Tabellenanhang</b>		<b>399</b>
<b>Literatur</b>		<b>425</b>
<b>Index</b>		<b>429</b>

# Vorwort

Dieses Buch ist die Fortsetzung des Buches „Technische Mechanik; Band 1; Statik“ vom Erstverfasser. Eindeutige Grenzen zwischen einzelnen Grundlagenfächern des Maschinenbaus gibt es nicht. Eine Überlappung der Darstellung ist durchaus gewollt. Sie soll sowohl eine gute Verzahnung des Wissens fördern als auch eine zu enge fachbezogene Sichtweise vermeiden. In diesem Zusammenhang sei auf die Bücher Werkstoffkunde – Metalle (J. Gobrecht) und Maschinenelemente 1 und 2 (H. Hinzen) hingewiesen.

Welches Lernziel versuchen wir mit diesem Lehrbuch zu erreichen? Jeder praktisch arbeitende Ingenieur weiß, dass man gerade in der Festigkeitslehre mit einer Fülle von Formeln auch ohne viel Verständnis für die Probleme und die tatsächlichen Vorgänge im Werkstoff rechnen und sogar zu verwendbaren Ergebnissen kommen kann. Dieser Arbeitsmethode sind natürlich enge Grenzen gesetzt. Nur wenn man diese Grenzen bzw. die vielen vereinfachenden Voraussetzungen, unter denen praktisch alle Gleichungen der Festigkeitslehre gelten, kennt, kann man u.U. gefährliche Irrtümer vermeiden. Aus diesem Grunde haben wir uns bemüht, die physikalischen Zusammenhänge ausführlich darzustellen und die Vorgänge im Werkstoff – soweit mit einfachen Mitteln überhaupt möglich – verständlich zu machen. Daran anknüpfend haben wir auch der Diskussion über die Voraussetzungen, unter denen die einzelnen Gleichungen gelten, breiten Raum eingeräumt.

Nach diesen Ausführungen ist es klar, dass dieses Buch kein Rezeptbuch für die Lösung von Standardaufgaben aus dem Bereich der Festigkeitslehre sein soll. Im Band 1 (Statik) sollte neben der rechnerischen Lösung von Problemen aus der Statik dem Studenten ein Gefühl für Kräfte und Belastungen an technischen Gebilden vermittelt werden. Die Festigkeitslehre geht einen Schritt weiter. *Nachdem die Belastung bekannt ist, muss man sich über deren Wirkung im Bauteil sowie auch über die Verformung*, die ja bei der Betrachtung des starren Körpers in der Statik „nicht vorhanden“ war, *klar werden*. Häufig genug begrenzt eine im Sinne der Funktion zu große, wenn auch elastische Verformung die Belastbarkeit des Bauteils und bestimmt die Abmessungen. Es ist ein Hauptanliegen dieses Buches, über das rein Rechnerische hinaus dem zukünftigen Ingenieur ein Gefühl für die Wirkungen von Spannungen (z.B. Kraftfluss, Spannungskon-

zentration) mitzugeben. In diesem Zusammenhang sind die Kapitel 2 (Grundlagen), Kapitel 8 (Der ebene Spannungszustand), Kapitel 9 (Zusammengesetzte Beanspruchung, Spannungshypothesen), Kapitel 10 (Versuch einer wirklichkeitsnahen Festigkeitsberechnung) besonders wichtig. Dieses Gefühl entwickelt sich erst nach vielfältiger Anwendung der einzelnen Gleichungen und dem Durchdenken und kritischen Verarbeiten der Ergebnisse. Die Beispiele und die getrennt herausgegebenen Übungsaufgaben sind aus dem oben beschriebenen Bestreben heraus ausgewählt worden.

Im ständigen Bemühen um eine Verbesserung der Werkstoffausnutzung und Betriebssicherheit haben sich in den Jahren die Berechnungsverfahren – auch im Zusammenhang mit der Weiterentwicklung der Rechentechnik – kontinuierlich verfeinert. Dies machte die Überarbeitung des Kapitels 10 erforderlich. Der Co-Autor hat es neu konzipiert und erweitert sowie im Zusammenhang damit den Abschnitt 2.9 neu gefasst. Als Konsequenz daraus wurden auch die Sicherheitszahlen (Tabelle 5) und die Formzahlen gekerbter Bauteile (Tabellen 17 und 18) auf der Grundlage der FKM-Richtlinie dem aktuellen Stand angepasst. Bei der Darstellung einer zeitgemäßen Festigkeitsberechnung konnten viele inzwischen eigenständige Sachgebiete nur angerissen werden. An diesen Stellen werden die neugierig gewordenen Leser über ein deutlich erweitertes Literaturverzeichnis auf die Spezialliteratur verwiesen.

Das Stabilitätsproblem (Kapitel 7) wurde durch den Co-Autor hinsichtlich des Bezeichnungsaufbaus und auch inhaltlich überarbeitet.

In der vorliegenden 18. Auflage ist das Kapitel 4 (Biegung) überarbeitet worden, und in den Kapiteln 3, 8 und 9 sind einige Aufgaben durch neue ersetzt worden.

Dem Verlag und unserem Lektor Herrn Dr. Gerhard Pappert danken wir für die gute Zusammenarbeit.

Bruno Assmann  
Peter Selke

## Verwendete Bezeichnungen

$A$	Fläche; Bruchdehnung
$a, b$	Konstanten (Mittelspannung)
$a, b, h, l, s$	Längen allgemein
$C$	Integrationskonstante
$D, d$	Durchmesser
$E$	Elastizitätsmodul
$F$	Kraft
$f$	Spannungsfaktor
$G$	Gleitmodul
$I$	Flächenmoment 2. Ordnung
$i$	Trägheitsradius
$K$	Faktor; Beiwert
$M$	Moment
$M$	Mittelspannungsempfindlichkeit
$m$	Masse; Maßstabsbeiwert
$N, n$	Anzahl
$n$	Stützzahl
$P$	Leistung
$p$	Flächenpressung
$q$	Streckenlast; Zähigkeitskoeffizient
$R, r$	Radius
$R$	Zugfestigkeitskennwert
$R$	Rauheit
$S$	Schadenssumme
$S$	Seil- bzw. Stabkraft
$S$	Sicherheitszahl
$T$	Sicherheitskennzahl; statisches Moment
$u$	bezogene Formänderungsarbeit
$V$	Volumen
$W$	Widerstandsmoment; Formänderungsarbeit
$w$	Durchbiegung
$x, y, z$	Koordinaten
$\alpha$	Winkel; Formzahl; lineare Ausdehnungszahl
$\beta$	Kerbwirkungszahl
$\gamma$	Winkeländerung; Volumendehnungszahl
$\varepsilon$	Dehnung; Kürzung
$\varphi$	Winkeländerung Biegelinie; Verdrehwinkel
$\eta, \xi$	Koordinaten
$\lambda$	Schlankheitsgrad
$\mu$	Querkontraktionszahl (POISSONSche Zahl)
$\varrho$	Krümmungsradius; Dichte
$\sigma$	Normalspannung
$\tau$	Schubspannung (Tangentialspannung)
$\chi$	bezogenes Spannungsgefälle
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit

## Indizes

A, B, C, D	bezogen auf die so bezeichneten Punkte
A	Ausschlag; Anisotropie
a	Abscheren; Ausschlag
B	Bruch
b	Biegung
D	Dauer
d	Druck; Größenabhängigkeit
el	elastisch
erf	erforderlich
F	Formänderung
G	Gewicht
Grenz	Grenz(wert)
g	Gestalt; Größeneinfluss
gef	gefordert
K	Knick; Kerb(e); gekerbt
L	Lochleibung
M, m	mittlere; Mittel...
max	maximal
min	minimal
N	Normwert
n	normal; Nenn...
O	Oberfläche; Rauheit
o	Oberspannung; Ausgangszustand
p	polar
pl	plastisch
q	quer/Querkraft
r	radial
res	resultierend
S	Schwerpunkt
s	Schub
Sch	Schwell...
T	Temperatur
t	Torsion; tangential; Zeit
u	Umfang; Unterspannung
V	Verfestigung; Oberflächenverfestigung
v	Vergleich; Volumen
W	Wechsel
z	Zug
zd	Zugdruck
zul	zulässig
x, y, z	Richtungssinn nach vorgegebenem Koordinatensystem
$a, \xi, \eta$	
$\sigma$	Normalspannung
$\tau$	Tangentialspannung (Schubspannung)

# 1 Einführung

## 1.1 Aufgabe der Festigkeitsberechnung

In der *Statik* wurde die Wirkung von Kräften auf starre Körper behandelt. Es zeigte sich, dass es einen absolut starren Körper nicht gibt. Jeder Stoff deformiert sich unter der Einwirkung von Kräften. Sind diese Deformationen sehr klein verglichen mit den Gesamtabmessungen des Bauteils, dann kann man sie in vielen Fällen vernachlässigen.

Die Aufgaben der Statik (im Rahmen der Technischen Mechanik) beschränken sich im Wesentlichen auf Bestimmung von Auflager-, Gelenk- und Stabkräften von statisch bestimmten Systemen.

Die Festigkeitslehre geht einen Schritt weiter und stellt zunächst die Frage nach den durch diese Kräfte verursachten Wirkungen im Bauteil.

Was zu diesem Thema bereits im Band 1 ausgeführt wurde, wird hier vertieft. Aus den Gleichgewichtsbedingungen am Teilabschnitt eines Bauteils (Schnittprinzip) werden die Schnittreaktionen berechnet. Das sind Momente und Kräfte, die bei vorgegebener Belastung des Bauteils im betrachteten Schnitt übertragen werden müssen. Die Kenntnis dieser Größen reicht jedoch nicht aus, um Aussagen über die Beanspruchung des Werkstoffs zu machen. Konkret: Es ist z.B. nicht möglich, einen Biegeträger zu dimensionieren oder ausreichende Festigkeit eines vorgegebenen Biegeträgers rechnerisch nachzuweisen. In einem weiteren Schritt muss von der Schnittreaktion auf die Belastungsintensität im Querschnitt geschlossen werden. Ein Maß für diese Belastungsintensität ist die *Spannung*. Die Herstellung einer Beziehung zwischen den Schnittreaktionen und der Spannung ist nur möglich, wenn es gelingt, Aussagen über die *Deformation* des Bauteiles zu machen. Das ist der Punkt, wo die Vorstellung vom starren Körper nicht mehr aufrecht erhalten werden kann. Die konstante Zugspannung in einem zylindrischen Stab unter zentrischem Zug resultiert aus der Überlegung, dass sich alle gedachten Längfasern um den gleichen Betrag dehnen. Die maximale Spannung in den Außenfasern eines gebogenen Trägers haben ihren Grund in der Tatsache, dass dort die Verlängerung bzw. Zusammendrückung der Fasern am größten ist.

Die somit unumgänglich notwendige Betrachtung der u.U. sehr kleinen Deformation gestattet es, *statisch unbestimmte Systeme* zu behandeln. Ein System

ist statisch unbestimmt, wenn die Zahl der Auflagerreaktionen größer ist als die Zahl der Gleichgewichtsbedingungen. Als Beispiel soll ein dreifach gelagerter Träger betrachtet werden. Wird dieser als völlig starr betrachtet, ist eine Lösung unmöglich, denn schon eine beliebig geringe Abweichung eines Lagers von der Verbindungslinie der beiden anderen Lager hat zur Folge, dass der völlig starre Träger nur auf zwei Stützen liegt und somit statisch bestimmt geworden ist. Das entspricht aber nicht dem tatsächlichen Verhalten. Die von einem überschüssigen Lager auf den Träger übertragene Kraft ist gerade so groß, dass sie die dort ohne dieses Lager vorhandene Durchbiegung wieder rückgängig macht. *Die Berechnung von Lagerkräften statisch unbestimmter Systeme setzt also voraus, die Werkstoffe als nicht starr anzusehen.*

Die wichtigste Aufgabe der Festigkeitslehre ist es, Grundlagen für eine Berechnung von Bau- und Maschinenteilen zu schaffen. Danach soll ein Konstrukteur in der Lage sein, z.B. die Abmessungen einer Welle so festzulegen, dass sie ohne Schaden die geforderte Leistung bei einer bestimmten Drehzahl übertragen kann. Das setzt voraus, dass einmal eine Beziehung zwischen den Schnittreaktionen im Bauteil und den Spannungen im betrachteten Querschnitt abgeleitet wurde (z.B.  $\sigma = F/A$ ) und zum anderen, dass für die in Frage kommenden Werkstoffe die Belastbarkeiten, d.h. die zulässigen Spannungen aus Versuchen bekannt sind. Hier ist die Nahtstelle zwischen Werkstoffkunde, Werkstoffprüfung und Festigkeitslehre.

Die Beziehungen zwischen den Schnittreaktionen und den Spannungen (z.B. zwischen Biegemoment und Biegespannung usw.) werden in der einfachen Festigkeitslehre, wie sie in diesem Buch fast ausschließlich behandelt wird, unter einer Vielzahl von einschränkenden Bedingungen aufgestellt. Nur einige sollen an dieser Stelle genannt werden.

1. Das Bauteil ist im unbelasteten Zustand spannungsfrei.

Diese Bedingung ist z.B. bei kalt verformten Teilen, bei Gussstücken und Schweißkonstruktionen (sofern nicht spannungsfrei gegläht) nicht erfüllt.

2. Die Beziehungen gelten mathematisch exakt für unendlich weit entfernte Einleitung der Kräfte und Momente. Für eine Welle heißt das, Lager und Zahnräder sind von der untersuchten Stelle sehr weit entfernt.

Auch diese Bedingung ist in den meisten, den Konstrukteur interessierenden Fällen, nicht erfüllt.

3. Vorausgesetzt ist (außer in Kapitel 10), dass keine schroffen Querschnittsübergänge vorhanden sind (Kerbwirkung).

Für sehr viele Bauteile (z.B. Schraube) ist die Bedingung nicht erfüllt.

Weitere Einschränkungen werden an den betreffenden Stellen des Buches behandelt. Es stellt sich die Frage, ob es überhaupt sinnvoll ist, mit Gleichungen zu arbeiten, die die Verhältnisse nur bedingt beschreiben.

Die einfachen Formeln der elementaren Festigkeitslehre wären in der Tat für die Ingenieurpraxis unbrauchbar, wollte man sie in der Anwendung auf Fälle beschränken, für die sie exakt gelten. Gerade deshalb ist es besonders wichtig, die *Grenzen der Berechnungsgleichungen* zu wissen. Durch vorsichtige Wahl z.B. der zulässigen Spannung können sie auf Fälle übertragen werden, die außerhalb des exakten Geltungsbereichs liegen.

Die mit Hilfe der elementaren Festigkeitslehre berechneten Spannungen können sehr erheblich von den tatsächlichen Spannungen abweichen. Auf der anderen Seite sind die zulässigen Festigkeitswerte für die verschiedenen Stoffe unter idealisierten Verhältnissen gewonnen (zylindrische Form, polierte Oberfläche usw.). Hinzu kommt, dass die berechnete Spannung nicht unmittelbar selbst Ursache einer zu vermeidenden Zerstörung sein muss (Festigkeitsypothesen).

Es mag überraschen, dass demnach in den meisten Anwendungsfällen weder die tatsächlichen Spannungen, noch die wirkliche Festigkeit und nicht einmal die Größe bekannt ist, die bei Überschreitung eines kritischen Wertes zur Zerstörung führt. Viele Berechnungsverfahren der elementaren Festigkeitslehre erfassen nur sehr ungenau die tatsächlichen Vorgänge im Werkstoff. Nur auf Grund von Kenngrößen, die das Ergebnis langer Erfahrung sind (z.B. Vergleichsspannungen), führen sie zu brauchbaren Ergebnissen.

Der Ingenieur sollte sich davor hüten, schematisch ohne Verständnis zu rechnen. Das kann man aber nur vermeiden, wenn man sich in die Vorgänge hineindenkt und den Ursprung und die Grenzen von verwendeten Gleichungen und Formeln verstanden hat und sie immer beachtet.

## 1.2 Einiges zur Lösung von Aufgaben

Der angehende Ingenieur sollte sich möglichst früh das exakte und systematische Arbeiten beim Lösen einer technischen Aufgabe aneignen. Dadurch werden Fehler vermieden und Kontrollen sind viel leichter, auch von anderen Personen, durchführbar. Nachfolgend sollen dafür einige Hinweise gegeben werden, die sinngemäß angewendet, für alle technischen Aufgaben gelten.

Nach dem Durchdenken der Aufgabe sollte immer eine Skizze angefertigt werden, die in den Proportionen möglichst genau sein sollte, um Täuschungen vorzubeugen. Die wirkenden Kräfte werden eingetragen. Oft ist es der besseren Übersichtlichkeit wegen zweckmäßig, mit mehreren Farben zu arbeiten. Die Skizze soll so groß sein, dass Bezeichnungen eingetragen werden können.

Zur Bestimmung der Schnittreaktionen sollte vor allem der im Stoff Ungeübte für jeden freigemachten Teilabschnitt eine neue Skizze anfertigen. Die verwendeten Gleichungen sollen in allgemeiner Form, am besten links außen, geschrieben werden, z.B.

$$\begin{aligned}\sum M_x &= 0; & aF_1 - bF_2 &= 0 \\ \sigma &= \frac{M_b}{W}; \\ \sigma &= \frac{12 \cdot 10^4 \text{ Ncm}}{12,0 \text{ cm}^3} \cdot \frac{1 \text{ cm}^2}{10^2 \text{ mm}^2} = 100 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.\end{aligned}$$

Es sollte soweit wie möglich mit allgemeinen Größen gearbeitet werden, da die Rechnung damit leichter kontrollierbar ist. Bei der Ausarbeitung der Lösung soll kein Schritt übersprungen werden, eventuell sind einzelne Schritte durch kurze Bemerkungen zu erläutern. Bei Auswertungen von Gleichungen sollen die Einheiten mitgeschrieben werden (siehe Beispiel oben).

Die reine Zahlenrechnung kann durch Anwendung der 10er-Potenzen übersichtlicher gehalten werden.

Ein Ergebnis muss immer kritisch und mit dem gesunden Menschenverstand daraufhin untersucht werden, ob es überhaupt technisch möglich ist. Zur Kontrolle sollten nach Möglichkeit die errechneten Werte in noch nicht benutzten Gleichungen eingesetzt werden. Auch ist manchmal eine Kontrolle durch eine andere Lösungsmethode möglich.

Bei Kräften muss neben dem Betrag auch eindeutig die Wirkungsrichtung angegeben werden. Am besten geschieht das durch einen Pfeil, der in Klammern hinter der Maßzahl und der Einheit erscheint, z.B.

$$\begin{aligned} F_x &= 125 \text{ kN } (\leftarrow) && 125 \text{ kN nach links wirkend} \\ F_y &= -230 \text{ kN } (\uparrow \text{ am Teil II}) && 230 \text{ kN nach oben wirkend.} \end{aligned}$$

Für Kräfte senkrecht zur Zeichenebene benutzt man

- $\odot$  aus der Ebene herausragend,
- $\otimes$  in die Ebene hineinragend.



# 2 Grundlagen

## 2.1 Einführung

Die Festigkeitslehre überlappt sich sowohl mit der Werkstoffkunde als auch mit dem Fach Maschinenteile. Deshalb enthalten Bücher aus diesen Bereichen auch Grundlegendes aus der Festigkeitslehre, jeweils aus der Sicht dieser Fächer dargestellt. Eine „mehrspurige“ Einarbeitung in ein neues Gebiet ist immer vom Vorteil. Deshalb sei hier auf die Lit. [34], [42], [52], [55], [56] hingewiesen.

Aufgabe der Festigkeitslehre ist die Dimensionierung von Bauteilen. Dazu muss zunächst der Begriff *Spannung* definiert werden (Abschnitt 2.2). Im Rahmen des *einachsigen Spannungszustands* kommen die Größen *Verlängerung* und *Dehnung* hinzu. Das HOOKEsche Gesetz verbindet diese mit dem *E-Modul*, der eine wichtige Stoffgröße ist. Analoges gilt für *Schubbeanspruchung* mit *Winkeländerung* und *G-Modul*.

Das *Spannungs-Dehnungs-Diagramm*, das die Auswertung eines Zugversuchs darstellt, ermöglicht Aussagen über *Werkstoffeigenschaften* deren Kenntnis für einen Festigkeitsnachweis notwendig sind. Wichtige Größen in diesem Zusammenhang sind z.B. *Zugfestigkeit*, *Streckgrenze*, *0,2-Grenze*, *0,01-Grenze*.

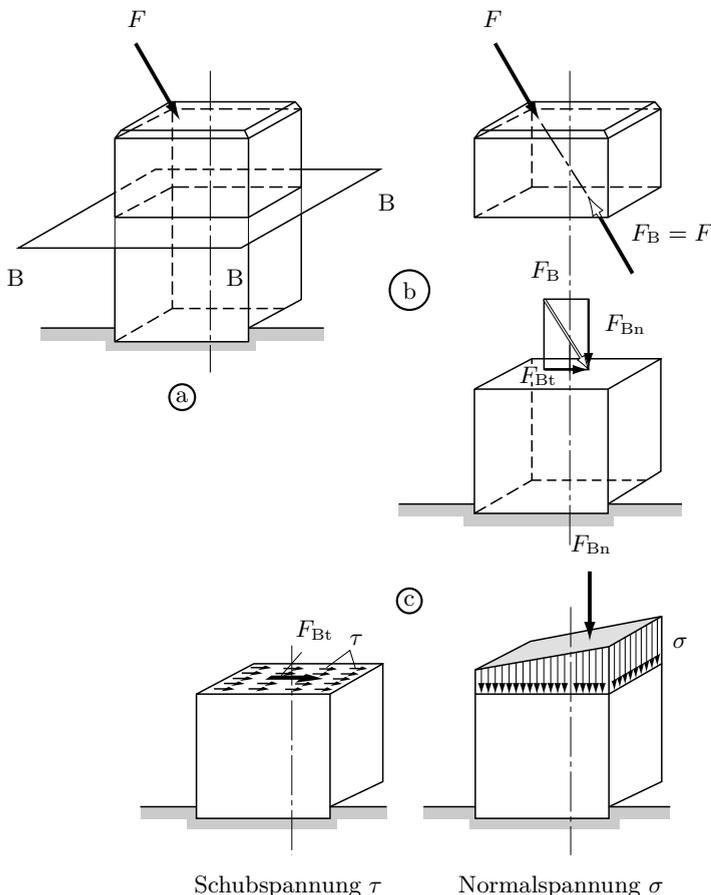
BACH hat ein System in die Vielfalt der *schwingenden Belastungen* eingeführt. Damit sind u.a. die Begriffe *Schwell- und Wechselfestigkeit* definiert. Eine besondere Bedeutung in diesem Zusammenhang hat das WÖHLER-*Diagramm*, mit dessen Hilfe *Zeit- und Dauerfestigkeit* von Bauteilen und genormten Proben ermittelt werden. Eine Vielzahl solcher Diagramme ergibt das *Dauerfestigkeitsschaubild* nach SMITH.

Bei schroffen Querschnittsübergängen am Bauteil entstehen u.U. gefährliche Spannungsspitzen. Damit befasst sich qualitativ der Abschnitt *Kerbwirkung*. Abgeschlossen wird das Kapitel mit Ausführungen über die *Bauteilsicherheit*. *Grenzspannungen*, *zulässige Spannungen* und *Sicherheitszahl* sind hier wichtige Begriffe.

## 2.2 Normal- und Schubspannungen

An einem Körper *außen* angreifende Kräfte bzw. Momente (Belastungen) haben eine Beanspruchung der *inneren* Materialteile zur Folge. Eine auf den Block Abb. 2-1 wirkende Kraft wird durch den Block hindurch auf das Fundament übertragen. Es soll untersucht werden, welche Kräfte z.B. im Querschnitt  $BB$  dieses Blockes wirksam sind. Zu diesem Zwecke muss man durch diese Ebene einen gedachten Schnitt legen. Der fragliche Teilabschnitt des Blockes muss freigemacht werden (Abb. 2-1b). Die Gleichgewichtsbedingungen an diesem Teilabschnitt ergeben die Größe der Kraft  $F_B$ , die in die Komponenten tangential und normal zur Ebene  $BB$  zerlegt werden kann.

Es ist einleuchtend, dass die angreifende Kraft im Block nicht entlang einer Linie übertragen wird, sondern dass sie sich innerhalb des Körpers verteilt und die einzelnen Teile verschieden beansprucht. Die vorhin ermittelten Kompen-



**Abb. 2-1:** Zur Definition des Begriffs Spannung

ten der Kraft  $F_B$  sind die Resultierenden einer auf den Querschnitt verteilten *Flächenbelastung* nach Abb. 2-1c. Diese Flächenbelastung ist um so größer, je größer die durch eine bestimmte Flächeneinheit des Querschnitts übertragene Kraft ist, d.h. je größer der *Quotient Kraft pro Flächeneinheit* ist. Diese Größe wird *Spannung* genannt. Sie kann sich von Punkt zu Punkt eines betrachteten Querschnitts ändern. Für die durch die Normalkraft verursachte *Normalspannung*  $\sigma$  gilt danach allgemein:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A} = \frac{dF_n}{dA}.$$

und analog für die durch die Tangentialkraft verursachte *Schubspannung*  $\tau$

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta A} = \frac{dF_t}{dA}$$

Sind die Spannungen über einen Querschnitt konstant, dann erhält man

$$\sigma = \frac{F_n}{A}; \quad F_n \perp A \quad \tau = \frac{F_t}{A}; \quad F_t \parallel A \quad (2-1)$$

Die Dimension der Spannung ist Kraft pro Fläche, als Maßeinheit ist in der Festigkeitslehre  $\text{N/mm}^2$  üblich.

Verwendet wird auch

$$1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pascal}^1 = 1 \text{ Pa} \text{ bzw. } 1 \text{ N/mm}^2 = 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ MPa}.$$

Aus den Gleichungen 2-1 folgt, dass zur Übertragung einer Kraft immer eine bestimmte Querschnittsfläche notwendig ist, denn für  $A \rightarrow 0$  wird  $\sigma \rightarrow \infty$ . Die Übertragung entlang einer Wirkungs*linie* ist demnach nicht möglich. Die Kraft wird in Wirklichkeit z.B. von einem Seil oder einem Stab übertragen, dessen Querschnittsabmessungen klein gegenüber den Gesamtabmessungen des Systems sind.

Für alle Belastungsarten kann die Beanspruchung des Materials auf die Normal- und/oder Schubspannung zurückgeführt werden.

## 2.3 Der einachsige Spannungszustand

### 2.3.1 Spannung, Formänderung, das HOOKEsche<sup>2</sup> Gesetz

Ein zylindrischer Stab, der unbelastet die Länge  $L_0$  hat, wird mit der axialen Kraft  $F$  gezogen (Abb. 2-2). Diese Zugbeanspruchung hat eine Verlängerung des

<sup>1</sup>PASCAL, Blaise (1623–1662), französischer Mathematiker und Physiker

<sup>2</sup>HOOKE, Robert (1635–1703), englischer Physiker

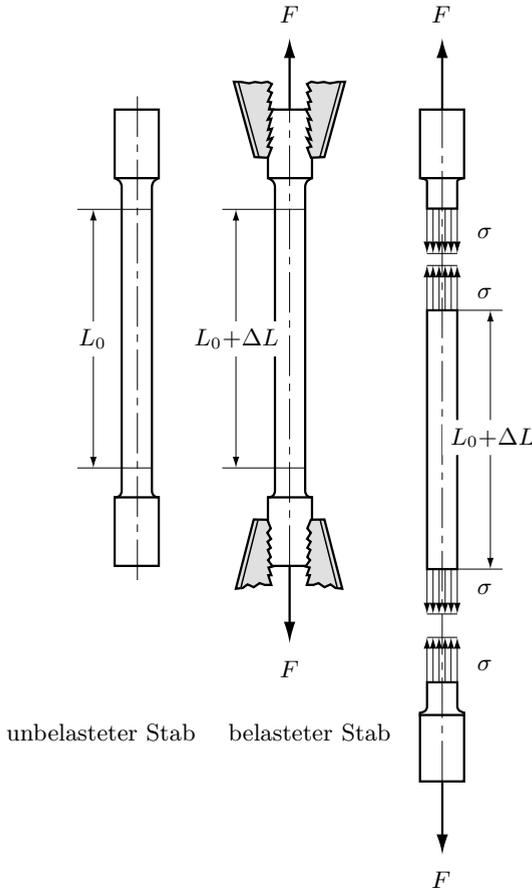


Abb. 2-2: Zugversuch

Stabes um den Betrag  $\Delta L$  zur Folge. Setzt man eine konstante Spannungsverteilung voraus, dann hat die durch die Kraft  $F$  verursachte Spannung  $\sigma$  in allen Querschnitten die Größe

$$\sigma = \frac{F}{A}.$$

Die oben gemachte Voraussetzung ist gerechtfertigt. Man kann sich den Stab aus vielen parallelen Drähten gleicher Länge und gleicher Querschnittsfläche zusammengesetzt denken. Es ist offensichtlich, dass für diesen Fall durch eine zentral eingeleitete Zugkraft alle Drähte gleich beansprucht werden. Sie stehen unter gleicher Spannung.

Die Verlängerung  $\Delta L$  eines Stabes wird um so größer sein, je größer die angreifende Kraft  $F$  und die Ausgangslänge  $L_0$  des Stabes sind. Sie wird um so kleiner sein, je größer die Querschnittsfläche  $A$  ist. Setzt man voraus, dass die

oben angegebenen Abhängigkeiten einem linearen Gesetz folgen (z.B. doppelte Kraft bedingt doppelte Verlängerung), dann kann man eine Proportion folgendermaßen formulieren

$$\Delta L \sim \frac{L_0 \cdot F}{A} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta L}{L_0} \sim \sigma.$$

Das Verhältnis Verlängerung zur Ausgangslänge nennt man *Dehnung* und bezeichnet die Größe mit

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}.$$

Es gilt demnach

$$\sigma \sim \varepsilon.$$

Nach Einführung der Proportionalitätskonstante  $E$  erhält man

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \tag{2-2}$$

Die Gleichung 2-2 formuliert das HOOKEsche Gesetz für Normalspannung. Dieses Gesetz sagt aus, dass die *Spannung proportional zur Dehnung* ist. In dem Maße, in dem in einem Stab die Spannung zunimmt, wird auch die Dehnung größer. Diesem Gesetz folgen die meisten Metalle bei nicht zu hoher Beanspruchung.

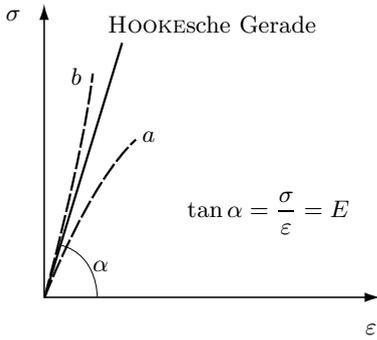
Man kann die Gleichung 2-2 in der Form

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

schreiben. Je größer die zur Erreichung einer bestimmten Dehnung  $\varepsilon$  aufzubringende Spannung  $\sigma$  ist, um so größer ist der Quotient  $\sigma/\varepsilon$  und damit der Elastizitätsmodul  $E$ . Der *E-Modul* ist demnach *eine Maßzahl für die Starrheit eines Werkstoffes. Je schwerer elastisch deformierbar ein Werkstoff ist, um so größer ist der E-Modul* (siehe Tabelle 2).

In einem  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm nach Abb. 2-3, ergibt das HOOKEsche Gesetz eine vom Ursprungspunkt des Koordinatensystems ausgehende Gerade, die HOOKEsche Gerade genannt wird. Der Tangens des Steigungswinkels entspricht dem  $E$ -Modul.

Viele Werkstoffe deformieren sich nicht nach dem HOOKEschen Gesetz. Beton, Kupfer, Gusseisen z.B. folgen einem durch die Linie *a* angedeuteten Verlauf,

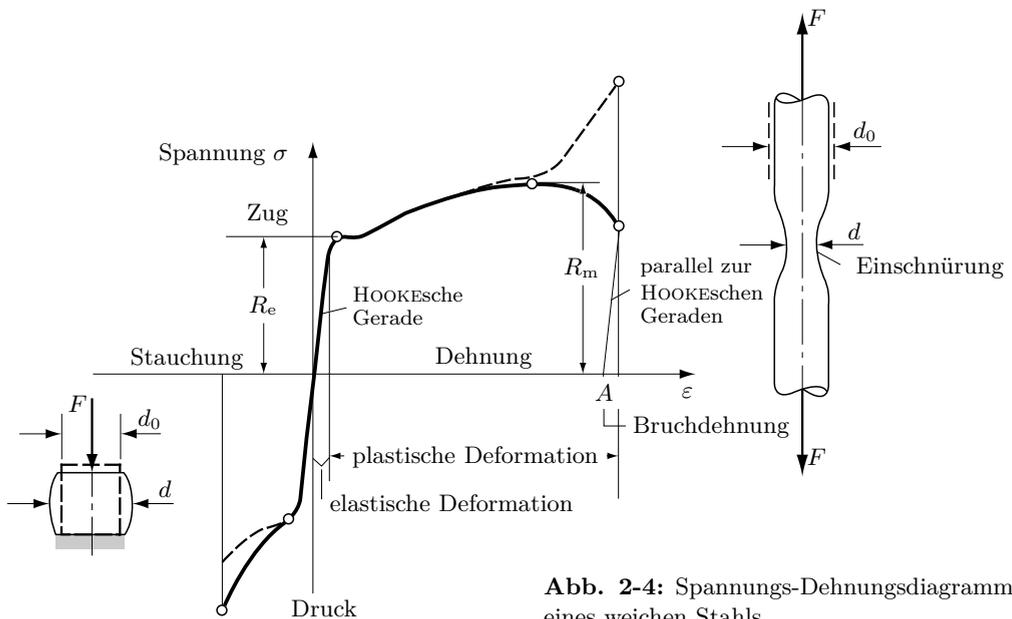


**Abb. 2-3:** Spannungs-Dehnungsdiagramm und Definition des E-Moduls

während Leder bei zunehmender Dehnung immer schwerer deformierbar wird. Dieses Verhalten entspricht dem Linienzug *b*. Wegen der Einfachheit der Berechnung ersetzt man in vielen Fällen die Kurvenzüge durch Gerade und gibt damit einen etwa mittleren E-Modul an (siehe Tabelle 2).

### 2.3.2 Das Festigkeitsverhalten verschiedener Werkstoffe

Das bei einem Zug- bzw. Druckversuch aufgenommene  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm lässt Rückschlüsse auf das Festigkeitsverhalten eines Werkstoffes ziehen. Die Abb. 2-4 zeigt das  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm für einen weichen Stahl.



**Abb. 2-4:** Spannungs-Dehnungsdiagramm eines weichen Stahls

Bei einem Zugversuch erfolgt die Dehnung des Stabes zunächst linear nach dem HOOKEschen Gesetz. Wird in diesem Bereich der Stab entlastet, geht er auf die Ausgangslänge zurück. Die Grenze für die Gültigkeit des HOOKEschen Gesetzes ist schwierig zu bestimmen. Man legt als Grenze die Spannung fest, die eine 0,01 %-ige bleibende Dehnung verursacht: 0,01-Grenze  $R_{p0,01}$ . Nach Erreichen der *Streckgrenze* ( $R_e$ ) nimmt die Dehnung merklich zu, obwohl die Spannung zunächst konstant ist oder kleiner wird. Diesen Vorgang nennt man *Fließen*. Der Werkstoff verhält sich jetzt bei der Deformation *plastisch*. Die vorher polierte Oberfläche wird matt und rau und es erscheinen z.T. Linien unter einem Winkel von ca.  $45^\circ$  zur Achse. Diese Linien werden *Fließlinien* genannt. Verursacht wird diese Erscheinung durch das Abgleiten der ineinander verhakten Gefügeteile unter einem Winkel von ca.  $45^\circ$ . Auf diesen Vorgang wird im Kapitel 3 eingegangen.

Nach der nach dem Fließen einsetzenden *Kaltverfestigung* (ansteigender Kurvenverlauf) erfolgte die Zerstörung des Stabes an einer Stelle, die durch eine vorher erfolgte Einschnürung geschwächt wurde (*Gewaltbruch*). Es ergeben sich im Diagramm zwei Linienzüge, je nachdem, ob bei der Berechnung der Spannung die Kraft auf den Ausgangsquerschnitt  $\pi \cdot d_0^2/4$  oder auf den an der Stelle der Einschnürung minimalen Querschnitt  $\pi \cdot d^2/4$  bezogen wird (gestrichelte Linie). Die Einschnürung setzt etwa bei der maximalen Spannung  $R_m$  ein (*Zugfestigkeit*).

Eine vom Endpunkt des Diagrammes gezogene Parallele zur HOOKEschen Geraden schneidet die Abszisse im Punkt A. Das ist die bleibende Dehnung des gebrochenen Stabes (*Bruchdehnung A*). Da die Verlängerung im plastischen Bereich jedoch hauptsächlich auf das Gebiet der Einschnürstelle konzentriert ist, erhält man verschiedene Werte, je nachdem, ob bei einem kurzen Stab auf eine kleine oder bei einem langen Stab auf eine große Ausgangslänge bezogen wird. Das ist ein Grund für die Normung der Stababmessungen für den Zugversuch (DIN EN 10002-1).

Es gibt Stähle, die keine ausgeprägte Streckgrenze haben. Für diese wird ersatzweise die Spannung bestimmt, bei der eine bleibende Dehnung von 0,2 % nach der Entlastung zurückbleibt. Diese nennt man 0,2-Grenze  $R_{p0,2}$  (s. Tabelle 4).

Wenn der Zugversuch sehr schnell durchgeführt wird, die Belastung eher schlagartig erfolgt, ergeben sich deutlich abweichende  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramme. Das Fließen, das eine bestimmte Zeit erfordert, wird z.T. unterdrückt bzw. zu höheren Belastungen verschoben. Das ist der Grund für die Zunahme der Festigkeit bei dieser Belastungsart. Die für den Zugversuch aufzuwendende Zeit ist deshalb so festgelegt, dass ein Einfluss nicht mehr messbar ist.

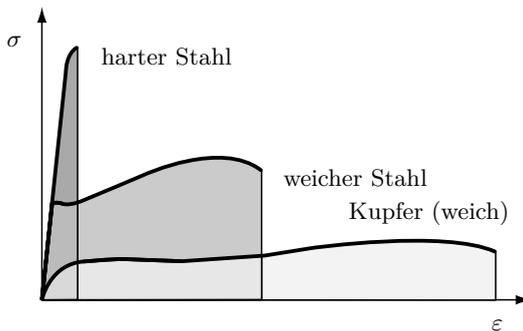
Einen weiteren Einfluss auf den Verlauf des Diagramms stellt die *Versuchstemperatur* dar. Sehr kalte Proben eines weichen Stahls tendieren im Verhalten zum

härteren Stahl, während bei erhöhten Temperaturen die Festigkeit abnimmt. Für den Versuch ist eine Temperatur von 20°C genormt.

Der Druckversuch wird vom linken Ast des Diagramms Abb. 2-4 dargestellt. Die Quetschgrenze (Punkt S) entspricht der Streckgrenze. Dieser Versuch ist vor allem für Werkstoffe wichtig, die ein stark unterschiedliches Verhalten bei Druck- und Zugbeanspruchung aufweisen. Das sind vor allem Gusseisen, Beton, Stein, Keramik, Porzellan, die bei Druck z.T. weit höher belastbar sind als bei Zug.

Die vom  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm *eingeschlossene Fläche* kann als die zur Zerstörung des Werkstoffes *aufgebrachte Arbeit* pro Volumeneinheit gedeutet werden. Das Produkt  $\sigma \cdot \varepsilon$  hat die Maßeinheit  $\text{Nmm}/\text{mm}^3$ . Darauf wird ausführlich in Abschnitt 3.4 eingegangen.

Die Abb. 2-5 zeigt die Zerreißdiagramme von Werkstoffen mit verschiedenen Eigenschaften. Ein harter Stahl erreicht die höchsten Spannungswerte und wird fast ohne Fließen und bleibende Dehnung zerstört. Auf der anderen Seite erreicht weichgeglühtes Kupfer bei geringer Festigkeit hohe bleibende Dehnung.



**Abb. 2-5:** Spannungs-Dehnungsdiagramme verschiedener Werkstoffe

Besonders wichtig in Bezug auf das Festigkeitsverhalten ist der Vergleich der zur Zerstörung notwendigen *Arbeiten*, die durch die im  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm eingeschlossenen Flächen dargestellt werden. Es ergibt sich die zunächst überraschende Tatsache, dass der harte Stahl mit hoher Festigkeit u.U. mit weniger *Arbeit* zerstört werden kann als der weiche Stahl mit kleineren Festigkeitswerten. Bedingt ist dieses Verhalten durch die geringe bleibende Dehnung eines hochfesten oder durchgehärteten Stahls. Einen Werkstoff dieser Eigenschaft nennt man *spröde*, im Gegensatz zu einem *zähen* Werkstoff, der erst nach größerer Deformation zerstört wird. Wie oben ausgeführt, spielen auch die Belastungsgeschwindigkeit und die Temperatur eine Rolle. Ein weicher Stahl kann sich bei schlagartiger Beanspruchung bei tiefen Temperaturen wie ein sprödes Material verhalten, da

das Fließen und damit die große bleibende Deformation verbunden mit der Aufnahme einer großen Formänderungsarbeit nicht auftritt.

Viele Anwendungen in der Technik erfordern in erster Linie einen Werkstoff, der in der Lage ist, verhältnismäßig viel Energie schadlos zu absorbieren. Bei stoßartiger Beanspruchung wird z.B. ein Maschinenteil trotz hoher Festigkeitswerte zerstört, wenn es nicht in der Lage ist, die Stoßenergie aufzunehmen. Eine klare Unterscheidung der verschiedenen Werkstoffeigenschaften ist hier besonders wichtig. Aus diesem Grunde sind diese in der Tabelle 1 zusammengefasst.

## 2.4 Der ebene Spannungszustand für Schubspannung

An einem Block der Höhe  $h$  greift, wie in Abb. 2-6 gezeigt, eine Kraft an. Dabei wird der vorher quadratische Block zu einem Parallelepiped deformiert. Der Winkel  $\gamma$  ist um so größer, je größer die Kraft  $F$  ist und je kleiner die Querschnittsfläche  $A$  senkrecht zur Zeichenebene ist. Setzt man auch hier eine lineare Abhängigkeit voraus, dann erhält man

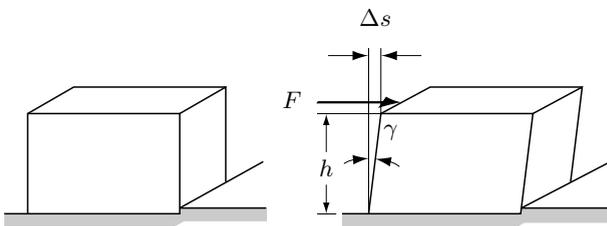
$$\gamma \sim \frac{F}{A}.$$

Die Gleichung 2-1 liefert unter der weiteren Voraussetzung einer idealisierten konstanten Spannungsverteilung die Beziehung

$$\tau \sim \gamma.$$

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (2-3)$$

Die Größe  $G$  wird *Gleitmodul* genannt. Ihre Dimension ist Kraft pro Fläche, die gebräuchliche Einheit  $\text{N}/\text{mm}^2$ . Aus versuchstechnischen Gründen wird der Gleitmodul im Torsionsversuch (Abschnitt 6.2.2) und nicht wie in der Abb. 2-6 angedeutet, ermittelt.



**Abb. 2-6:** Zur Definition des Gleitmoduls  $G$

Die Gleichung 2-3 formuliert das HOOKEsche Gesetz für Schubspannung. Der Gleitmodul  $G$  entspricht dem  $E$ -Modul in Gleichung 2-2, der Winkel  $\gamma$  der Dehnung  $\varepsilon$ . Für kleine Deformationen kann  $\gamma$  genau wie  $\varepsilon$  als Verhältnis zweier Längen definiert werden, denn es gilt für kleine Winkel

$$\gamma \approx \tan \gamma = \frac{\Delta s}{h}.$$

Genau wie der  $E$ -Modul ist auch der *Gleitmodul* eine Maßzahl für die Starrheit eines Stoffes, hier jedoch bei einer elastischen Deformation durch Schubspannungen.

Für verschiedene Werkstoffe sind die Elastizitäts- und Gleitmoduln in der Tabelle 2 gegeben.

## 2.5 Die Belastungsfälle nach BACH<sup>3</sup>

Man kann grundsätzlich zwischen einer zügigen, d.h. *ruhenden* Belastung und einer *schwingenden Belastung* unterscheiden.

Für den ersten Fall bleibt eine einmal aufgebrauchte Last konstant und damit auch die durch die Last verursachte Spannung. Eine solche Beanspruchung wird z.B. durch die Eigengewichte eines Bauwerks verursacht.

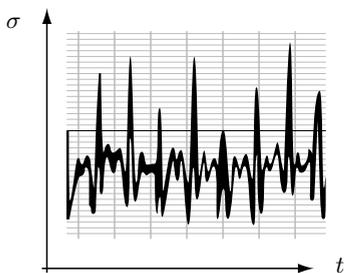


Abb. 2-7: Schwingende Belastung eines Maschinenteils

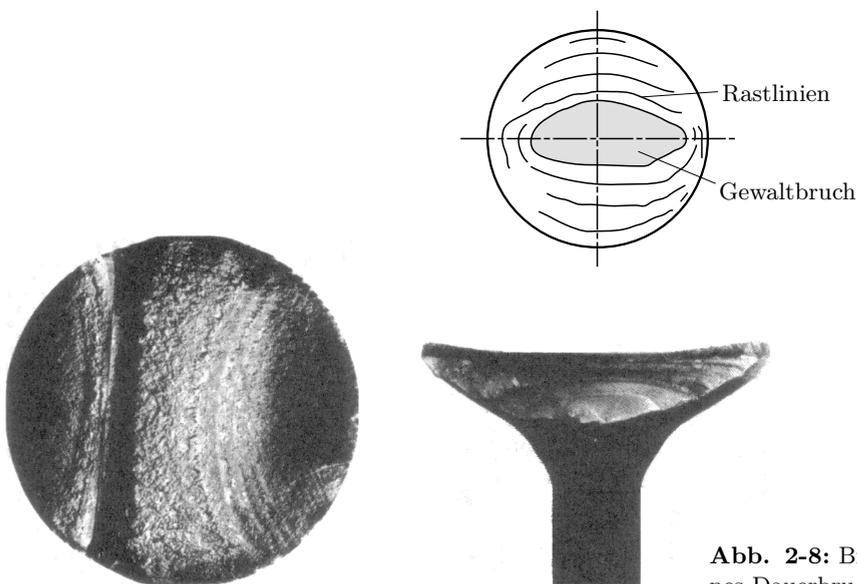
Maschinenteile sind fast nie ruhend, d.h. statisch belastet. Normalerweise ergeben sich je nach Maschine, Bauteil usw. zeitlich veränderliche Belastungen, wie sie als Beispiel Abb. 2-7 zeigt. In vielen Fällen ist es kaum möglich, eine mittlere Spannung oder mittlere Belastung anzugeben. Die Belastungsrichtung kann wechseln, an der gleichen Stelle im Bauteil treten dann nacheinander wechselnd Zug- und Druckspannungen auf.

<sup>3</sup>BACH, Carl Julius von (1847–1931), deutscher Ingenieur

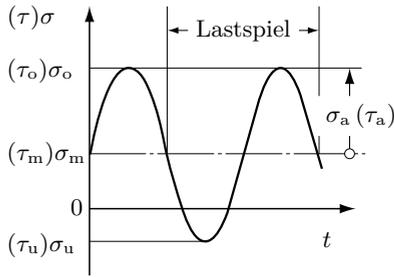
Die Zerstörung hat bei dieser Beanspruchungsart grundsätzlich andere Ursachen als bei der ruhenden Belastung. Die schwingende Beanspruchung hat bei genügend hoher Anzahl von Lastwechsel eine *Zerrüttung des Gefüges* zur Folge, die zum Bruch führen kann, obwohl die auftretende Maximalspannung kleiner als die Streckgrenze, geschweige denn die Bruchgrenze ist. Man beachte dabei auch, dass bei sich sehr schnell ändernden Belastungen das Fließen entweder ganz unterdrückt oder nach oben verschoben wird (siehe Abschn. 2.3.2). Da die Streckgrenze nicht erreicht wird, mithin Fließen nicht eintreten kann, erfolgt der *Bruch* auch eines zähen Materials *ohne plastische Deformation*. Die Bruchstelle sieht aus wie die eines spröden Materials. Ein solcher Bruch – er wird *Dauerbruch* genannt – geht von der Oberfläche aus und führt durch allmählich weiterlaufende Risse schließlich zu einer kritischen Querschnittminderung, bei der ein Gewaltbruch eintritt.

Ein Bruchbild dieser Art zeigt Abb. 2-8. Die außen liegenden, älteren Bruchflächen sind dunkler und können Korrosionserscheinungen zeigen. Die erkennbaren Linien – *Rastlinien* genannt – zeigen an, wie die einzelnen Risse zum Stillstand gekommen sind. Der durch den Gewaltbruch zerstörte Querschnitt hat ein größeres Korn.

Um das Verhalten von Werkstoffen bei schwingender Beanspruchung zu untersuchen, ist es notwendig, von idealisierten Belastungen auszugehen. Besonders einfach lässt sich in einer Prüfmaschine eine Belastungsänderung nach einer



**Abb. 2-8:** Bruchflächen eines Dauerbruchs



**Abb. 2-9:** Schwingende Belastung nach einer sin-Funktion

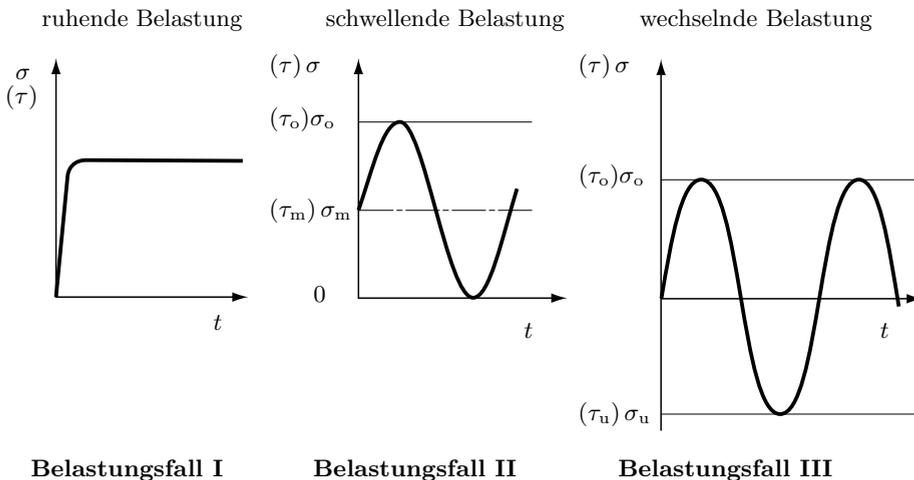
sin-Funktion realisieren. Man unterscheidet nach Abb. 2-9 folgende Begriffe

Mittelspannung	$\sigma_m$ bzw. $\tau_m$
Oberspannung	$\sigma_o$ bzw. $\tau_o$
Unterspannung	$\sigma_u$ bzw. $\tau_u$
Spannungsausschlag	$\sigma_a$ bzw. $\tau_a$

Aus der Vielzahl der möglichen Varianten wählt man nach BACH drei typische Fälle aus. Sie sind in der Abb. 2-10 dargestellt.

### ***Belastungsfall I – Ruhende Belastung***

$$\sigma_o = \sigma_u = \sigma_m \quad \sigma_a = 0$$



**Abb. 2-10:** Belastungsfälle nach BACH

**Belastungsfall II – Schwellende Belastung**

Die Belastung schwankt zwischen Null und einem Maximalwert

$$\sigma_o = \sigma_{\max} = 2\sigma_a \quad \sigma_m = \sigma_a \quad \sigma_u = 0$$

**Belastungsfall III – Wechselnde Belastung**

Es liegt ein Richtungswechsel der Belastung vor. Die Spannung wechselt zwischen einem positiven und gleich großen negativen Wert.

$$\sigma_o = \sigma_{\max} = \sigma_a \quad \sigma_u = -\sigma_{\max} \quad \sigma_m = 0$$

## 2.6 Die Dauer-, Zeit- und Betriebsfestigkeit

Wie im vorigen Abschnitt erläutert, kann eine wechselnde Beanspruchung zur Zerstörung des Materials führen, obwohl die maximal auftretenden Spannungen die Fließgrenze bzw. Zugfestigkeit nicht erreichen. Aus diesem Grunde kann für diesen Fall ein Zugversuch nach Abschnitt 2.3 keinen ausreichenden Aufschluss über das Festigkeitsverhalten geben.

Das Verhalten der Werkstoffe bei schwingender Beanspruchung wird folgendermaßen untersucht. Probestäbe genormter Abmessungen werden bei konstanter Mittelspannung mit einer überlagerten Schwingungsamplitude belastet. Wird diese Amplitude groß gewählt, kommt es bei verhältnismäßig wenig Lastspielen zum Bruch der Probe. Es bietet sich deshalb an, die Oberspannung in einem Diagramm über der Anzahl der ertragenen Lastspiele  $N$  aufzutragen. Man erhält so das WÖHLER-Diagramm<sup>4</sup>) nach Abb. 2-11. Wegen des großen Bereichs der Lastspiele erfolgt die Auftragung logarithmisch. Die Spannungsachse kann logarithmisch oder linear geteilt sein. Bis zu einer Lastspielzahl von etwa 10 bis 100 erfolgt die Zerstörung bei einer Oberspannung, die der Bruchfestigkeit  $R_m$  bei ruhender Beanspruchung entspricht. Im Bereich von ca. 100 bis 1 000 bzw. 10 000 Lastwechseln spricht man von *Kurzzeitfestigkeit*. Die zur Zerstörung führende Spannung hat sich verringert. Die Proben werden teilweise plastisch deformiert. Höhere Lastwechselzahlen – bis etwa 1 Million – führen bei weiterhin abnehmenden Spannungen zu verformungsfreien Brüchen. Das ist der Bereich *Zeitfestigkeit*. Eine Oberspannung, die von Stahl bei ca. 10 Millionen Lastwechseln gerade noch ertragen wird, führt erfahrungsgemäß auch bei noch höheren Lastwechselzahlen nicht zum Bruch. Diese Spannung entspricht der Asymptote im WÖHLER-Diagramm. Sie wird *Dauerfestigkeit*  $\sigma_D$  ( $\tau_D$ ) genannt. Leichtmetalle verhalten sich anders. Die Dauerfestigkeit liegt bei wesentlich höheren

<sup>4</sup>WÖHLER, August (1819–1914), deutscher Ingenieur

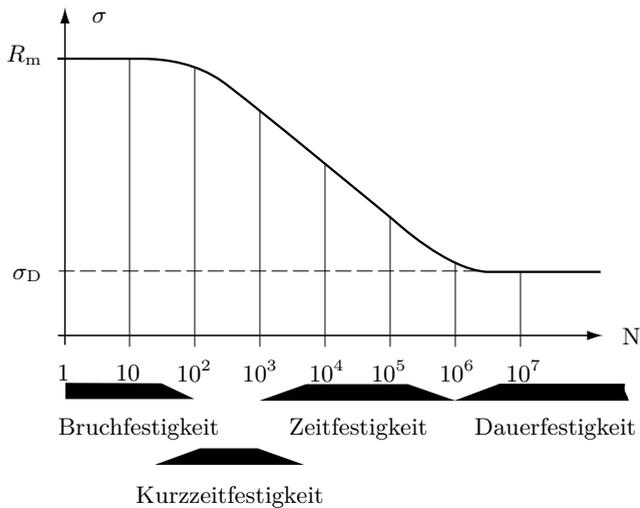


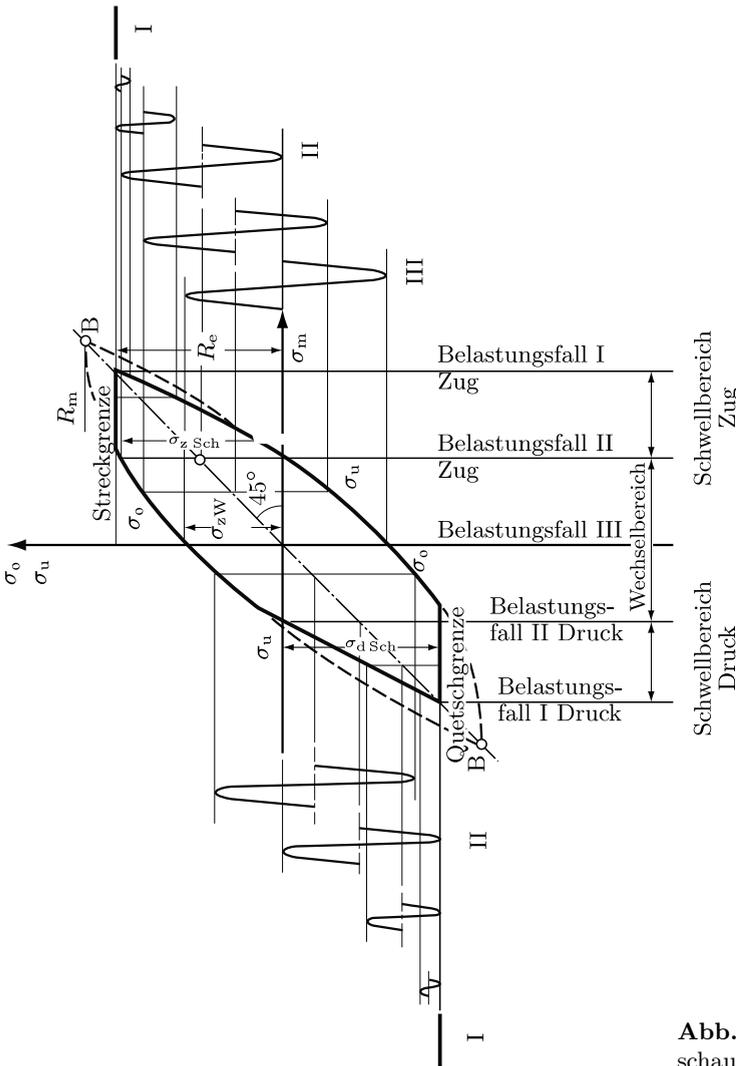
Abb. 2-11: WÖHLER-Diagramm

Lastspielzahlen. Das Arbeiten mit den WÖHLER-Diagrammen wird durch sehr starke Streuungen der Messwerte erschwert. Es ist notwendig, für jeden Belastungsfall eine Vielzahl von Probestäben zu untersuchen, um zu verwertbaren Ergebnissen zu kommen.

Die Dauerfestigkeit  $\sigma_D$  bzw.  $\tau_D$  ist eine besonders wichtige Größe, die man dem WÖHLER-Diagramm entnehmen kann. Sie hängt von der Größe der Mittelspannung ab, z.B. für schwellende oder wechselnde Belastung. Es liegt nahe, für einen Werkstoff und eine Beanspruchungsart (Zug-Druck, Biegung oder Torsion) die aus der Vielzahl der WÖHLER-Diagramme ermittelten Dauerfestigkeiten in einem einzigen Diagramm zusammenzufassen. Dieses nennt man *Dauerfestigkeitsschaubild*. Die Abb. 2-12 zeigt den grundsätzlichen Aufbau des Diagramms nach SMITH.

In diesem Diagramm sind die Grenzspannungen  $\sigma_o, \sigma_u$  über der Mittelspannung  $\sigma_m$  aufgetragen. Die beiden Kurvenzüge  $\sigma_o$  und  $\sigma_u$  geben an, in welchem Bereich in Abhängigkeit von  $\sigma_m$  die wechselnde Beanspruchung schwanken kann, so dass eine Zerstörung trotz beliebig hoher Lastwechsel gerade noch nicht eintritt. Bei zähen Werkstoffen kann wegen der vorher eintretenden bleibenden Deformation die Zugfestigkeit für eine Dimensionierung nicht zu Grunde gelegt werden. Deshalb wird das Dauerfestigkeitsschaubild solcher Werkstoffe oben von der Streckgrenze, unten von der Quetschgrenze begrenzt. Für Werkstoffe mit unterschiedlichem Verhalten bei Zug- und Druckbeanspruchung (z.B. Gusseisen) ergeben sich unsymmetrische Dauerfestigkeitsschaubilder.

Die Dauerfestigkeit für den Belastungsfall III wird *Wechselfestigkeit*  $\sigma_w$  und für den Belastungsfall II *Schwellfestigkeit*  $\sigma_{Sch}$  genannt, wobei man im letzten Fall



**Abb. 2-12:** Dauerfestigkeits-schaubild nach SMITH

zwischen Druck- und Zugbereich unterscheidet  $\sigma_{zSch}$  und  $\sigma_{dSch}$ . Die Wechsel-  
festigkeit für Normalspannungen kann man sowohl im Zug-Druck- als auch im  
Biegeversuch ermitteln. Es ergeben sich z.T. unterschiedliche Werte. Deshalb  
muss man zwischen Zug-Druck-Wechselfestigkeit  $\sigma_{zdW}$  und Biege-  
wechselfähigkeit  $\sigma_{bW}$  unterscheiden. Dabei kennzeichnen die kleinen Buchstaben: z = Zug;  
d = Druck; b = Biegung; t = Torsion. Eine Zusammenstellung ist in der Tabel-  
le 4 gegeben.

Grundsätzlich erhält man auch für Schubspannungen ein entsprechendes Dia-  
gramm.

Wie bereits im Abschnitt 2.5 dargestellt, entspricht die tatsächliche Beanspruchung in einer Maschine normalerweise weder einer sin-Schwingung noch ist die Spannungsamplitude konstant. Um die eher zufälligen Belastungen rechnerisch erfassen zu können, verfährt man folgendermaßen. Von Versuchen, bzw. von Annahmen ausgehend, legt man fest, wie oft eine bestimmte Spannungsspitze zu erwarten ist. Zugehörige Wertepaare Spannung – Anzahl werden in einem Diagramm dargestellt. Dieses nennt man *Beanspruchungskollektiv*. Liegt ein Teil der Spannungen über der Dauerfestigkeit, muss untersucht werden, ob die Gefahr eines Bruches besteht. Man spricht von *Betriebsfestigkeit*. Dazu wird im Kapitel 10 etwas ausgeführt.

## 2.7 Die Kerbwirkung

In diesem Abschnitt soll qualitativ untersucht werden, welchen *Einfluss eine Querschnittsänderung* eines z.B. auf Zug beanspruchten Stabes auf die Spannungsverteilung im Querschnitt hat. Zu diesem Zwecke kann man sich folgendes Gedankenmodell schaffen (Abb. 2-13).

Man denkt sich einen Flachstab zunächst durch Einsägen von Schlitzten in einzelne Vierkantstäbe vom Querschnitt  $\Delta A$  aufgeteilt. Diese Vierkantstäbe ersetzt man wiederum durch einzelne Drähte. Durch das Einsägen sind vorher vorhandene Querverbindungen zerstört worden. Die durch diese möglicherweise übertragenen Kräfte sollen jetzt von quer gespannten Federn aufgenommen werden.

Für den Stab ohne Querschnittsänderung ergibt sich, wie schon oben erläutert, eine konstante Spannungsverteilung. Alle Drähte sind bei einer Zugbeanspruchung des Systems gleich gespannt.

Ein Modell für einen gelochten Stab erhält man, wenn bei entsprechender Anordnung der Drähte und Querfedern ein Zylinder durch das System Abb. 2-13 gesteckt wird. Das Ergebnis ist in der Abb. 2-14 dargestellt. Dieses Modell wird einer Zugbeanspruchung unterworfen. Dabei kann man beobachten, dass der Zylinder zu einem Oval deformiert wird, weil die benachbarten Drähte zur Zylindermitte ausweichen. Der Abstand der Drähte zueinander verringert sich dabei. Das heißt aber, die *Kraftübertragung* ist an dieser Stelle *konzentriert* und damit muss die Spannung in diesem Bereich größer sein als in den Außenbereichen. Diesen Effekt einer Spannungserhöhung in der Nähe von verhältnismäßig schroffen Querschnittsübergängen nennt man *Kerbwirkung*. Die ohne Berücksichtigung der Kerbwirkung nach der elementaren Festigkeitslehre berechneten

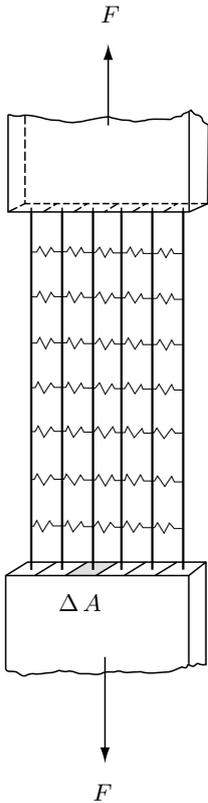


Abb. 2-13: Modell eines Zugstabes

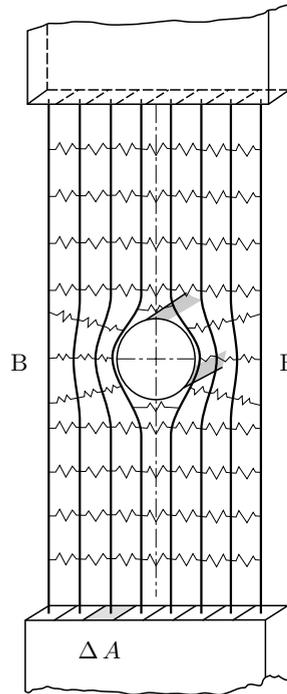
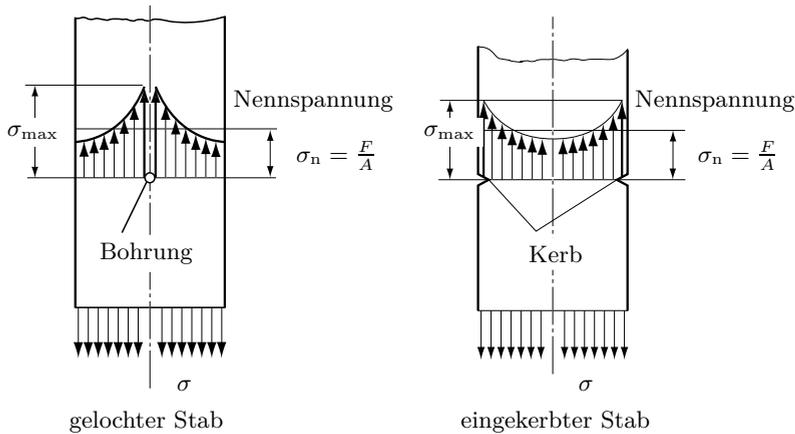


Abb. 2-14: Modell eines gelochten Zugstabes

Spannungen bezeichnet man auch als *Nennspannungen*. Sie können u.U. wesentlich unter den tatsächlichen Werten liegen. Für einen gezogenen, gelochten bzw. gekerbten Stab zeigt Abb. 2-15 die Verteilung der Spannungen.

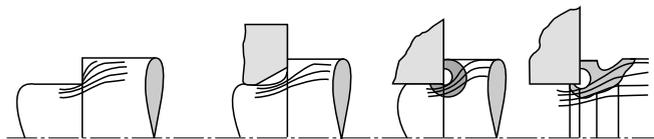
Die Spannungserhöhung ist um so größer, je kleiner der Krümmungsradius des Kerbgrundes ist. Da eine ungleichmäßige Spannungsverteilung eine ungleichmäßige Werkstoffausnutzung zur Folge hat, ist sie unerwünscht und sollte nach Möglichkeit vermieden werden. Deshalb sollten Querschnittsübergänge immer mit möglichst großen Abrundungsradien ausgeführt werden. Einige Beispiele zeigt Abb. 2-16. Eine Verminderung der Kerbwirkung einer scharfen Kerbe lässt sich durch *Entlastungskerven* nach Abb. 2-17 erreichen. Die in Abb. 2-16/2-17 eingezeichneten Linien veranschaulichen den Kraftfluss. Eine Konzentration dieser Linien deutet auf eine Spannungserhöhung hin. Sie sind vergleichbar mit Stromlinien in einem entsprechend geformten, von Flüssigkeit durchströmten Kanal.



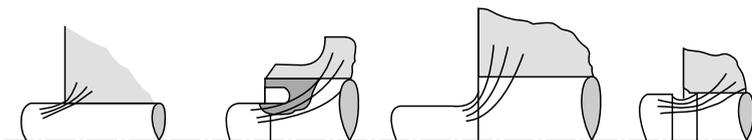
**Abb. 2-15:** Durch Kerbwirkung verursachte Spannungsverteilung im gebohrten und gekerbten Stab

Bei zähen Werkstoffen kann u.U. im Kerbgrund Fließen einsetzen, wodurch Spannungen abgebaut werden. Deshalb sind diese Werkstoffe im Gegensatz zu spröden nicht so kerbempfindlich.

Das Verhalten eines Werkstoffes in der Nähe einer Kerbe wird wesentlich von den dort wirkenden Spannungen in Querrichtung beherrscht. Im oben angeführten Modell sind sie durch Kräfte dargestellt, die von den Querspannungen in der Nähe



sehr ungünstig



sehr ungünstig

**Abb. 2-16:** Kraftfluss in einer abgesetzten Welle und in einer Welle-Nabe-Verbindung



**Abb. 2-17:** Spannungsminderung im Kerbgrund durch Entlastungskerbe

des Zylinders übertragen werden. Eine Deformation des Zylinders durch Zug ist nur möglich bei einer Verlängerung, d.h. Belastung der Querfedern. Es handelt sich in diesem Gebiet nicht mehr um einen einachsigen Spannungszustand. Das ist der Grund dafür, dass ein eingekerbter Stab aus zähem Material ohne Einschnürung und bleibende Dehnung wie sprödes Material reißt. Seine Festigkeit nimmt beim Zerreiversuch zu, da das Fließen unterdrückt wird und damit die Querschnittsverminderung durch Einschnürung unterbunden ist. Demgegenüber steht eine erhebliche Herabsetzung der Dauerfestigkeit. Dabei machen sich kleinste Kerben bemerkbar, so dass dieser Effekt schon eintritt, wenn die Probestücke nicht poliert, sondern nur geschlichtet oder geschruppt sind oder wenn die Oberfläche korrodiert ist (siehe Abschnitt 8.3.1).

Genau genommen kann man also die *Begriffe spröde und zäh nur im Zusammenhang mit der Beanspruchungsart und der Gestalt des Bauteiles benutzen.*

## 2.8 Die Bauteilsicherheit

Um das Versagen des Bauteils mit großer statistischer Wahrscheinlichkeit auszuschließen, muss die *Bauteilbeanspruchung* (auftretende Spannung) kleiner sein, als die *Bauteilfestigkeit* (ertragbare Spannung). Die **zulässige Spannung** ist die Spannung, die vom Bauteil auf Dauer ertragen werden kann, ohne dass es zu bleibenden Verformungen oder gar zum Bruch kommt. Sie muss demnach kleiner als die ertragbare Spannung sein. Sie darf nicht zu hoch gewählt werden. Wird sie auf der anderen Seite zu niedrig festgelegt, erhält man zu schwere Bauteile, deren Werkstoff ungenügend genutzt ist. Der Kompromiss zwischen den Forderungen nach Sicherheit und Wirtschaftlichkeit ist die Berücksichtigung der zahlreichen, die Festigkeit beeinflussenden Faktoren wie ungleichmäßige Spannungsverteilung, Kerbwirkung, Oberflächenbeschaffenheit, Fertigungstoleranzen, Abweichung von den angenommenen Belastungen, Streuung der Werkstoffkennwerte usw. (Diese Problematik wird ausführlich im Kapitel 10 behandelt).

Eine grobe, die verschiedenen Einflüsse nur pauschal berücksichtigende Methode der Ermittlung der zulässigen Spannung ist die Minderung der im Versuch ermittelten *Grenzspannungen* durch eine auf Erfahrungen basierende Zahl.

Mit diesem als **Sicherheitszahl**  $S^5$  (auch Sicherheitsfaktor) bezeichneten Wert größer Eins wird die zulässige Spannung

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{zul}} &= \frac{\sigma_{\text{Grenz}}}{S} \\ \tau_{\text{zul}} &= \frac{\tau_{\text{Grenz}}}{S}.\end{aligned}\tag{2-4}$$

Als Grenzspannung wählt man bei ruhender Belastung für Stähle mit ausgeprägter Fließgrenze die Streckgrenze  $R_e$ , sonst die Dehngrenze  $R_{p0,2}$  für spröde Werkstoffe die Zugfestigkeit  $R_m$ . Für die dynamische Beanspruchung wird je nach Belastungsfall die Schwellfestigkeit  $\sigma_{\text{sch}}$ , die Wechselfestigkeit  $\sigma_w$ , bzw. die Dauerfestigkeit  $\sigma_D$  zugrunde gelegt. Mit Gleichung 2-4 wird der Spannungsnachweis

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{vorh}} &\leq \sigma_{\text{zul}} \\ \tau_{\text{vorh}} &\leq \tau_{\text{zul}}\end{aligned}\tag{2-5}$$

geführt.

Zunehmend, vor allem bei dynamischer Beanspruchung, wird der Spannungsnachweis durch einen sog. Sicherheitsnachweis

$$\begin{aligned}\text{Sicherheit} &= \frac{\text{Bauteilfestigkeit}}{\text{Bauteilbeanspruchung}} \geq \text{Mindestsicherheit} \\ S &= \frac{\sigma_{\text{Grenz}}}{\sigma_{\text{vorh}}} \geq S_{\text{min}} \\ S &= \frac{\tau_{\text{Grenz}}}{\tau_{\text{vorh}}} \geq S_{\text{min}}.\end{aligned}\tag{2-6}$$

ersetzt. Damit wird die Aussage des Spannungsnachweises (die zulässigen Werte werden eingehalten) durch einen Faktor konkretisiert, der definiert, welche rechnerische Reserve das Bauteil gegenüber der Grenzlast hat. Es darf aber nicht übersehen werden, dass sowohl die Bauteilfestigkeit als auch die zugrunde gelegten Bauteilbeanspruchungen mit Unsicherheiten und Streuungen behaftet sind, die an der „rechnerischen Reserve“ zehren. Kleine Werte für die Mindestsicherheit bedeuten grundsätzlich **nicht** eine Verminderung der Sicherheit des betreffenden Bauteils. Eine kleinere Sicherheitszahl, begründet z.B. durch treffsichere Angaben über die Bauteilfestigkeit (Tragfähigkeit) aus Betriebsfestigkeitsversuchen mit dem Originalbauteil und die Ermittlung der Bauteilbeanspruchung auf

---

<sup>5</sup>Im Bauingenieurwesen (früher auch im Stahlbau und im Maschinenbau) ist der griechische Buchstabe  $\nu$  als Symbol für die Sicherheit üblich

der Basis eines gemessenen Lastkollektivs, auf statistisch verlässliche Weise bestimmt, verbürgt im Gegenteil eine erhöhte Sicherheit. Ein solches Vorgehen ist aber meist nur bei großen Stückzahlen praktisch möglich. Aus Kostengründen stehen häufig nur Festigkeitswerte aus Werkstoffnormen zur Verfügung, während die Lastannahmen idealisiert werden. Die daraus resultierenden **Unsicherheiten der Berechnung** müssen durch eine **höhere Sicherheitszahl** ausgeglichen werden.

Der Grundwert der Sicherheitszahlen gegenüber der Zugfestigkeit ist der praxisübliche Wert  $S_B = 2,0$ . Bei Werkstoffen mit einem Verhältnis  $R_p/R_m < 0,75$  gilt  $S_B = 1,5$  (siehe auch Tabelle 6). Für Gusseisenwerkstoffe ist er um das 1,4fache erhöht. Unter günstigen Umständen dürfen diese Sicherheitszahlen vermindert werden.

Aktuelle Werte für die Mindestsicherheit  $S_{\min}$  in Gl. 2-6, abhängig vom Verformungsvermögen des Werkstoffs, der Inspektionshäufigkeit und des Schadensrisikos, sind in der Tabelle 5 nach der FKM-Richtlinie<sup>6</sup> [23] angegeben.

In vielen Fällen genügen die von BACH angegebenen Werte für die zulässigen Spannungen (siehe Tabelle 3). Sie liegen im Allgemeinen verhältnismäßig niedrig. Oft ist es zweckmäßig, den Zusammenhang zwischen der Streckgrenze und der Zugfestigkeit zu kennen. Für Stähle und Leichtmetalle ist das Verhältnis beider Spannungen in Tabelle 6 gegeben.

Für einige Bereiche der Technik sind Berechnungsgleichungen und zulässige Spannungen vorgeschrieben. Im Allgemeinen jedoch muss der Konstrukteur Rechenverfahren und zulässige Spannungen festlegen.

Für den Bereich des Stahlbaus gilt die DIN 18 800 in ihrer Fassung von 1990 (seit 1997 darf die „alte Norm“, außer im Kran- und Brückenbau, nicht mehr angewendet werden). Wesentlich in dieser Neufassung, basierend auf einem neuen Sicherheitskonzept nach Eurocode 3, ist die Abkehr vom Nachweis der zulässigen Spannungen zugunsten der Gegenüberstellung von Beanspruchung und Beanspruchbarkeit

$$\frac{\text{Beanspruchung}}{\text{Beanspruchbarkeit}} \leq 1.$$

Da Bezeichnungsaufbau, Grenzzustände sowie der Berechnungsablauf im Allgemeinen nicht mit dem im Maschinenbau üblichen Vorgehen übereinstimmen, sollte sich der interessierte Leser anhand der Regelwerke und der einschlägigen Literatur (z.B. [47], [53]) mit der Problematik vertraut machen.

---

<sup>6</sup>FKM: Forschungskuratorium Maschinenbau

## 2.9 Zusammenfassung

An einem Körper außen angreifende Kräfte bzw. Momente haben eine Beanspruchung der inneren Materialteile zur Folge. Ein Maß für diese Beanspruchung ist die Spannung. Je nachdem, ob innere Kräfte an einem betrachteten Schnitt senkrecht oder tangential angreifen, entstehen Normalspannungen  $\sigma$  oder Schubspannungen  $\tau$ .

Die Normalspannungen  $\sigma$  verursachen eine Verlängerung bzw. Verkürzung eines Teilelementes, während die Schubspannung eine Winkeländerung zur Folge hat.

Das HOOKEsche Gesetz besagt:

Normalspannung  $\sim$  Dehnung  
 Schubspannung  $\sim$  Winkeländerung.

Mathematisch formuliert

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2-2)$$

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (2-3)$$

Diesen Gesetzen folgen vor allem Metalle. Die Elastizitätsmoduln  $E$  und die Gleitmoduln  $G$  sind für verschiedene Werkstoffe in Tabelle 2 gegeben.

Der wichtigste Versuch zur Beurteilung verschiedener Werkstoffeigenschaften ist der Zugversuch. Zusammengestellt und erklärt sind die wichtigsten Begriffe in Tabelle 1. Man sollte sich darüber im Klaren sein, dass sich ein Werkstoff je nach Belastungsfall (z.B. ruhend, wechselnd), nach Belastungsgeschwindigkeit (z.B. zügige oder schlagartige Belastung), nach Form (z.B. Kerbwirkung) und Temperatur (z.B. starke Unterkühlung) einmal mehr oder weniger zäh bzw. spröde verhalten kann. Für die Auswahl von Werkstoffen für Konstruktionsteile ist es wichtig zu bedenken, dass hochfeste Stähle wegen ihrer geringen bleibenden Dehnung mit geringerem Energieaufwand zerstört werden können als weichere Stähle geringerer Festigkeit.

Eine schwingende Beanspruchung in Maschinen erfolgt in der Regel ungeordnet. Für Festigkeitsuntersuchungen hat man nach BACH idealisierte Belastungen durch konstante Mittelspannung und überlagerte sinus-Belastung eingeführt. Das führt auf die Begriffe Schwellfestigkeit und Wechselfestigkeit (Tabelle 4). Das sind jeweils Dauerfestigkeiten, die der Asymptote im WÖHLER-Diagramm entsprechen. Dargestellt werden sie im Dauerfestigkeitsschaubild nach SMITH (Abb. 2-12).

Schroffe Querschnittsübergänge und Kerbe führen zu örtlichen Spannungskonzentrationen, die möglichst zu vermeiden sind (Kerbwirkung; siehe Kapitel 10).

Für die Dimensionierung von Bauteilen ist eine zulässige Spannung so festzulegen, dass weder eine bleibende Deformation noch ein Bruch zu erwarten ist. Wegen der Unmöglichkeit, alle Einflüsse in einer Festigkeitsberechnung zu erfassen, ist so notwendig, nur einen gewissen Teil einer Grenzspannung als zulässige Spannung für eine Dimensionierung zu Grunde zu legen. Sie wird folgendermaßen definiert

$$\sigma_{\text{zul}} = \frac{\sigma_{\text{Grenz}}}{S}; \quad \tau_{\text{zul}} = \frac{\tau_{\text{Grenz}}}{S} \quad (2-4)$$

Die Wahl der Grenzspannung und der Sicherheitszahl hängt vom Belastungsfall und Werkstoff ab. Anhaltswerte gibt die Tabelle 5.



# 3 Zug und Druck

## 3.1 Einführung

Ausgegangen wird von *Normalspannungen* in senkrechten Schnitten eines gezogenen oder gedrückten Stabes. Dabei ist es notwendig, bei Druck die Aussagen auf kurze Blöcke zu beschränken (s. Kapitel 7 „Knickung“). In *beliebigen Schnitten* treten zusätzlich *Schubspannungen* auf. Ihr Einfluss auf die Zerstörung von gezogenen (gedrückten) Bauteilen wird dargestellt und begründet. Es folgt ein Abschnitt, in dem vom HOOKEschen Gesetz ausgehend eine Gleichung für die *Formänderung* abgeleitet wird. In diesem Zusammenhang ist es möglich, eine Beziehung zwischen den wichtigen Stoffgrößen *Elastizitätsmodul*  $E$ , *Gleitmodul*  $G$  und *Querszahl*  $\mu$  aufzustellen.

Bei Zug-(Druck-)Beanspruchung eines Stabes verändert sich dessen Form. Die dazu aufzuwendende *Formänderungsarbeit* kann man in die Anteile *Volumen- und Gestaltänderungsarbeit* zerlegen. Der zweite Anteil ist eine wichtige Größe bei der Berechnung von Bauteilen, die einer zusammengesetzten Beanspruchung unterliegen. Abgeschlossen wird das Kapitel mit der Definition der Begriffe *Flächenpressung* und *Lochleibung*.

## 3.2 Die Spannung

### 3.2.1 Schnitt senkrecht zur Achse

An einem prismatischen Stab greift zentrisch eine Kraft nach Abb. 3-1 an. Zur Ermittlung der Spannung im Schnitt BB wird ein entsprechendes Teilstück herausgetrennt, d.h. freigemacht. Die Gleichgewichtsbedingung ergibt

$$\sum F = 0 \quad -\sigma A + F = 0$$

und damit für die Spannung

$$\sigma_{z;d} = \frac{F}{A} \tag{3-1}$$

Index  $z$  für Zug, Index  $d$  für Druck.

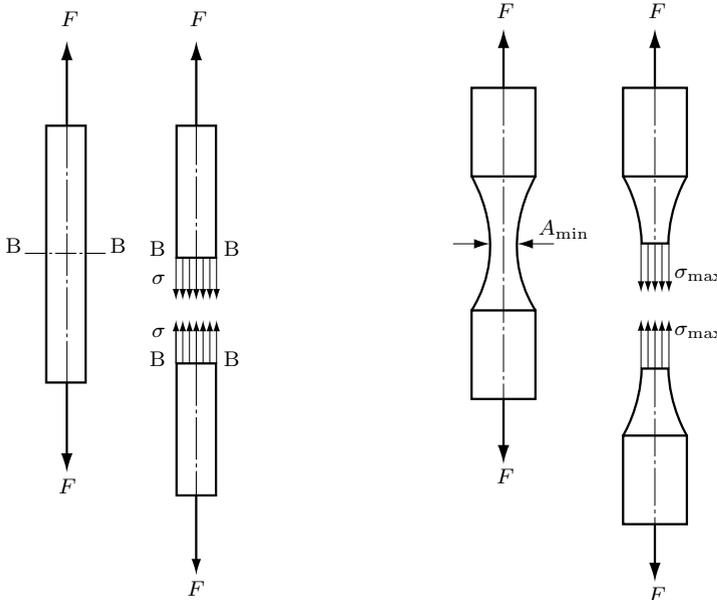
Diese Gleichung gilt unter den folgenden Voraussetzungen:

1. Die Querschnittfläche  $A$  steht senkrecht zur Achse des Stabes.
2. Die Wirkungslinie der Kraft fällt mit der Schwerpunktsachse zusammen.
3. Die Spannungsverteilung über dem Querschnitt ist konstant.

Für Stäbe mit veränderlichem Querschnitt gilt

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A_{\min}} \quad (3-2)$$

Für diesen Fall trifft die 3. der vorher aufgeführten Bedingungen nur bedingt zu. Ist der Querschnittsübergang sehr schroff, muss die Kerbwirkung berücksichtigt werden (siehe Abschnitt 2.7 und Kapitel 10).



**Abb. 3-1:** Geschnittener Zugstab

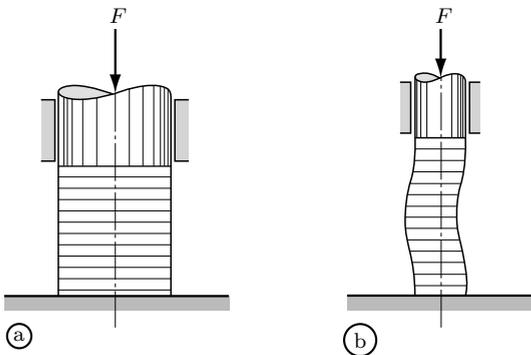
**Abb. 3-2:** Zugstab mit veränderlichem Querschnitt

Für die Dimensionierung z.B. einer Zugstange wird die oben angegebene Gleichung in der Form

$$A_{\text{erf}} = \frac{F}{\sigma_{z;d \text{ zul}}}$$

benutzt. Man berechnet demnach den mindestens erforderlichen Stabquerschnitt unter Zugrundelegung einer zulässigen Spannung, die nach den im Abschnitt 2.9 diskutierten Gesichtspunkten festgelegt wird.

Die oben angegebenen Gleichungen gelten auch für eine Druckbeanspruchung jedoch unter einer zusätzlichen Voraussetzung. Die Form des gedrückten Prismas muss so sein, dass unter der gegebenen Belastung ein seitliches Ausweichen nicht eintritt (Abb. 3-3). Für welche Stabformen bzw. Belastungen ein solches Ausweichen zu erwarten ist, wird im Kapitel 7 (Knickung) behandelt. Die Gefahr des Knickens eines Druckstabes ist in erster Näherung um so größer, je länger er ist und je kleiner die Querschnittsfläche bei einer gegebenen Querschnittsform ist. Demnach gelten die in dem Abschnitt angegebenen Gleichungen im Wesentlichen für auf Druck beanspruchte Blöcke.



**Abb. 3-3:** Gedrungener und schlanker Block auf Druck beansprucht

### 3.2.2 Beliebiger Schnitt

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, welche Spannungen in einem beliebigen Schnitt eines auf Zug oder Druck beanspruchten Stabes auftreten. Zu diesem Zweck wird durch einen gezogenen Stab nach Abb. 3-4a ein Schnitt B–B gelegt, der unter dem Winkel  $\alpha$  zu dem vorher untersuchten senkrechten Schnitt liegt. Das so abgetrennte, d.h. freigemachte Teilsystem muss im Gleichgewicht sein. Es müssen die Gleichungen  $\sum F_x = 0$  und  $\sum F_y = 0$  erfüllt sein. Das ist nur möglich, wenn in der gedachten Schnittfläche sowohl die Normalspannungen  $\sigma$  als auch die Schubspannungen  $\tau$  wirksam sind. Das Bild c zeigt das freigemachte System mit den eingetragenen Schnittkräften  $\sigma \cdot A$  und  $\tau \cdot A$  für die die Gleichgewichtsbedingungen für ein gedrehtes Koordinatensystem aufgestellt werden:

$$\sum F_y = 0$$

$$F \cdot \cos \alpha - \sigma \cdot A = 0.$$