Mathematik in der Betriebswirtschaft

Aufgabensammlung mit Lösungen

von

Dr. Lothar Walter
Universität Bremen

Oldenbourg Verlag München

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

© 2012 Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH
Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
www.oldenbourg-verlag.de

Das Werk einschließlich aller Abbildungen ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen.

Lektorat: Thomas Ammon
Herstellung: Constanze Müller
Titelbild: thinkstockphotos.de
Einbandgestaltung: hauser lacour
Gesamtherstellung: freiburger graphische betriebe GmbH & Co. KG, Freiburg

Dieses Papier ist alterungsbeständig nach DIN/ISO 9706.

ISBN 978-3-486-71683-2
eISBN 978-3-486-71780-8

Vorwort

Im Rahmen der Vorlesungsreihe Rahmenwissenschaften der Ökonomie an der Universität Bremen wird das Modul Mathematik angeboten. Mit diesem Modul soll den Studierenden im Bachelorstudium Betriebswirtschaftslehre die an die Belange der Wirtschaftswissenschaft ausgerichteten notwendigen mathematischen Grundlagen nahegebracht werden. Diese ausgewählten mathematischen Grundlagen sollen die Basis für ein weiteres erfolgreiches Studium der Betriebswirtschaftslehre und auch Volkswirtschaftslehre schaffen.

Insbesondere für Studierende des Bachelorstudienganges Betriebswirtschaftslehre der Universität Bremen sowie natürlich auch für Studierende der Betriebswirtschaftslehre, Volkswirtschaftslehre oder der Wirtschaftswissenschaft anderer Universitäten, Hochschulen wie auch Verwaltungs- und Wirtschaftsakademien wurde das ebenfalls im Oldenbourg Verlag erschienene Buch „*Mathematik in der Betriebswirtschaft*“ von mir als Begleitmaterial verfasst. Das Buch soll eine wesentliche Grundlage für eine Vorlesungsmitschrift schaffen und den Studierenden eine gezielte Vorbereitung auf die Mathematikvorlesungen ermöglichen.

Dieses vorliegende Buch „*Mathematik in der Betriebswirtschaft – Aufgabensammlung mit Lösungen*“ kommt dem vielfachen Wunsch der Studierenden nach, auch die Lösungen zu den Mathematikaufgaben aus dem Lehrbuch zur Verfügung zu stellen. Es enthält nun die Lösungswege und Lösungsmöglichkeiten zu allen Aufgaben aus dem Lehrbuch sowie Übungsaufgaben zum in den Fachkapiteln behandelten Stoff. Durch das detaillierte Aufzeigen der Lösungswege werden den Studierenden der Betriebs- wie auch Volkswirtschaftslehre die Zusammenhänge zwischen mathematischen Fragestellungen und Anwendungen in der Wirtschaftswissenschaft nahegebracht. Die Studierenden sollten aber erst versuchen, die Aufgaben selber zu lösen und dann die Lösungswege anschauen; so wird auch ein nachhaltiger Lerneffekt erreicht.

Vielen Dank möchte ich an dieser Stelle Frau cand. math. Marie Antoinette van Amelsvoort sagen. Sie hat mich bei der Aufgabenauswahl tatkräftig unterstützt. Allen Studierenden der Betriebswirtschaftslehre wünsche ich nun viel Spaß und Erfolg beim Lösen der zahlreichen Aufgaben.

Dr. Lothar Walter
Bremen, im Juli 2012

Abkürzungen und Symbole

a, b, c	Konstanten, Parameter
x, y, z	Variablen
$\wedge$	Konjunktion (sowohl ... als auch)
$\vee$	Disjunktion (entweder ... oder)
$\rightarrow$	Implikation
$\leftrightarrow$	Äquivalenz
$\{\}$	Mengenklammer
$\in$	Element von
$\notin$	nicht Element von
$\mathbf{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbf{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbf{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbf{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\subseteq$	Teilmenge von
$\cup$	Vereinigung (ODER)
$\cap$	Durchschnitt (UND)
$\mathbf{R}^n$	n-dim. reeller Zahlenraum
$=$	Gleichheitszeichen
$\neq$	ist ungleich
$\exists$	es existiert
$\nexists$	es existiert nicht
$\forall$	Allquantor (für alle)
∞	unendlich
$>$	ist größer
$<$	ist kleiner
$\geq$	ist größer gleich
$\leq$	ist kleiner gleich
i	imaginäre Zahl $= \sqrt{-1}$

$\sum$	Summenzeichen
$\prod$	Produktzeichen
$n!$	n-Fakultät
$[\,]$	abgeschlossenes Intervall
$f:\ X \to Y$	Abbildung, Funktion
$f(x)$	Funktion mit einer Veränderlichen
$f^{-1}(x)$	Umkehrfunktion
$p_n(x)$	Polynom n-ten Grades
x^n	Potenzfunktion
a^x	Exponentialfunktion zu Basis a
e^x	Exponentialfunktion zu Basis e
$\log_a x$	Logarithmusfunktion zur Basis a
$\log x$	dekadische Logarithmusfunktion (Basis 10)
$\ln x$	natürliche Logarithmusfunktion (Basis e)
$\sin x$	Sinusfunktion
$\cos x$	Cosinusfunktion
$\lim\limits_{x \to \xi}$	Grenzwert für x gegen ξ
$\Delta y,\ \Delta x$	Differenz zwischen y-Werten, Differenz zwischen x-Werten
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$	Differenzenquotient
dy, df	Differential
$\dfrac{df}{dx}$	Differentialquotient
$\dfrac{d}{dx}$	Differentialoperator
$f'(x)$	erste Ableitung der Funktion $f(x)$ nach x
$\dfrac{d^2 f}{dx^2} = f''(x)$	zweite Ableitung der Funktion $f(x)$ nach x
ϵ_{yx}	Punktelastizität
$f(x, y)$	Funktion mit zwei Veränderlichen
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	Funktion mit n Veränderlichen
$\dfrac{\partial}{\partial x}$	partieller Differentialoperator
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	gemischter partieller Differentialquotient zweiter Ordnung

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	reiner partieller Differentialquotient zweiter Ordnung
$\int$	Integralzeichen
$\int f(x\,dx$	unbestimmtes Integral der Funktion $f(x)$
$F(x)$	Stammfunktion zu $f(x)$
$F_{ab} = \int_a^b f(x)\,dx$	bestimmtes Integral der Funktion $f(x)$ von a bis b
$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$	Spaltenvektor
$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$	Zeilenvektor
$\vec{a}^{\,T}$	transponierter Vektor
$\vec{e}$	Einheitsvektor
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$	Matrix
$\mathbf{A}_{mn}$	$m \times n$-Matrix
$(a_{ij})_{mn}$	$m \times n$-Matrix
$\mathbf{A}^T$	Transponierte der Matrix $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{-1}$	Inverse der Matrix $\mathbf{A}$
$\mathbf{E}$	Einheitsmatrix
$\mathrm{rg}(\mathbf{A})$	Rang der Matrix $\mathbf{A}$
$\det \mathbf{A}, \lvert\mathbf{A}\rvert$	Determinate der Matrix $\mathbf{A}$

Griechisches Alphabet

α	Alpha	ν	Ny
β	Beta	ξ	Xi
Γ, γ	Gamma	Π	Pi
ϵ	Epsilon	ρ	Rho
ζ	Zeta	Σ, σ	Sigma
η	Eta	τ	Tau
Θ, θ	Theta	χ	Chi
κ	Kappa	Φ, ϕ	Phi
Λ, λ	Lambda	Ψ, ψ	Psi
μ	My	Ω, ω	Omega

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen und Motivation 1

1.1 Aufgaben und Lösungen zum Kapitel 1 1

1.2 Weitere Aufgaben und Lösungen zum Kapitel 1 6

2 Elementare Begriffe und Instrumente 13

2.1 Aufgaben und Lösungen zum Kapitel 2 13

2.2 Weitere Aufgaben und Lösungen zum Kapitel 2 18

3 Folgen und Reihen 23

3.1 Aufgaben und Lösungen zum Kapitel 3 23

3.2 Weitere Aufgaben und Lösungen zum Kapitel 3 29

4 Finanzmathematik 31

4.1 Aufgaben und Lösungen zum Kapitel 4 31

4.2 Weitere Aufgaben und Lösungen zum Kapitel 4 39

5 Funktionen 45

5.1 Aufgaben und Lösungen zum Kapitel 5 45

5.2 Weitere Aufgaben und Lösungen zum Kapitel 5 55

6 Differentialrechnung 61

6.1 Aufgaben und Lösungen zum Kapitel 6 61

6.2 Weitere Aufgaben und Lösungen zum Kapitel 6 69

7 Funktionen mit mehreren Veränderlichen 75

7.1 Aufgaben und Lösungen zum Kapitel 7 75

7.2 Weitere Aufgaben und Lösungen zum Kapitel 7 79

8 Integralrechnung 81

8.1 Aufgaben und Lösungen zum Kapitel 8 81

8.2 Weitere Aufgaben und Lösungen zum Kapitel 8 87

9 Vektoren und Matrizen 93

9.1 Aufgaben und Lösungen zum Kapitel 9 93

9.2 Weitere Aufgaben und Lösungen zum Kapitel 9 101

10 Gleichungen und Gleichungssysteme 105

10.1 Aufgaben und Lösungen zum Kapitel 10 105

10.2 Weitere Aufgaben und Lösungen zum Kapitel 10 118

A Formelsammlung 125

B Literaturverzeichnis 133

C Zum Verfasser 135

Index 137

1 Grundlagen und Motivation

Die Mathematik ist ein hilfreiches Instrument der Darstellung und Analyse, welches nicht nur in den natur- und ingenieurwissenschaftlichen Disziplinen, sondern zunehmend auch in den wirtschaftswissenschaftlichen Disziplinen - in der Volkswirtschaftslehre ebenso wie in der Betriebswirtschaftslehre - Anwendung findet. Dabei dient den Naturwissenschaftlern, Ingenieuren und Wirtschaftswissenschaftlern die Mathematik als Hilfsmittel, d.h. sie wenden die Mathematik auf ihre entsprechenden Frage- und Problemstellung an; nur die Mathematiker betreiben die Mathematik um ihrer selbst willen.

Gerade in einem Anwendungsfach wie der Wirtschaftswissenschaft bedarf es eines grundlegenden mathematischen Verständnisses. Darum ging es in diesem Kapitel. Es wurde dargelegt, dass die Schwierigkeiten, die mit der Mathematik in der Wirtschaftswissenschaft bestehen, oftmals im Umgang mit der abstrakten Symbolik und dem Zusammenspiel der einzelnen Symbole und Variablen begründet liegen. Um wirtschaftswissenschaftliche Zusammenhänge in der Sprache der Mathematik beschreiben zu können wurde des Weiteren dargelegt, dass man

(i) die Elemente der Sprache und ihre Bedeutung wie z.B. Zahlen und Symbolik, Mengen, Operatoren, Graphen, Abbildungen, Funktionen usw. kennen muss,

(ii) die korrekte Beziehungen zwischen den Elementen aufstellen können muss, um mittels Gleichungen, Funktionen usw. ein geeignetes Modell zu formulieren, und

(iii) die mathematischen Instrumente handhaben können muss, was die Kenntnisse der Arithmetik, Mengenlehre, Analysis, Linearen Algebra, Statistik usw. voraussetzt.

Für das Anwenden der Mathematik in der Wirtschaftswissenschaft ist ein kontinuierliches Üben von Aufgaben unabdingbar. Das Lösen von Aufgaben unterstützt zudem die Fähigkeit zur mathematischen Abstraktion. Daher widmet sich das nächste Kapitel verschiedenen Aufgaben und stellt Lösungswege und -möglichkeiten vor.

1.1 Aufgaben und Lösungen zum Kapitel 1

Nachfolgend werden die Aufgaben aus Kapitel 1 des Lehrbuches „Mathematik in der Betriebswirtschaft“ mit ihren dazugehörigen Lösungswegen im Detail vorgestellt.

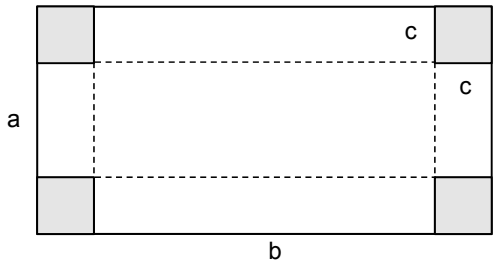
Aufgabe 1-1: Gegeben sei ein rechteckiges Blatt Papier mit den Seitenlängen a und b. An den vier Ecken des Blattes sollen vier gleich große Quadrate der Länge c ausgeschnitten werden, so dass durch Auffalten des entstandenen Randes eine offene Schachtel gefaltet werden kann.

a) Wie groß ist der Rauminhalt der Schachtel in Abhängigkeit der Randhöhe c (= Kantenlänge) des ausgeschnittenen Quadrates.

b) Welcher Rauminhalt der Schachtel ergibt sich für $a = 12$ cm, $b = 24$ cm und $c = 4$ cm?

Lösung:

Das Blatt Papier mit den angegebenen Seitenlängen a und b lässt sich wie folgt skizzieren (die mit der Seitenlänge c auszuschneidenden vier Quadrate sind grau hinterlegt):



a) Rauminhalt $V = \underbrace{\text{Grundfläche}}_{(a-2\cdot c)\cdot(b-2\cdot c)} \cdot \underbrace{\text{Höhe}}_{c} = c \cdot (a - 2c) \cdot (b - 2c)$

b) Werte in die Formel einsetzen:
$V = 4 \cdot (12 - 2 \cdot 4) \cdot (24 - 2 \cdot 4)\ \text{cm}^3 = 4 \cdot 4 \cdot 16\ \text{cm}^3 = 256\ \text{cm}^3$

Aufgabe 1-2: Betrachten wir zwei in einem Ort im Wettbewerb stehende Speditionsunternehmen A und B. Für einen Transport verlangt Spedition A 50,– € Frachtpauschale und 10,– € für jedes transportierte Stückgut. Spedition B fordert dagegen 70,– € Pauschale und 8,– € pro Stückgut.

a) Ab welcher Stückzahl ist die Spedition B günstiger als die Spedition A?

b) Stellen Sie die dargelegten Zusammenhänge graphisch dar.

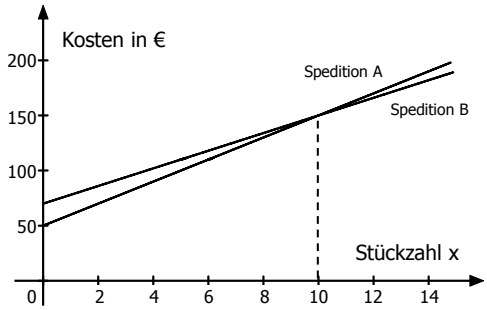
Lösung:

a) Mit den angegebenen Frachtpauschalen, Stückkosten und der Stückzahl x lassen sich für die beiden Speditionen A und B zwei Geradengleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned} \text{Spedition A} \quad & \text{Spedition B} \\ 50 + 10x &> 70 + 8x \\ 10x &> 20 + 8x \\ 2x &> 20 \\ x &> 10\ , \end{aligned}$$

also ab einer Stückzahl von 10 ist Spedition B günstiger.

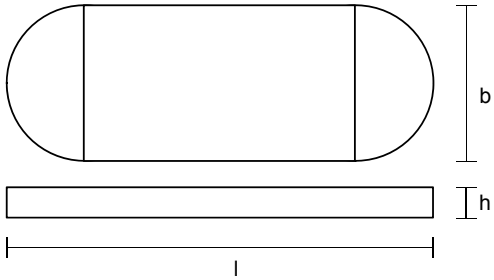
b) Die Kostenfunktionen für die beiden Speditionen A und B lassen sich in einem Diagramm wie folgt darstellen:



Aufgabe 1-3: Eine Fischdose habe in der Grundfläche die Form eines Rechteckes mit zwei an den Schmalseiten angesetzten Halbkreisen. Sie lässt sich beschreiben durch die Gesamtlänge l, die Breite b und die Höhe h.

a) Bestimmen Sie die Oberfläche A und das Volumen V der Fischdose in Abhängigkeit der gegebenen Parameter b, l und h (die Blechdicke der Dose sei zu vernachlässigen).

b) Wie lauten die Formeln für A und V in Abhängigkeit von b, wenn die Abmessungen in dem bestimmten Verhältnis $h : b : l = 1 : 3 : 6$ zueinander stehen sollen?

Lösung:

Mit der in der Aufgabenstellung angegebenen Gesamtlänge l, der Breite b und der Höhe h lässt sich die Fischdose wie folgt skizzieren: