



Finanzmathematik

Lehrbuch mit Übungen

von

Prof. Dr. Jutta Arrenberg

Fachhochschule Köln

Oldenbourg Verlag München

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© 2011 Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH
Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
www.oldenbourg-verlag.de

Das Werk einschließlich aller Abbildungen ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen.

Lektorat: Anne Lennartz
Herstellung: Constanze Müller
Titelbild: thinkstockphotos.de
Einbandgestaltung: hauser lacour
Gesamtherstellung: Grafik + Druck GmbH, München

Dieses Papier ist alterungsbeständig nach DIN/ISO 9706.

ISBN 978-3-486-70722-9

Vorwort

Finanzmathematik ist ein anwendungsbezogenes Fachgebiet der Mathematik, das als eigenständiges Lehrfach im Rahmen des Studiums der Wirtschaftswissenschaften seinen festen Platz an den Hochschulen hat. Eine typische Aufgabe der Finanzmathematik ist es, mehrere Geldbeträge zu einem Betrag zusammenzufassen, um Vergleiche mit anderen Zahlungsströmen anstellen zu können.

Das vorliegende Buch behandelt die Grundlagen der Finanzmathematik. Es gliedert sich in neun Kapitel. Nach der Festlegung der Notation im ersten Kapitel wird im zweiten Kapitel die lineare Verzinsung vorgestellt. Das dritte Kapitel befasst sich mit verschiedenen Berechnungsmöglichkeiten von Zinseszinsen. Auf der Grundlage dieser Verzinsungsarten wird im vierten Kapitel die Rentenrechnung dargelegt. Hier werden Berechnungsformeln erarbeitet, um regelmäßige Zahlungen über einen längeren Zeitraum rechnerisch zu erfassen. Im fünften Kapitel schließt sich die sogenannte Tilgungsrechnung an. Bei regelmäßigen Zahlungen über einen längeren Zeitraum wird hierbei unterschieden nach Zins- und Tilgungsbeträgen. Die effektive Verzinsung wird im sechsten Kapitel erläutert. Im siebten Kapitel werden die drei Methoden der Investitionsrechnung dargestellt: Kapitalwertmethode, interner Zins und Annuitätenmethode. Im achten Kapitel werden Abschreibungsverfahren aufgezeigt.

Jedes Kapitel enthält Beispiele, um die Leserin bzw. den Leser sukzessive an den Lernstoff heranzuführen. Das neunte Kapitel stellt etliche Aufgaben (mit Lösungen) zum Üben bereit. Im Anhang befinden sich Tabellen mit Auf- und Abzinsungsfaktoren.

Das Buch richtet sich an Studierende der Wirtschaftswissenschaften. Durch die vielen Beispiele sowie Aufgaben mit Lösungen kann der Inhalt auch autodidaktisch im Selbststudium erarbeitet werden. Ferner gibt es in dem Buch Zeitachsen, gerade wenn etliche Teilbeträge vorliegen, ist das Zeichnen einer Zeitachse wichtig, um den Überblick über die Zahlungsströme zu behalten.

Ich danke allen Hörerinnen und Hörern meiner Vorlesung Finanzmathematik, die mit ihren Fragen maßgeblich dazu beigetragen haben, aus meinem Skript dieses Buch reifen zu lassen.

Köln

Jutta Arrenberg

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Einfache Zinsen	3
2.1	Lineare Verzinsung	3
2.2	Zusammenfassung	8
3	Zinseszinsen	9
3.1	Jährliche Verzinsung	9
3.1.1	Nachschüssige Verzinsung	9
3.1.2	Vorschüssige Verzinsung	14
3.2	Unterjährliche Verzinsung	20
3.2.1	Relativer Zinssatz	21
3.2.2	Konformer Zinssatz	24
3.3	Gemischte Verzinsung	27
3.3.1	Relativ gemischte Verzinsung	27
3.3.2	Bankmäßig gemischte Verzinsung	32
3.4	Stetige Verzinsung	34
3.5	Zusammenfassung	35
4	Rentenrechnung	39
4.1	Jährliche Renten	39
4.1.1	Nachschüssige Jahresrente	39
4.1.2	Vorschüssige Jahresrente	47
4.2	Unterjährliche Renten	54
4.2.1	Nachschüssige Rente zu relativ gemischter Verzinsung	54
4.2.2	Vorschüssige Rente zu relativ gemischter Verzinsung	59
4.2.3	Nachschüssige Rente zu unterjährlicher Verzinsung zum relativen Zins ..	65
4.2.4	Vorschüssige Rente zu unterjährlicher Verzinsung zum relativen Zins ...	67
4.3	Ewige Rente	70
4.4	Zusammenfassung	72

5	Tilgungsrechnung	75
5.1	Raten-Tilgung	75
5.2	Annuitäten-Tilgung	79
5.2.1	Prozentannuitäten-Tilgung	85
5.2.2	Zweimalige Prozentannuitäten-Tilgung	90
5.3	Zusammenfassung	94
6	Effektivzins	97
6.1	Jährliche Zahlungen	97
6.2	Unterjährliche Zahlungen	103
6.3	Wertpapiere	107
6.4	Zusammenfassung	116
7	Investitionsrechnung	119
7.1	Kapitalwertmethode	119
7.2	Annuitätenmethode	122
7.3	Interner Zinsfuß	123
7.4	Zusammenfassung	125
8	Abschreibungsverfahren	127
8.1	Lineare Abschreibung	128
8.2	Geometrisch-degressive Abschreibung	130
8.3	Übergang von der geometrisch-degressiven zur linearen Abschreibung ...	133
8.4	Zusammenfassung	137
9	Übungen	139
9.1	Aufgaben	139
9.2	Lösungen	153
A	Anhang	173
A.1	Herleitung der Duration nach Macaulay	173
A.2	Tabelle Abzinsungssummenfaktor	174
Index		179

1 Einführung

Aufgabe der Finanzmathematik ist es, für langwierige Zahlungsvorgänge kurze, prägnante Berechnungsformeln zu entwickeln, mit deren Hilfe gewünschte Ergebnisse und Vergleiche schnell und bequem berechnet werden können. Wir beschäftigen uns in diesem Buch mit der Herleitung solcher Berechnungsformeln.

Bevor wir mit dem finanzmathematischen Rechnen beginnen, legen wir die zukünftige Notation fest. Gemessen an den vielen Formeln, die wir später erarbeiten werden, umfasst die Notation nur einige wenige Bezeichnungen.

Definition 1.1

K_0 Anfangskapital

K_n Endkapital nach n Jahren

n Laufzeit in Jahren

p Zinsfuß pro anno (bei 4% Jahreszinsen beträgt $p = 4$)

$i = \frac{p}{100}$ Zinssatz pro anno (bei 4% Jahreszinsen beträgt $i = 0,04$)

$q = 1 + \frac{p}{100}$ Zinsfaktor pro anno (bei 4% Jahreszinsen beträgt $q = 1,04$)

Neben diesen sechs Bezeichnungen spielen die folgenden beiden Rechenoperationen in der Finanzmathematik eine zentrale Rolle: Mit dem Begriff **Aufzinsen** wird die Rechenoperation bezeichnet, die von K_0 zu K_n führt. Mit dem Begriff **Abzinsen** wird hingegen die Rechenoperation bezeichnet, die von K_n zu K_0 führt.

In der Finanzmathematik werden im Wesentlichen zwei Zinsarten unterschieden: Im ersten Fall gibt es keine Zinsen auf Zinsen, d.h. Bemessungsgrundlage für die jährliche Zinshöhe ist immer das Startkapital, diese Zinsen werden in der Finanzmathematik als **einfache Zinsen** bezeichnet. Im zweiten Fall werden die Vorjahreszinsen im nächsten Jahr mit verzinst, diese Zinsen werden in der Finanzmathematik als **Zinseszinsen** bezeichnet.

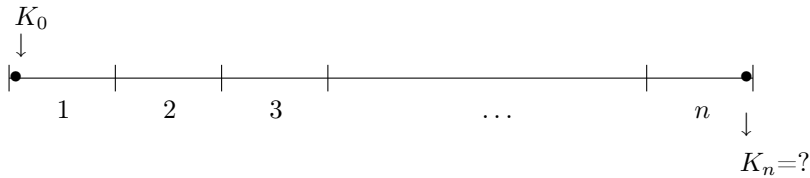
2 Einfache Zinsen

Bei der Verzinsung mit einfachen Zinsen ist der Endwert K_n eine lineare Funktion der Laufzeit n . Deshalb wird die Verzinsung mit einfachen Zinsen auch als **lineare Verzinsung** bezeichnet.

Wie wir später in Kapitel 3.3 noch sehen werden, wird die lineare Verzinsung herangezogen, um Jahresbruchteile bei der gemischten Verzinsung zu verzinsen.

2.1 Lineare Verzinsung

Hauptaufgabe der linearen Verzinsung ist es, den Betrag auszurechnen, auf den ein Kapital von K_0 Geldeinheiten (GE) in n Jahren angewachsen sein wird, wenn für die Verzinsung zu $p\%$ pro anno jeweils das Anfangskapital K_0 zur Bemessung zu Grunde gelegt wird.



Die Zinsen sind jedes Jahr gleich groß, da sie immer bezogen auf das Anfangskapital berechnet werden. Nach einem Jahr ergeben sich folgende Beträge:

$$\text{Zinsen Ende des ersten Jahres: } K_0 \cdot i \quad (2.1)$$

$$\text{Guthaben Ende des ersten Jahres: } K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = K_0 (1 + i) \quad (2.2)$$

Nach einem weiteren Jahr ergeben sich folgende Beträge:

$$\text{Zinsen Ende des zweiten Jahres: } K_0 \cdot i \quad (2.3)$$

$$\text{Guthaben Ende des zweiten Jahres: } K_2 = K_1 + K_0 \cdot i \quad (2.4)$$

$$= K_0 (1 + i) + K_0 \cdot i \quad (2.5)$$

$$= K_0 (1 + 2 \cdot i) \quad (2.6)$$

Bei einer Laufzeit von n Jahren ergibt sich folgender Verzinsungsplan:

Definition 2.1

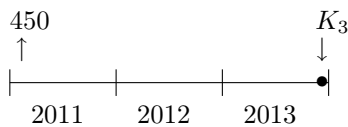
Lineare Verzinsung

Jahr	Zinsen am Ende des Jahres	Guthaben am Ende des Jahres
1	$K_0 \cdot i$	$K_1 = K_0 (1 + i)$
2	$K_0 \cdot i$	$K_2 = K_0 (1 + 2 \cdot i)$
3	$K_0 \cdot i$	$K_3 = K_0 (1 + 3 \cdot i)$
$\vdots$		
n	$K_0 \cdot i$	$K_n = K_0 (1 + n \cdot i)$

In der Definition 2.1 lässt sich insb. erkennen, dass bei der linearen Verzinsung das Endkapital K_n linear abhängt von der Laufzeit n .

Beispiel 2.2

Eine Studentin hat am 01.01.2011 ihrem Freund einen Betrag von 450 GE geliehen. Der Freund verpflichtet sich, bei linearer Verzinsung zu 11% pro anno die Schulden am 31.12.2013 zurückzuzahlen. Welchen Betrag muss er zahlen?



$$K_3 = K_0(1 + 3 \cdot i) = 450(1 + 3 \cdot \frac{11}{100}) = 598,50$$

d.h. er muss 598,50 GE zurückzahlen. Der Verzinsungsplan sieht wie folgt aus:

Jahr	Zinsen am Ende des Jahres	Guthaben am Ende des Jahres
1	49,50	499,50
2	49,50	549,00
3	49,50	598,50

Ist der Endwert K_n bei einer linearen Verzinsung bekannt, so lässt sich daraus wie folgt das Startkapital K_0 , der sogenannte **Barwert** berechnen:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot i) \quad (2.7)$$

Division durch $(1 + n \cdot i)$ ergibt:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + n \cdot i)} \quad (2.8)$$

In dem Beispiel 2.2 hatten wir für die Laufzeit n eine natürliche Zahl zu Grunde gelegt: $n = 3$. Bei der linearen Verzinsung darf die Laufzeit n jedoch auch eine beliebige positive reelle Zahl sein; d.h. $n \in \mathbb{R}^+$.

Beispiel 2.3

Bei linearer Verzinsung zu 4% p.a. steht nach zwei Jahren und drei Monaten ein Betrag von 2 180 GE zur Verfügung. Wie groß ist der Barwert?

$$\begin{aligned} \text{zwei Jahre und drei Monate sind } 2 + \frac{3}{12} &= 2,25 \text{ Jahre} \\ K_0 &= \frac{K_n}{1 + n \cdot i} = \frac{2\,180}{1 + 2,25 \cdot 0,04} = \frac{2\,180}{1,09} = 2\,000 \end{aligned}$$

d.h. der Barwert beträgt 2 000 GE.

Ist nur ein unterjährlicher Zins bekannt, so lässt sich daraus der Jahreszins berechnen.

Beispiel 2.4

Eine Bank gewährt 2,5% einfache Vierteljahreszinsen. Ein Kapital von GE 1 000 soll 72 Tage angelegt werden. Wie hoch ist der Endbetrag nach 72 Tagen?

$$\text{Jahreszinsfuß: } p = 4 \cdot 2,5 = 10$$

$$\text{Laufzeit: } n = \frac{72}{360} = 0,2 \text{ Jahre}$$

$$\begin{aligned} \text{Endbetrag nach 72 Tagen: } K_{0,2} &= K_0(1 + 0,2 \cdot i) \\ &= 1\,000(1 + 0,2 \cdot \frac{10}{100}) \\ &= 1\,020 \end{aligned}$$

d.h. der Endbetrag beträgt 1 020 GE.

Um zu verschiedenen Zeitpunkten angelegte (gezahlte, fällige) Geldbeträge wertmäßig miteinander vergleichen zu können, müssen die Geldbeträge zunächst durch entsprechendes Auf- bzw. Abzinsen auf ein und denselben Zeitpunkt bezogen werden.

Bei der linearen Verzinsung kann dieser Vergleichszeitpunkt nicht beliebig gewählt werden, sondern ist als sogenannter **Bewertungstichtag** anzugeben.

Beispiel 2.5

Eine Zahlungsverpflichtung besteht aus zwei Zahlungen:

- 1 000 000 GE am 31.03. des Jahres
- 2 000 000 GE am 31.10. des Jahres

Wie hoch ist bei linearer Verzinsung zu 4% p.a. der Wert der Zahlungsverpflichtung am 01.01. des Jahres, wenn der Bewertungsstichtag der

- a) 31.03. des Jahres ist?
- b) 31.10. des Jahres ist?
- c) 01.01. des Jahres ist?

Lösung:

$$a) \frac{1\,000\,000 + \frac{2\,000\,000}{1 + \frac{7}{12} \cdot 0,04}}{1 + \frac{3}{12} \cdot 0,04} = 2\,925\,146$$

d.h. der Wert der beiden Zahlungen beträgt am 01.01. des Jahres 2 925 146 GE.

$$b) \frac{1\,000\,000 \cdot (1 + \frac{7}{12} \cdot 0,04) + 2\,000\,000}{1 + \frac{10}{12} \cdot 0,04} = 2\,925\,806$$

d.h. der Wert der beiden Zahlungen beträgt am 01.01. des Jahres 2 925 806 GE.

$$c) \frac{1\,000\,000}{1 + \frac{3}{12} \cdot 0,04} + \frac{2\,000\,000}{1 + \frac{10}{12} \cdot 0,04} = 2\,925\,583$$

d.h. der Wert der beiden Zahlungen beträgt am 01.01. des Jahres 2 925 583 GE.

Liegt eine zukünftige Zahlungsverpflichtung vor, so kann mit Hilfe des Barwerts die ausgleichende sofortige Zahlung berechnet werden.

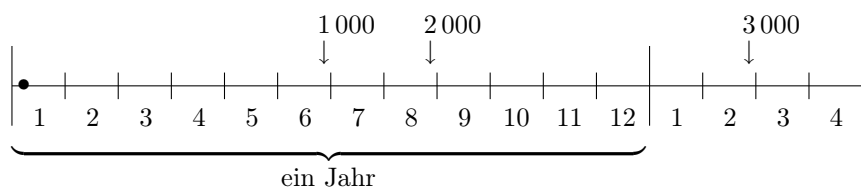
Beispiel 2.6

Ein Schuldner hat bei linearer Verzinsung zu 4% p.a. folgende Zahlungsverpflichtung:

- 1 000 € in sechs Monaten
- 2 000 € in acht Monaten
- 3 000 € in vierzehn Monaten

- a) Durch welche sofortige Rückzahlung kann der Schuldner seine zukünftigen Schulden begleichen? (Bewertungsstichtag der Schulden ist der Zeitpunkt der sofortigen Zahlung.)

Die sofortige Rückzahlung ist der Barwert aller Teilbeträge.



$$\begin{aligned}
 K_0 &= \frac{1\,000}{1 + \frac{6}{12} \cdot 0,04} + \frac{2\,000}{1 + \frac{8}{12} \cdot 0,04} + \frac{3\,000}{1 + \frac{14}{12} \cdot 0,04} \\
 &= 980,3922 + 1\,948,0519 + 2\,866,2420 \\
 &= 5\,794,6861
 \end{aligned}$$

d.h. mit einer sofortigen Zahlung von 5 794,69 € hat der Schuldner seine zukünftigen Schulden beglichen.

- b) Zu welchem Zeitpunkt reicht eine einmalige Rückzahlung in Höhe des Nennwertes aus, um sämtliche Schulden zu begleichen, wenn der Bewertungsstichtag der Zeitpunkt der sofortigen Zahlung ist?

Wert der Schulden (Zeitpunkt der sofortigen Zahlung): 5 794,69

Nennwert: $1\,000 + 2\,000 + 3\,000 = 6\,000$

Gesucht $n = ?$ mit $K_0(1 + n \cdot i) = 6\,000$; d.h.:

$$5\,794,6861 \cdot (1 + n \cdot 0,04) = 6\,000 \Leftrightarrow n = 0,8858$$

$$0,8858 \text{ Jahre} \cdot 360 \text{ Tage} = 318,8 \approx 319 \text{ Tage}$$

d.h. 319 Tage nach dem Zeitpunkt der sofortigen Zahlung können die Zahlungsverpflichtungen durch eine einmalige Rückzahlung in Höhe von 6 000 € abgelöst werden.

- c) Durch welche einmalige Rückzahlung nach sechzehn Monaten können die Schulden beglichen werden?

1. Lösungsweg:

Da kein Bewertungsstichtag vorgegeben wurde, unterstellen wir den Zeitpunkt der sofortigen Zahlung als Bewertungsstichtag:

$$\frac{x}{1 + \frac{16}{12} \cdot 0,04} = 5\,794,6861$$

Daraus folgt:

$$x = 5\,794,6861 \cdot \left(1 + \frac{16}{12} \cdot 0,04\right) = 6\,103,736$$

d.h. nach sechzehn Monaten sind 6 103,74 € zu bezahlen, falls der Bewertungsstichtag für die Schulden der Zeitpunkt der sofortigen Zahlung ist.

2. Lösungsweg:

Da kein Bewertungsstichtag vorgegeben wurde, unterstellen wir den Zeitpunkt sechzehn Monate nach der sofortigen Zahlung als Bewertungsstichtag:

$$\begin{aligned}
 &1\,000 \cdot \left(1 + \frac{10}{12} \cdot 0,04\right) + 2\,000 \cdot \left(1 + \frac{8}{12} \cdot 0,04\right) \\
 &+ 3\,000 \cdot \left(1 + \frac{2}{12} \cdot 0,04\right) = 6\,106,6
 \end{aligned}$$

d.h. nach sechzehn Monaten sind 6 106,67 € zu bezahlen, falls der Bewertungstichtag für die Schulden der Zeitpunkt sechzehn Monate nach dem Zeitpunkt der sofortigen Zahlung ist.

Im Beispiel 2.6 erhielten wir im Aufgabenteil c) unterschiedliche Ergebnisse, weil zwei unterschiedliche Bewertungstichtage unterstellt wurden. In der Praxis ist der Bewertungstichtag z.B. das Datum der Bilanz eines Unternehmens.

2.2 Zusammenfassung

Zusammengefasst gelten für die lineare Verzinsung mit $n \in \mathbb{R}^+$ folgende Berechnungsformeln:

Endkapital	$K_n = K_0(1 + n \cdot i)$
Barwert	$K_0 = \frac{K_n}{1 + n \cdot i}$

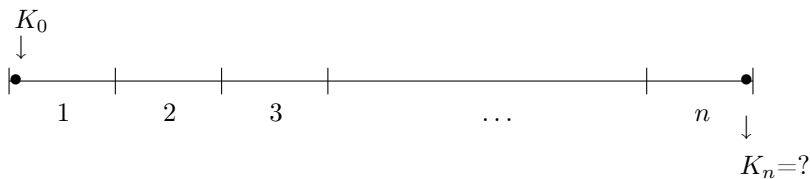
3 Zinseszinsen

Die im Kapitel 2 behandelten einfachen Zinsen bleiben jedes Jahr unverändert, da die Bemessungsgrundlage für die einfachen Zinsen jeweils das Startkapital ist. Im Gegensatz hierzu werden bei der Zinseszinsrechnung aus Vorperioden aufgelaufene Zinsen in der folgenden Zinsperiode mit verzinst, es gibt also Zinsen auf Zinsen.

Bei der Zinseszinsrechnung unterscheiden wir drei Fälle. Entweder können die Zinsen nur jährlich ausgeschüttet werden oder die Zinsen können auch für Jahresbruchteile, d.h. unterjährlich berechnet werden. Oder es werden zwei Verzinsungsarten gemischt, d.h. die Zinsen werden für volle Jahre anders berechnet als für Jahresbruchteile.

3.1 Jährliche Verzinsung

Hauptaufgabe der Zinseszinsrechnung mit jährlichen Zinsen ist es, den Betrag auszurechnen, auf den ein Kapital von K_0 GE in n Jahren angewachsen sein wird, wenn bei einer Verzinsung zu $p\%$ pro anno die jährlichen Zinsen zu dem Kapital geschlagen werden und im darauffolgenden Jahr mitverzinst werden.



3.1.1 Nachschüssige Verzinsung

Bei der **nachschüssigen** Verzinsung werden die Zinsen erst nach Ablauf eines Jahres gezahlt. Die Laufzeit n einer nachschüssigen Verzinsung wird nur in vollen Jahren gemessen; d.h. $n \in \mathbb{N}$. Es ergibt sich folgender Verzinsungsplan:

Definition 3.1

Nachschüssige Verzinsung

Jahr	Zinsen am Ende des Jahres	Guthaben am Ende des Jahres
1	$K_0 \cdot i$	$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = K_0(1 + i)$
2	$K_1 \cdot i$	$K_2 = K_1 + K_1 \cdot i = K_1(1 + i) = K_0(1 + i)^2$
3	$K_2 \cdot i$	$K_3 = K_2 + K_2 \cdot i = K_2(1 + i) = K_0(1 + i)^3$
$\vdots$		
n	$K_{n-1} \cdot i$	$K_n = K_{n-1} + K_{n-1} \cdot i = K_0(1 + i)^n = K_0 \cdot q^n$

Mit der Berechnungsformel $K_n = K_0 \cdot q^n$ aus der Definition 3.1 lassen sich Kapitalendwerte schnell berechnen.

Beispiel 3.2

Auf welchen Betrag ist ein Kapital von GE 5 200 bei nachschüssigen Zinseszinsen von 4 % pro anno in sechs Jahren angewachsen?

$$K_6 = K_0 (1 + i)^6 = 5\,200 \left(1 + \frac{4}{100}\right)^6 = 5\,200 \cdot 1,04^6 = 6\,579,66$$

d.h. das Kapital ist auf 6 579,66 GE angewachsen. Der Verzinsungsplan sieht wie folgt aus:

Jahr	Zinsen a.E.d.J.	Guthaben a.E.d.J.
1	208	5 408
2	216,32	5 624,32
3	224,97	5 849,29
4	233,97	6 083,27
5	243,33	6 326,60
6	253,06	6 579,66

Aus dem Wert eines Guthabens nach n Jahren lässt sich das Startkapital (der Barwert) berechnen.

Beispiel 3.3

Ein Kapital ist nach fünf Jahren bei nachschüssiger Verzinsung von 8% pro Jahr auf 14 693,28 € angewachsen. Wie groß war das Startkapital? Das Startkapital wird berechnet, indem das Endkapital fünf Jahre abgezinst wird:

$$K_0 = \frac{K_n}{q^n} = \frac{14\,693,28}{1,08^5} = 10\,000$$

d.h. das Startkapital betrug 10 000 €. Oder anders ausgedrückt: Um bei 8% Zinsen p.a. nach fünf Jahren ein Guthaben von 14 693,28 € zu haben, sind heute 10 000 € anzulegen.

Häufig taucht in den Vorlesungen die Frage auf, wie die Höhe des Zins einen Barwert beeinflusst. Wir rechnen dazu ein kleines Beispiel.

Beispiel 3.4

Es bestehen folgendes Zahlungsverpflichtungen:

- 1 000 € sind fällig bei Ablauf eines Jahres
- 2 000 € sind fällig bei Ablauf von zwei Jahren
- 3 000 € sind fällig bei Ablauf von drei Jahren

Durch welche sofortige Zahlung können die Schulden zurückgezahlt werden, wenn nachschüssige Verzinsung unterstellt wird?

$$\text{Barwert: } K_0 = \frac{1\,000}{q} + \frac{2\,000}{q^2} + \frac{3\,000}{q^3}$$

Zins p.a.	Barwert
4%	5 477,64
5%	5 357,95
6%	5 242,25
7%	5 130,35
8%	5 022,10
9%	4 917,34
10%	4 815,93

Fazit: Je höher der Zins, desto geringer der Barwert.

Mathematisch lässt sich das damit begründen, dass der Zins im Nenner steht. Und je größer der Nenner, desto kleiner ist der Bruch.

Inhaltlich lässt sich das damit begründen: Möchten wir in fünf Jahren 1 000 € abheben, so müssen wir jetzt um so weniger einzahlen, je höher der Zins ist.

Im Beispiel 3.4 haben wir die gesehen, dass Barwerte sinken, sobald der Zins steigt.

Ist der jährliche Zinseszins p bzw. i unbekannt, so wird mit Hilfe der n -ten Wurzel erst einmal der Zinsfaktor q berechnet. Anschließend kann dann aus dem Wert für q der Zins p bzw. i bestimmt werden.