





# Analysis

Studienbuch für Ökonomen

von

Dr. Reinhard Dobbener

Universität Bamberg

4., korrigierte Auflage

Oldenbourg Verlag München Wien

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über [<http://dnb.d-nb.de>](http://dnb.d-nb.de) abrufbar.

© 2007 Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH  
Rosenheimer Straße 145, D-81671 München  
Telefon: (089) 45051-0  
[oldenbourg.de](http://oldenbourg.de)

Das Werk einschließlich aller Abbildungen ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen.

Lektorat: Wirtschafts- und Sozialwissenschaften, [wiso@oldenbourg.de](mailto:wiso@oldenbourg.de)  
Herstellung: Anna Grosser  
Coverentwurf: Kochan & Partner, München  
Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier  
Gesamtherstellung: Druckhaus „Thomas Müntzer“ GmbH, Bad Langensalza

ISBN 978-3-486-57999-4

# Inhaltsverzeichnis

|                                                                                                  |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Vorwort</b>                                                                                   | <b>IX</b> |
| <b>1 Grundlagen</b>                                                                              | <b>1</b>  |
| 1.1 Mengenlehre                                                                                  | 1         |
| 1.1.1 Teilmengen und Mengenalgebra                                                               | 1         |
| 1.1.2 Kartesische Produkte und Relationen<br>(einschließlich Äquivalenz- und Ordnungsrelationen) | 8         |
| 1.1.3 Abbildungen                                                                                | 12        |
| 1.1.4 Mächtigkeit von Mengen                                                                     | 17        |
| 1.2 Aussagenlogik                                                                                | 21        |
| 1.2.1 Verknüpfung von Aussagen                                                                   | 21        |
| 1.2.2 Objekt- und Metalogik                                                                      | 25        |
| 1.3 Zahlensysteme                                                                                | 29        |
| 1.3.1 Natürliche, ganze und rationale Zahlen                                                     | 29        |
| 1.3.2 Reelle und komplexe Zahlen                                                                 | 35        |
| 1.3.3 Summen- und Produktzeichen                                                                 | 47        |
| 1.3.4 Dual- und Dezimaldarstellung von Zahlen                                                    | 50        |
| 1.4 Übungsaufgaben zu Kapitel 1                                                                  | 55        |
| <b>2 Folgen und Reihen</b>                                                                       | <b>59</b> |
| 2.1 Folgen                                                                                       | 59        |
| 2.2 Reihen                                                                                       | 72        |
| 2.3 Finanzmathematik                                                                             | 77        |
| 2.3.1 Einfache Zinsrechnung                                                                      | 77        |
| 2.3.2 Zinseszinsrechnung                                                                         | 78        |
| 2.3.3 Rentenrechnung                                                                             | 81        |
| 2.3.4 Tilgungsrechnung                                                                           | 83        |
| 2.3.5 Investitionsrechnung                                                                       | 88        |
| 2.4 Übungsaufgaben zu Kapitel 2                                                                  | 91        |

|          |                                                                                                        |            |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>3</b> | <b>Differentialrechnung</b>                                                                            | <b>94</b>  |
| 3.1      | Funktionen einer und mehrerer Variablen                                                                | 94         |
| 3.1.1    | Beispiele, graphische Darstellung und Eigenschaften                                                    | 94         |
| 3.1.2    | Polynome, gebrochen rationale und algebraische Funktionen                                              | 106        |
| 3.1.3    | Transzendente Funktionen<br>(Exponential-, Logarithmus- und Winkelfunktionen)                          | 113        |
| 3.1.4    | Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen                                                               | 122        |
| 3.2      | Differentialrechnung für Funktionen einer Variablen                                                    | 130        |
| 3.2.1    | Differentialquotient und Ableitungsregeln                                                              | 130        |
| 3.2.2    | Differentiation der Grundfunktionen                                                                    | 142        |
| 3.2.3    | Monotonie, Konvexität/Konkavität und Extremstellen von<br>differenzierbaren Funktionen einer Variablen | 148        |
| 3.2.4    | Rechnen mit dem Symbol $\infty$ , die Regeln von de l'Hospital                                         | 162        |
| 3.2.5    | Approximation differenzierbarer Funktionen durch Polynome,<br>Differenziale und der Satz von Taylor    | 166        |
| 3.2.6    | Elastizitäten                                                                                          | 172        |
| 3.3      | Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Variablen                                                 | 178        |
| 3.3.1    | Partielle und totale Ableitungen                                                                       | 178        |
| 3.3.2    | Die Kettenregel für Funktionen mehrerer Variablen                                                      | 185        |
| 3.3.3    | Partielle Ableitungen höherer Ordnung                                                                  | 188        |
| 3.3.4    | Partielle und totale Differentiale, partielle<br>Elastizitäten                                         | 191        |
| 3.3.5    | Implizite Funktionen                                                                                   | 196        |
| 3.3.6    | Extremstellen differenzierbarer Funktionen mehrerer<br>Variablen (ohne Nebenbedingungen)               | 200        |
| 3.3.7    | Extremstellen differenzierbarer Funktionen mehrerer<br>Variablen (mit Nebenbedingungen)                | 210        |
| 3.3.8    | Differentiation vektorwertiger Funktionen                                                              | 217        |
| 3.4      | Übungsaufgaben zu Kapitel 3                                                                            | 221        |
| <b>4</b> | <b>Integralrechnung</b>                                                                                | <b>225</b> |
| 4.1      | Das unbestimmte Integral                                                                               | 225        |
| 4.2      | Das bestimmte Integral                                                                                 | 232        |
| 4.3      | Uneigentliche Integrale                                                                                | 244        |
| 4.4      | Integralrechnung für Funktionen mehrerer Variablen                                                     | 251        |
| 4.5      | Übungsaufgaben zu Kapitel 4                                                                            | 258        |

---

|          |                                                                                                                                                      |            |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>5</b> | <b>Lineare Differenzen- und Differentialgleichungen</b>                                                                                              | <b>260</b> |
| 5.1      | Problemstellung und Definitionen                                                                                                                     | 260        |
| 5.2      | Lineare Differenzengleichungen                                                                                                                       | 267        |
| 5.2.1    | Allgemeine Aussagen über lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten                                                                 | 267        |
| 5.2.2    | Bestimmung von Fundamentalsystemen homogener linearer Differenzengleichungen und partikulären Lösungen inhomogener linearer Differenzengleichungen   | 272        |
| 5.2.3    | Systeme linearer Differenzengleichungen erster Ordnung                                                                                               | 287        |
| 5.2.4    | Das Multiplikator-Akzelerator-Modell                                                                                                                 | 300        |
| 5.3      | Lineare Differentialgleichungen                                                                                                                      | 306        |
| 5.3.1    | Allgemeine Aussagen über lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten                                                                | 306        |
| 5.3.2    | Bestimmung von Fundamentalsystemen homogener linearer Differentialgleichungen und partikulärer Lösungen inhomogener linearer Differentialgleichungen | 310        |
| 5.3.3    | Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung                                                                                              | 329        |
| 5.4      | Übungsaufgaben zu Kapitel 5                                                                                                                          | 341        |
| <b>6</b> | <b>Lösungen der Übungsaufgaben</b>                                                                                                                   | <b>344</b> |
| 6.1      | Lösungen der Übungsaufgaben zu Kapitel 1                                                                                                             | 344        |
| 6.2      | Lösungen der Übungsaufgaben zu Kapitel 2                                                                                                             | 357        |
| 6.3      | Lösungen der Übungsaufgaben zu Kapitel 3                                                                                                             | 364        |
| 6.4      | Lösungen der Übungsaufgaben zu Kapitel 4                                                                                                             | 382        |
| 6.5      | Lösungen der Übungsaufgaben zu Kapitel 5                                                                                                             | 389        |
|          | <b>Literatur</b>                                                                                                                                     | <b>401</b> |
|          | <b>Stichwortverzeichnis</b>                                                                                                                          | <b>403</b> |



# Vorwort

Die Mathematik ist als Instrument zur Darstellung und Analyse von Zusammenhängen zwischen ökonomischen Größen eines der wichtigsten Hilfsmittel zur wissenschaftlichen Behandlung wirtschaftlicher Fragestellungen. Aber auch in der betrieblichen Praxis finden mathematische Methoden bei den unterschiedlichsten Optimierungs-, Planungs- und Entscheidungsproblemen breite Anwendung. Es ist daher nicht weiter überraschend, daß eine solide mathematische Grundausbildung, die für ein erfolgreiches wirtschaftswissenschaftliches Studium unabdingbar ist, zum festen Lehrprogramm der einschlägigen Studiengänge zählt. Die Analysis, insbesondere die Differential- und Integralrechnung, einerseits und die Lineare Algebra andererseits bilden dabei üblicherweise die Schwerpunkte des Curriculums.

Das vorliegende Studienbuch vermittelt die für Studierenden wirtschaftswissenschaftlicher Studiengänge relevanten Teilgebiete der Analysis (ein Studienbuch zur Linearen Algebra vom selben Autor ist bereits in diesem Verlag erschienen). Definitionen, Sätze und Rechenverfahren werden durch zahlreiche Beispiele verdeutlicht. Eine umfangreiche Sammlung von Übungsaufgaben am Ende eines jeden Kapitels (mit vollständigen Lösungen am Ende des Buches) bietet die Möglichkeit, erlangte Kenntnisse und Fertigkeiten zu überprüfen und zu festigen. Auf vollständige Beweise wurde angesichts des angesprochenen Adressatenkreises weitgehend verzichtet; Leser, die jedoch an exakten Beweisen interessiert sind, seien auf die im Literaturverzeichnis angegebenen Lehrbücher der reinen Mathematik verwiesen.

Der in diesem Studienbuch dargestellte Stoff ist in fünf Kapitel gegliedert:

Das erste Kapitel beschäftigt sich mit der Mengenlehre (insbesondere Mengenalgebra und Relationen), der Aussagenlogik und dem Aufbau des reellen Zahlensystems. Dieses Kapitel ist sowohl für die Analysis als auch für das Gebiet der Linearen Algebra grundlegend. Darüber hinaus besitzen zumindest Teile dieses Stoffs eigenständige Bedeutung für die Informatikausbildung, die heute einen festen Bestandteil des Lehrprogramms wirtschaftswissenschaftlicher Studiengänge darstellt.

Im zweiten Kapitel werden zur Vorbereitung der Differential- und Integralrechnung Folgen und Reihen und der für sie zentrale Begriff der Konvergenz eingeführt. Weiterhin werden als eine erste Anwendung verschiedene Fragestellungen der Finanzmathematik diskutiert.

Die Differentialrechnung für Funktionen einer und mehrerer Variablen bildet den Schwerpunkt des dritten, umfangreichsten Kapitels. Hier werden an einigen Stellen - wenn Funktionen mehrerer Variablen behandelt werden - gewisse Grundkenntnisse der Linearen Algebra benötigt.

Im vierten Kapitel wird die Integralrechnung, die zunächst als Umkehrung der Differentiation eingeführt wird, behandelt. Das größte Gewicht wird dabei auf die Integration von Funktionen einer Variablen gelegt. Die Integration von Funktionen mehrerer Variablen wird nur knapp behandelt, Kurvenintegrale und ähnliches bleiben ganz unerwähnt.

Den Gegenstand des fünften und letzten Kapitels bilden Differenzen- und Differentialgleichungen. Dieses Teilgebiet der Analysis liefert die Methoden zum Studium des dynamischen (d.h. zeitlichen) Verhaltens ökonomischer Modelle. Obwohl die Diskussion auf die einfachsten Fälle, lineare Differenzen- und Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, beschränkt bleibt, ist dieses Kapitel wohl das anspruchsvollste dieses Studienbuches, da Kenntnisse aus zuvor behandelten Themengebieten (z. B. komplexe Zahlen) und aus der Linearen Algebra (z. B. Eigenwerte) zum Verständnis der dargestellten Lösungsverfahren benötigt werden.

Bedanken möchte ich mich an dieser Stelle bei Frau Angelika Braun, Herrn Nils Herda, Herrn Alexander Queck, Herrn Dipl. Wirtsch. Inf. Andreas Schmidt von Rhein und Frau Dipl. Kfzr. Gisela Schmidt von Rhein. Sie alle haben mich bei der Arbeit an diesem Buch engagiert und tatkräftig unterstützt.

Reinhard Dobbener

# 1 Grundlagen

## 1.1 Mengenlehre

### 1.1.1 Teilmengen und Mengenalgebra

Einer der wenigen Grundbegriffe der Mathematik, die nicht weiter auf elementarere Begriffe reduziert werden können, ist der der Menge. Georg CANTOR, der Begründer der modernen Mengenlehre, hat den Mengenbegriff so definiert:

"Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung  $M$  von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche Elemente von  $M$  genannt werden) zu einem Ganzen."

Diese Beschreibung einer Menge könnte jedoch erst dann als Definition in einem strengen mathematischen Sinn gelten, wenn die verwendeten Begriffe wie "Zusammenfassung", "wohlunterschiedene Objekte" und "Ganzes" definiert wären. Dies geschieht jedoch nicht, da eine weitere Reduktion der Begriffe stets zu neuen undefinierten Begriffen führen würde. Diese Charakterisierung des Mengenbegriffs gibt zwar in etwa unsere "naive" Mengenvorstellung wieder, für mathematische Zwecke ist sie jedoch um die folgende Forderung zu ergänzen:

Für jedes denkbare Objekt und jede Menge muß entweder gelten, daß dieses Objekt zu der Menge gehört, oder daß dieses Element nicht zu der Menge gehört.

Daß diese Forderung an Mengen nicht automatisch von einer beliebigen Zusammenfassung von Objekten erfüllt wird, kann am Beispiel einer Antinomie (Widerspruch eines Satzes in sich) gezeigt werden, die auf den englischen Mathematiker und Philosophen B. RUSSEL zurückgeht:

Ist  $A$  die Zusammenfassung aller Zusammenfassungen, so enthält die Zusammenfassung  $A$  sich selbst als Element. Man kann also die Zusammenfassung aller Zusammenfassungen bilden, die sich selbst als Element besitzen.

Genauso kann man auch die Zusammenfassung  $B$  aller Zusammenfassungen bilden, die sich selbst nicht als Element besitzen. Von dieser Zusammenfassung  $B$  kann man zeigen, daß es Objekte (Elemente) gibt, für die grundsätzlich nicht entschieden werden kann, ob sie (als Element) zu  $B$  gehören oder nicht. Ein solches Objekt ist  $B$  selbst:

Nimmt man (hypothetisch) an, daß  $B$  sich selbst als Element enthält, so muß auch  $B$  selbst die Eigenschaft besitzen, die alle Objekte in  $B$  auszeichnet. Also enthält  $B$  sich selbst nicht als Element. Dies ist aber ein Widerspruch zu der getroffenen (hypothetischen) Annahme.

Nimmt man statt dessen (hypothetisch) an, daß  $B$  sich selbst nicht als Element enthält, so besitzt  $B$  offensichtlich die Eigenschaft, die alle Objekte in  $B$  auszeichnet. Also schließt man, daß  $B$  - im Widerspruch zur getroffenen (hypothetischen) Annahme - ein Element von  $B$  ist.

Insgesamt zeigt diese Überlegung, daß die Zusammenfassung  $B$  die Bedingung

Für jedes denkbare Objekt und jede Menge muß entweder gelten, daß dieses Objekt zu der Menge gehört oder daß dieses Element nicht zu der Menge gehört.

nicht erfüllt und daher keine Menge sein kann.

Eine Möglichkeit, Widersprüche vom Typ der RUSSELschen Antinomie zu vermeiden, ist die Unterscheidung von Klassen und Mengen:

**Definition 1.1:** Eine Zusammenfassung wohlunterscheidbarer Objekte zu einem Ganzen heißt Klasse.

Klassen, die sich selbst nicht als Element enthalten, heißen Mengen.

So definierte Mengen vermeiden den Widerspruch der RUSSELSchen Antinomie, da die Klasse, die aus allen Mengen besteht, oder die Klasse, die aus allen denjenigen Mengen besteht, die sich selbst nicht als Element enthalten, keine Mengen im Sinne von Definition 1.1 sind. Mit dieser Einschränkung hat sich der CANTORSche Mengenbegriff als hinreichend tragfähig für eine axiomatische Begründung der Mathematik erwiesen.

Eine weitere Diskussion dieser Problematik soll nicht erfolgen, statt dessen sollen die Grundbegriffe und gängigen Notationen der Mengenlehre, soweit sie für die weiteren mathematischen Begriffsbildungen in diesem Buch erforderlich sind, zusammengestellt und erläutert werden.

Mengen werden üblicherweise mit Großbuchstaben A, B, C, ... oder besonderen Symbolen  $\emptyset$ ,  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{P}(A)$ , ... bezeichnet. Elemente von Mengen werden häufig durch Kleinbuchstaben a, b, c, ... oder  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ... bezeichnet.

Gehört ein Element a zu einer Menge A, so schreibt man  $a \in A$  und liest:

"a ist ein Element von A" oder

"a liegt in A" oder

"a gehört zu A".

Soll ausgedrückt werden, daß ein Element a nicht zu der Menge A gehört, so schreibt man  $a \notin A$  und liest:

"a ist kein Element von A" oder

"a liegt nicht in A" oder

"a gehört nicht zu A".

Mengen, die eine geringe Anzahl von Elementen besitzen, können durch die Angabe ihrer Elemente beschrieben werden. Dazu wird die Aufzählung der Elemente in geschweifte Klammern gesetzt. So ist beispielsweise

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

die Menge mit den Elementen 1, 2, 3 und 4. Eine andere Möglichkeit, Mengen darzustellen, besteht darin, ihre Elemente durch bestimmte Eigenschaften zu charakterisieren:

Ist E eine Eigenschaft, die Objekte (also auch Mengen) besitzen können, so ist die Klasse A aller Objekte a, die die Eigenschaft E besitzen,

$$A = \{a \mid a \text{ besitzt die Eigenschaft } E\}$$

eine Menge, wenn nur ausgeschlossen ist, daß A selbst die Eigenschaft E besitzt. Man liest dann:

"A ist die Menge aller Elemente a, die die Eigenschaft E besitzen."

Bezeichnet man beispielsweise mit E die Eigenschaft eines Objekts eine natürliche Zahl zwischen 1 und 4 zu sein, so ist

$$A = \{a \mid a \text{ besitzt die Eigenschaft } E\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Beispiele für Mengen sind die verschiedenen Zahlenbereiche:

$$\begin{aligned} * \mathbb{N} &= \{x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl}\} \\ &= \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}. \end{aligned}$$

Die Zahl 0 soll also den natürlichen Zahlen zugerechnet werden. Die natürlichen Zahlen ausschließlich der Zahl 0 sollen mit  $\mathbb{N}^*$  bezeichnet werden:  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ .

$$* \mathbb{Z} = \{x \mid x \text{ ist eine ganze Zahl}\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

$$* \mathbb{Q} = \{x \mid x \text{ ist eine rationale Zahl}\} = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

$$* \mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist eine reelle Zahl}\}.$$

$$\begin{aligned} * \mathbb{C} &= \{x \mid x \text{ ist eine komplexe Zahl}\} \\ &= \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ und } i \text{ ist die imaginäre Einheit}\}. \end{aligned}$$

Dem Aufbau und den Eigenschaften dieser Zahlenbereiche ist der Abschnitt 1.3 gewidmet.

Auch Zusammenfassungen von Objekten, die nicht der Mathematik entstammen, bilden Mengen, beispielsweise:

$$\begin{aligned} K &= \{k \mid k \text{ ist ein Kunde der Firma Meier}\} \quad \text{und} \\ A &= \{a \mid a \text{ ist ein Auftrag für die Firma Meier}\}. \end{aligned}$$

Zwei Mengen  $A$  und  $B$  sind gleich, wenn sie dieselben Elemente besitzen, wenn also für jedes  $a \in A$  auch  $a \in B$  und für jedes  $b \in B$  auch  $b \in A$  gilt. Diese Definition der Gleichheit von Mengen bedeutet, daß Mengen auch dann gleich sein können, wenn sie auf unterschiedliche Art beschrieben werden.

So sind beispielsweise die Mengen  $A = \{1, 2, 3\}$  und

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 - 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 6 = 0\} \quad \text{gleich.}$$

Insbesondere kann die leere Menge  $\emptyset$ , die keine Elemente enthält, auf sehr unterschiedliche Art beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \emptyset &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\} \\ &= \{x \mid x \text{ ist Student(in) und } x \text{ ist jünger als 3 Jahre}\}. \end{aligned}$$

Bei der Beschreibung einer Menge durch Aufzählung ihrer Elemente ist es unerheblich, in welcher Reihenfolge die Elemente angegeben werden, oder ob bestimmte Elemente mehrfach angegeben werden, so ist beispielsweise

$$\{1, 2, 3\} = \left\{3, 2, 1, \frac{6}{3}, \frac{57}{19}\right\}.$$

Ein eng mit der Gleichheit von Mengen zusammenhängender Begriff ist der der Teilmenge.

Definition 1.2: Eine Menge A heißt Teilmenge der Menge B, falls für alle Elemente  $a \in A$  auch  $a \in B$  gilt. Man schreibt dann  $A \subset B$ . Ist A eine Teilmenge von B, so wird B Obermenge von A genannt.

Beispiele:

$$* \{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}.$$

$$* \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

$$* \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Dazu muß die Zahl  $p \in \mathbb{Z}$  mit dem Bruch  $\frac{p}{1}$  identifiziert werden.

$$* \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Dazu muß  $a \in \mathbb{R}$  mit der Zahl  $a + 0 \cdot i \in \mathbb{C}$  identifiziert werden.

$$* \text{Für jede Menge A gilt: } \emptyset \subset A.$$

Die leere Menge ist Teilmenge einer jeden Menge.

$$* \text{Für jede Menge A gilt: } A \subset A.$$

Jede Menge enthält sich selbst als Teilmenge.

Die Teilmengenbeziehung von Mengen läßt die Gleichheit der Mengen A und B zu. Soll dagegen ausgedrückt werden, daß A eine echte Teilmenge von B ist, daß also A eine Teilmenge von B ist, die von B verschieden ist, so schreibt man  $A \subsetneq B$ .

Statt  $A \subset B$  wird auch  $A \subseteq B$  geschrieben, wenn Gleichheit der Mengen A und B nicht ausgeschlossen ist. Statt  $A \subsetneq B$  wird gelegentlich auch  $A \subset B$  geschrieben.

Zu einer gegebenen Menge A kann man alle ihre Teilmengen bilden und zu einer neuen Menge  $\mathcal{P}(A)$ , die Potenzmenge von A genannt wird, zusammenfassen:

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subset A\}.$$

Beispiele:

$$* \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\};$$

$$* \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Im Abschnitt 1.1.4 über die Mächtigkeit von Mengen wird festgestellt, daß die Potenzmenge einer Menge mit n Elementen aus  $2^n$  Elementen besteht.

Den Zusammenhang zwischen der Teilmengenbeziehung und der Gleichheit von Mengen stellt der folgende Satz her:

Satz 1.3: Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn  $A \subset B$  und  $B \subset A$  gilt.

Dieser Satz ermöglicht es, die Gleichheit von Mengen A und B nachzuweisen, indem man  $A \subset B$  und  $B \subset A$  zeigt.

Aus gegebenen Mengen können durch bestimmte Operationen neue Mengen gebildet werden:

**Definition 1.4:** Sind A und B Mengen, so ist die Zusammenfassung aller Objekte x, für die  $x \in A$  oder  $x \in B$  (oder beides) gilt, eine Menge, die Vereinigungsmenge von A und B genannt wird und mit  $A \cup B$  bezeichnet wird:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}.$$

Beispiel:

\* Sind  $A = \{1, 2, 3\}$  und  $B = \{2, 3, 4\}$ , so ist  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ .

Sind  $A_1, \dots, A_n$  Mengen, so kann natürlich auch die Vereinigungsmenge  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  gebildet werden, die abgekürzt dargestellt wird als

$A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ . Ist die Anzahl der Mengen  $A_1, A_2, A_3, \dots$  nicht begrenzt, so

schreibt man  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ .

Beispiel:

\* Ist  $A_i$  die Menge der Familien mit i Kindern ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ), so ist

$A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$  die Menge aller Familien.

Neben der Vereinigung von Mengen ist auch die Durchschnittsbildung von Mengen möglich:

**Definition 1.5:** Sind A und B Mengen, so ist auch die Zusammenfassung aller Objekte x, für die sowohl  $x \in A$  als auch  $x \in B$  gilt, eine Menge, die Durchschnittsmenge von A und B genannt wird und mit  $A \cap B$  bezeichnet wird:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}.$$

Ist  $A \cap B = \emptyset$ , so heißen die Mengen A und B disjunkt.

Beispiele:

\* Sind  $A = \{1, 2, 3\}$  und  $B = \{2, 3, 4\}$ , so ist  $A \cap B = \{2, 3\}$ .

\* Ist  $A_i$  die Menge der Familien mit i Kindern ( $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ ), so sind die Mengen  $A_i$  und  $A_j$  disjunkt, falls  $i \neq j$  ist. Die Vereinigungsmenge

$A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$  heißt disjunkte Vereinigung der Mengen  $A_i$ . Soll angedeutet werden, daß eine Vereinigung  $A$  aus disjunkten Mengen gebildet wird, so setzt man über das  $\cup$ -Zeichen einen Punkt:  $A = \bigcup_{i=0}^n \dot{A}_i$  oder  $A = B \dot{\cup} C$ .

Sind  $A_1, \dots, A_n$  Mengen, so kann natürlich auch die Durchschnittsmenge  $A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$  gebildet werden, die abgekürzt dargestellt wird als

$A = \bigcap_{i=1}^n A_i$ . Ist die Anzahl der Mengen  $A_1, A_2, A_3, \dots$  nicht begrenzt, so

schreibt man  $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ .

Beispiel:

- \* Ist  $A_i$  die Menge der Studierenden, die die  $i$ -te von insgesamt  $n$  Mathematikvorlesung in diesem Semester besuchen, so ist  $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$  die Menge der Studierenden, die alle  $n$  Mathematikvorlesungen besuchen.

In bestimmten Fällen kommt es vor, daß alle betrachteten Mengen Teilmengen einer bestimmten Grund- oder Universalmenge  $\Omega$  sind (z. B.:  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$  oder die Menge aller Familien). In solchen Fällen können Komplementärmenge von Teilmengen der Grundmenge gebildet werden:

Definition 1.6: Sei  $\Omega$  eine Grundmenge und  $A \subset \Omega$ , dann ist die Zusammenfassung aller Objekte aus  $\Omega$ , die nicht in  $A$  liegen, eine Menge, die Komplement oder Komplementärmenge von  $A$  bezüglich  $\Omega$  genannt und mit  $\overline{A}^{\Omega}$  bzw.  $\overline{A}$  bezeichnet wird:

$$\overline{A} = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}.$$

Sind  $A$  und  $B$  Teilmengen der Grundmenge  $\Omega$ , so heißt die Menge  $A \cap \overline{B}$  Differenzmenge und wird mit  $A \setminus B$  ( $A$  ohne  $B$ ) bezeichnet:

$$A \setminus B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$

Beispiele:

- \* Ist  $\Omega = \mathbb{N}$  die Grundmenge und  $A = \{0, 2, 4, \dots\}$  die Menge der geraden natürlichen Zahlen, so ist  $\overline{A} = \{1, 3, 5, \dots\}$  die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen.
- \* Ist  $\Omega$  die Menge aller Familien und  $A_0$  die Menge der Familien ohne Kinder, so ist  $\overline{A_0} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , die Menge der Familien mit Kindern.
- \* Sind  $A = \{1, 2, 3\}$  und  $B = \{2, 3, 4\}$ , so ist  $A \setminus B = \{1\}$ .

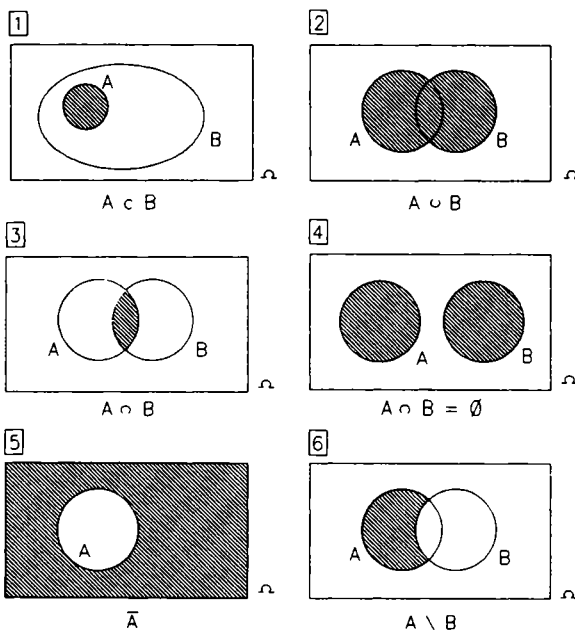
Mengen und ihre Beziehungen untereinander können graphisch in sogenannten Venndiagrammen dargestellt werden. Dabei werden Mengen durch Flächen bzw. Punkte in Flächen dargestellt (vgl. Abb. 1.1).

Die Verknüpfungen " $\cup$ " und " $\cap$ " für Mengen und die Komplementbildung können miteinander kombiniert werden. Dabei gelten stets gewisse Regeln, die im folgenden Satz zusammengestellt sind:

**Satz 1.7:** Für das Rechnen mit Mengen gelten die folgenden Regeln ( $A$ ,  $B$  und  $C$  sind Teilmengen einer Grundmenge  $\Omega$ ):

- (i)  $A \cup A = A$  (Idempotenzgesetz für die Vereinigung);
- (ii)  $A \cap A = A$  (Idempotenzgesetz für den Durchschnitt);
- (iii)  $A \cup B = B \cup A$  (Kommutativgesetz für die Vereinigung);
- (iv)  $A \cap B = B \cap A$  (Kommutativgesetz für den Durchschnitt);
- (v)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  (Assoziativgesetz für die Vereinigung);
- (vi)  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  (Assoziativgesetz für den Durchschnitt);
- (vii)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  (Distributivgesetz);
- (viii)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  (Distributivgesetz);
- (ix)  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$  (DE MORGANSches Gesetz);
- (x)  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$  (DE MORGANSches Gesetz).

**Abb. 1.1:** Darstellung von Teilmengenbeziehungen (1), Vereinigungsmenge (2), Durchschnittsmenge (3), disjunkten Mengen (4), Komplementärmenge (5) und Differenzmenge (6) durch Venndiagramme



### 1.1.2 Kartesische Produkte und Relationen (einschließlich Äquivalenz- und Ordnungsrelationen)

Eine ganz andere als die bisherigen Möglichkeiten, um von gegebenen Mengen zu neuen zu gelangen, ist die Bildung von kartesischen Produkten.

**Definition 1.8:** Sind  $A$  und  $B$  nichtleere Mengen, dann ist die Zusammenfassung aller Paare  $(a, b)$  mit  $a \in A$  und  $b \in B$  eine Menge, die kartesisches Produkt von  $A$  und  $B$  genannt wird und mit  $A \times B$  bezeichnet wird:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

Beispiel:

- \* Bei einer Umfrage unter den Studierenden an einer sozial- und wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät einer deutschen Universität wird nach dem Studienfach und dem Fachsemester gefragt. Bezeichnet man mit

$$A = \{\text{BWL, POL, SOZ, WiInf, VWL}\}$$

die Menge der verschiedenen Studienfächer dieser Fakultät und mit

$$B = \{1, 2, \dots, 14\}$$

die verschiedenen möglichen Fachsemester (am Ende des 14. Fachsemesters erfolge Zwangsexmatrikulation), so ist  $A \times B$  die Menge der möglichen Antworten auf die Umfrage:

$$A \times B = \{(\text{BWL}, 1), \dots, (\text{BWL}, 14), \dots, (\text{VWL}, 14)\}.$$

Kartesische Produkte können gelegentlich graphisch dargestellt werden: Kodiert man die Elemente der Menge  $A$  aus dem Beispiel durch die Zahlen 1, 2, ..., 5, so läßt sich  $A \times B$  so darstellen:

| A \ B | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| 1     | . | . | . | . | . | . | . | . | . | .  | .  | .  | .  | .  |
| 2     | . | . | . | . | . | . | . | . | . | .  | .  | .  | .  | .  |
| 3     | . | . | . | . | . | . | . | . | . | .  | .  | .  | .  | .  |
| 4     | . | . | . | . | . | . | . | . | . | .  | .  | .  | .  | .  |
| 5     | . | . | . | . | . | . | . | . | . | .  | .  | .  | .  | .  |

Da die Mengen  $A$  und  $B$  nicht unbedingt disjunkt sein müssen, kann es vorkommen, daß beide Paare  $(a, b)$  und  $(b, a)$  zu  $A \times B$  gehören. In diesem Fall ist aber  $(a, b) \neq (b, a)$ , wenn  $a \neq b$  gilt. Also kommt es bei den Elementen  $(a, b)$  eines kartesischen Produkts auf die Reihenfolge der Komponenten  $a$  und  $b$  an. Kodiert man im Beispiel die Elemente der Menge  $A$  der verschiedenen Studiengänge durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, so ist etwa das Paar  $(1, 5)$ , das einen Studierenden der Betriebswirtschaftslehre im 5. Semester darstellt, etwas anderes als das Paar  $(5, 1)$ , das einen Studierenden der Volkswirtschaftslehre im 1. Semester repräsentiert.

Damit ist aber auch offensichtlich, daß die kartesischen Produkte  $A \times B$  und  $B \times A$  verschieden sind, wenn nur  $A \neq B$  gilt.

Natürlich können auch kartesische Produkte von mehr als zwei Mengen gebildet werden: Sind  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  nichtleere Mengen, so ist

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Statt  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  kann man auch  $\prod_{i=1}^n A_i$  schreiben. Das  $n$ -fache kartesische

Produkt einer Menge  $\prod_{i=1}^n A_i$  wird auch mit  $A^n$  bezeichnet. Ein Beispiel für ein

solches  $n$ -faches kartesisches Produkt einer Menge ist (der Vektorraum)  $\mathbb{R}^n$ , mit dem sich die Lineare Algebra beschäftigt.

Die Elemente eines kartesischen Produkts  $\prod_{i=1}^n A_i$  heißen  $n$ -Tupel, wobei die  $i$ -te

Komponente eines solchen  $n$ -Tupels aus der Menge  $A_i$  stammt ( $i = 1, \dots, n$ ).

Beispielsweise sind die Elemente von  $\mathbb{R}^n$   $n$ -Tupel, deren Komponenten reelle Zahlen sind.

Von besonderem Interesse sind Teilmengen kartesischer Produkte:

**Definition 1.9:** Eine Teilmenge  $R \subset A \times B$  eines kartesischen Produkts heißt Relation.

Ist  $R \subset A \times B$  eine Relation, so heißt die Relation

$$\tilde{R} \subset B \times A \text{ mit } \tilde{R} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}$$

Umkehrrelation von  $R$ .

Statt  $(a, b) \in R$  ( $\subset A \times B$ ) schreibt man auch  $aRb$ , wenn das Paar  $(a, b)$  zur Relation  $R$  gehört.

Beispiele:

- \* Sei  $A$  die Menge der Kunden der Firma Meier und  $B$  die Menge der Aufträge, die in der Firma Meier bearbeitet werden. Dann ist die Menge  $R_1 \subset A \times B$  mit

$$R_1 = \{(a, b) \mid \text{Kunde } a \text{ ist Auftraggeber des Auftrags } b\}$$

eine Relation.

- \* Sei  $A$  eine nichtleere Menge mit Potenzmenge  $\mathcal{P}(A)$ . Auf  $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$  wird durch

$$R_2 = \{(B, B') \mid B, B' \subset A \text{ und } B \subset B'\}$$

eine Relation definiert (vgl. Übungsaufgabe 1.3).

- \* Sei  $A$  die Menge der Studierenden einer sozial- und wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät einer deutschen Universität. Dann ist auf  $A \times A$  durch

$$R_3 = \{(a, b) \in A \times A \mid a \text{ ist im selben Studiengang immatrikuliert wie } b\}$$

eine Relation definiert.

- \* Sei  $A$  die im vorhergehenden Beispiel definierte Menge von Studierenden und  $B$  die Menge der Studiengänge dieser Fakultät. Dann ist  $R_4 \subset A \times B$  mit

$$R_4 = \left\{ (a, b) \in A \times B \mid \text{Student(in) } a \text{ ist im Studiengang } b \text{ immatrikuliert} \right\}$$

eine Relation.

Relationen werden dann interessant, wenn sie bestimmte Eigenschaften besitzen. Zwei wichtige Klassen von Relationen sind Ordnungs- und Äquivalenzrelationen:

Definition 1.10: Eine Relation  $R \subset A \times A$  heißt Ordnungsrelation (oder einfach Ordnung) auf  $A$ , wenn  $R$  die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (i) für alle  $a \in A$  gehört das Paar  $(a, a)$  zu  $R$  (Reflexivität);
- (ii) gehören die Paare  $(a, b)$  und  $(b, a)$  zu  $R$ , so muß  $a = b$  sein (Antisymmetrie);
- (iii) gehören  $(a, b)$  und  $(b, c)$  zu  $R$ , so gehört auch  $(a, c)$  zu  $R$  (Transitivität).

Gilt zusätzlich:

- (iv) für beliebige  $a, b \in A$  gehört  $(a, b)$  oder  $(b, a)$  zu  $R$  (Vollständigkeit),

so heißt  $R$  vollständige Ordnung auf  $A$ .

Beispiele:

- \* Die Relation  $R_2$  auf der Potenzmenge  $\mathcal{P}(A)$  einer nichtleeren Menge  $A$ ,

definiert durch  $R_2 = \left\{ (B, B') \mid B, B' \subset A \text{ und } B \subset B' \right\}$ , ist eine Ordnungsrelation auf  $\mathcal{P}(A)$ :

- Für alle  $B \subset A$  gilt  $B \subset B$ , so daß  $(B, B) \in R_2$  für alle  $B \in \mathcal{P}(A)$  gilt. Damit ist  $R_2$  reflexiv.
- Gilt für Mengen  $B, B' \in \mathcal{P}(A)$ , daß  $(B, B') \in R_2$  und  $(B', B) \in R_2$  ist, so ist  $B \subset B'$  und  $B' \subset B$ . Aus Satz 1.3 folgt dann, daß  $B = B'$  gelten muß. Also ist  $R_2$  antisymmetrisch.
- Gilt für Mengen  $B, B', B'' \in \mathcal{P}(A)$ , daß  $(B, B') \in R_2$  und  $(B', B'') \in R_2$  ist, so ist  $B \subset B'$  und  $B' \subset B''$ . Offensichtlich muß dann auch  $B \subset B''$  sein, so daß auch  $(B, B'') \in R_2$  gilt. Damit ist  $R_2$  auch transitiv und insgesamt eine Ordnungsrelation.
- $R_2$  ist keine vollständige Ordnung auf  $A$ , wenn  $A$  wenigstens zwei verschiedene Elemente  $a_1 \neq a_2$  besitzt, da dann weder  $\{a_1\} \subset \{a_2\}$  noch  $\{a_2\} \subset \{a_1\}$  gilt.

Statt  $BR_2B'$  kann man natürlich auch gleich  $B \subset B'$  schreiben.

Auch die bekannte Ordnungsrelation " $\leq$ " auf den Zahlenmengen  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  kann auf diese Art und Weise beschrieben werden. Sei beispielsweise  $R_{\leq} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

definiert durch  $R_{\leq} = \{(n, n') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq n'\}$ , so ist  $R_{\leq}$  reflexiv, antisym-

metrisch und transitiv, also eine Ordnungsrelation auf  $\mathbb{N}$ . Da zusätzlich für beliebige natürliche Zahlen  $n \leq n'$  oder  $n' \leq n$  (oder beides, wenn  $n = n'$ ) gilt, ist  $R_{\leq}$  eine vollständige Ordnungsrelation auf  $\mathbb{N}$ . Statt  $nR_{\leq}n'$  schreibt man einfacher  $n \leq n'$ .

Zur Klassifizierung und Typisierung von Objekten einer Menge werden häufig Äquivalenzrelationen benutzt:

**Definition 1.11:** Eine Relation  $R \subset A \times A$  ( $A \neq \emptyset$ ) heißt Äquivalenzrelation, falls die drei folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) für alle  $a \in A$  gehört  $(a, a)$  zu  $R$  (Reflexivität);
- (ii) gehört  $(a, b)$  zu  $R$ , so ist auch  $(b, a) \in R$  (Symmetrie);
- (iii) gehören  $(a, b)$  und  $(b, c)$  zu  $R$ , so ist auch  $(a, c) \in R$  (Transitivität).

Beispiel:

- \* Die Relation  $R_3$  auf der Menge  $A \times A$  ( $A$  ist die Menge der Studierenden an der sozial- und wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät einer deutschen Universität) mit

$$R_3 = \{(a, b) \in A \times A \mid b \text{ ist im selben Studiengang wie } a \text{ immatrikuliert}\}$$

ist eine Äquivalenzrelation, wenn man davon ausgeht, daß eine Person nur in einem Studiengang immatrikuliert sein kann:

- Offensichtlich ist  $(a, a) \in R_3$ , so daß  $R_3$  reflexiv ist.
- Ist  $b$  in dem selben Studiengang wie  $a$  immatrikuliert, so muß natürlich auch  $a$  in dem selben Studiengang wie  $b$  immatrikuliert sein, so daß mit  $(a, b)$  auch  $(b, a)$  in  $R_3$  liegt. Also ist  $R_3$  symmetrisch.
- Ist  $b$  in dem selben Studiengang wie  $a$  immatrikuliert (z.B. BWL), und ist  $c$  in dem selben Studiengang immatrikuliert wie  $b$  (also auch BWL), so muß auch  $c$  in dem selben Studiengang immatrikuliert sein wie  $a$ . Also gilt mit  $aR_3b$  und  $bR_3c$  auch  $aR_3c$ , so daß  $R_3$  transitiv ist.

Insgesamt ist damit gezeigt, daß  $R_3$  eine Äquivalenzrelation ist.

Äquivalenzrelationen besitzen eine erwähnenswerte Eigenschaft:

Bezeichnet man für eine Äquivalenzrelation  $R$  die Menge  $[a] = \{b \in A \mid aRb\}$

als Äquivalenzklasse von  $a \in A$ , so gilt für  $a, b \in A$  entweder  $[a] \cap [b] = \emptyset$  oder  $[a] = [b]$ .

Ist nämlich  $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ , so gibt es ein  $c \in [a] \cap [b]$ . Also gilt:  $aRc$  und  $bRc$ . Für ein beliebiges  $a' \in [a]$  gilt dann  $a'Ra$  und  $aRc$  und  $cRb$ , woraus durch zweimalige Anwendung der Transitivität  $a'Rb$  und damit  $a' \in [b]$  und  $[a] \subset [b]$  folgt.

Entsprechend gilt für ein beliebiges  $b' \in [b]$ :  $b'Rb$  und  $bRc$  und  $cRa$ , woraus  $b'Ra$  und damit  $[b] \subset [a]$  folgt. Aus Satz 1.3 folgt dann die Gleichheit  $[a] = [b]$  (unter der Voraussetzung  $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ ).

Die verschiedenen Äquivalenzklassen  $[a_i]$  bilden also eine Zerlegung

(Partition) von  $A$ , d.h. es gilt:

- $[a_i] \neq \emptyset$ ;
- $[a_i] \cap [a_j] = \emptyset$  für  $i \neq j$ ;
- $A = \bigcup_i [a_i]$ .

Im Beispiel der (Äquivalenz-) Relation  $R_3$  zerfällt die Menge  $A$  der Studierenden in 5 Äquivalenzklassen, die jeweils aus allen Studierenden eines Studiengangs bestehen.

### 1.1.3 Abbildungen

Die wohl wichtigste Klasse von Relationen sind die Abbildungen. Während Ordnungs- und Äquivalenzrelationen nur als Teilmengen von kartesischen Produkten  $A \times A$  einer Menge mit sich selbst definiert werden können, sind Abbildungen Teilmengen von kartesischen Produkten  $A \times B$ , wobei die Mengen  $A$  und  $B$  verschieden sein können.

**Definition 1.12:** Eine Relation  $R \subset A \times B$  heißt Abbildung von  $A$  nach  $B$ , falls gilt:

- (i) Für jedes  $a \in A$  gibt es ein  $b \in B$  mit  $a R b$ .
- (ii) Gilt  $a R b$  und  $a R b'$ , so muß  $b = b'$  gelten; für jedes  $a \in A$  gibt es also höchstens ein  $b \in B$  mit  $a R b$ .

Die Menge  $A$  heißt Definitionsbereich und die Menge  $B$  heißt Wertebereich oder Wertevorrat der Abbildung. Die Teilmenge

$\{b \in B \mid \text{es gibt ein } a \in A \text{ mit } a R b\} \subset B$  heißt Wertemenge.

Abbildungen werden üblicherweise nicht explizit als Relationen, sondern in einer eigenen Terminologie dargestellt und mit den Kleinbuchstaben  $f, g, h$  bezeichnet: Ist  $R_f \subset A \times B$  eine Abbildung, so schreibt man statt dessen:

$f: A \rightarrow B$  (sprich: "f ist definiert auf A mit Werten in B")

und

$f(a) = b$  (falls  $a R_f b$ ).

Beispiele:

- \* Die Relation  $R_4 \subset A \times B$  ( $A$  ist die Menge der Studierenden einer sozial- und wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät,  $B$  ist die Menge der verschiedenen Studiengänge dieser Fakultät) mit

$R_4 = \{(a, b) \mid a \text{ ist im Studiengang } b \text{ immatrikuliert}\}$  ist eine Abbildung:

Jeder Studierende  $a \in A$  ist in einem Studiengang  $b \in B$  eingeschrieben; kein Studierender kann gleichzeitig in mehreren Studiengängen eingeschrieben sein.

- \* Sei  $A \neq \emptyset$  eine Menge und  $R_{id} \subset A \times A$  die Relation  $R_{id} = \{(a, a) \mid a \in A\}$ .

$R_{id}$  ist eine Abbildung  $id_A: A \rightarrow A$  mit  $id_A(a) = a$ . Die Abbildung  $id_A$  heißt identische Abbildung der Menge  $A$ , sie bildet jedes Element  $a \in A$  auf sich selbst ab.

Eine Abbildung, deren Definitionsbereich  $\mathbb{R}^n$  oder eine Teilmenge davon ist und deren Wertebereich  $\mathbb{R}$  ist, heißt reelle Funktion von n Variablen (oder einfach Funktion).

Reelle Funktionen einer Variablen, deren Definitionsbereich  $\mathbb{N}$  ist, heißen Folgen.

Beispiele:

- \* Die Abbildung  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = x^2 + x \cdot y$  ist eine reelle Funktion von zwei Variablen.
- \* Die Abbildung  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(0) = 0$  und  $g(x) = x \cdot \log_2(x)$  für  $x \neq 0$  ist eine reelle Funktion einer Variablen ( $\log_2(x)$  ist der Logarithmus von  $x$  zur Basis 2).
- \* Folgen sind die Abbildungen

$$a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } a(n) = a_n = \frac{1}{2^n}$$

oder

$$s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } s(n) = s_n = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

Mit Folgen und Funktionen werden wir uns später ausführlich beschäftigen.

Da eine Abbildung  $f: A \rightarrow B$  durch eine Relation

$$R_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subset A \times B$$

definiert ist, kann man stets die Umkehrrelation  $\tilde{R}_f \subset B \times A$  bilden:

$$\tilde{R}_f = \{(b, a) \mid b \in B \text{ und } b = f(a) \text{ für ein } a \in A\}.$$

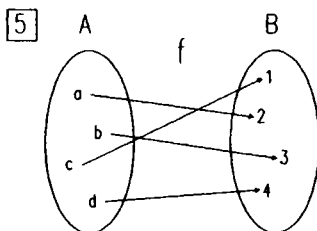
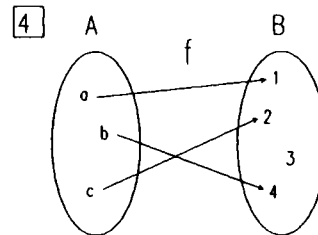
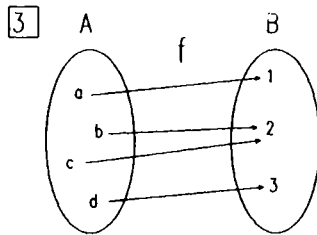
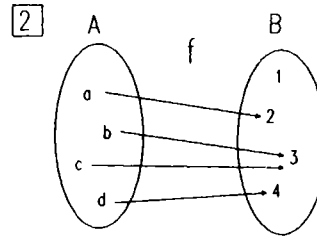
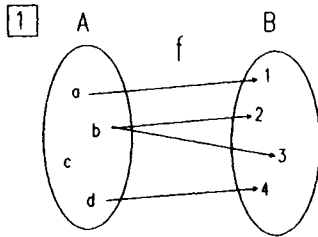
Welche Bedingungen muß nun die Abbildung  $f$  erfüllen, damit auch  $\tilde{R}_f$  eine Abbildung ist?

- Zum einen muß dazu  $\tilde{R}_f$  jedem  $b \in B$  ein  $a \in A$  zuordnen, was bedeutet, daß für jedes  $b \in B$  ein  $a \in A$  mit  $f(a) = b$  existieren muß.
- Da andererseits  $\tilde{R}_f$  jedem  $b \in B$  nur ein  $a \in A$  zuordnen darf, muß  $f$  verschiedenen Elementen  $a, a' \in A$  ( $a \neq a'$ ) verschiedene Werte  $f(a) \neq f(a')$  zuordnen.

Diese beiden Eigenschaften von Abbildungen  $f$ , die zusammen die Abbildungseigenschaft von  $\tilde{R}_f$  garantieren, hält die folgende Definition fest (vgl.

Abb. 1.2):

**Abb. 1.2:** Eigenschaften von Abbildungen: (1) Relation ohne Abbildungseigenschaft, (2) Abbildung (nicht surjektiv und nicht injektiv), (3) Surjektive Abbildung (nicht injektiv), (4) Injektive Abbildung (nicht surjektiv), (5) Bijektive Abbildung (injektiv und surjektiv)



**Definition 1.13:** Eine Abbildung  $f: A \rightarrow B$  heißt surjektiv, wenn es zu jedem  $b \in B$  mindestens ein  $a \in A$  mit  $f(a) = b$  gibt.

Die Abbildung  $f$  heißt injektiv, wenn sie verschiedene Elemente  $a, a' \in A$  ( $a \neq a'$ ) auf verschiedene Elemente  $f(a) \neq f(a')$  abbildet.

Die Abbildung  $f$  heißt bijektiv, wenn sie surjektiv und injektiv ist.

**Satz 1.14:** Ist  $f: A \rightarrow B$  bijektiv, so ist die Umkehrrelation  $\tilde{R}_f$  von  $f$  ebenfalls eine Abbildung  $f^{-1}: B \rightarrow A$ , die ebenfalls bijektiv ist und Umkehrabbildung oder inverse Abbildung von  $f$  genannt wird.

Beispiele:

- \* Seien  $A$  die Menge der Studierenden an der sozial- und wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät einer deutschen Universität und  $B$  die Menge der Studiengänge dieser Fakultät.  
Durch  $f: A \rightarrow B$  mit  $f(a) = b$ , falls Student(in)  $a$  im Studiengang  $b$  immatrikuliert ist, wird eine Abbildung definiert. Diese Abbildung ist surjektiv, da sicherlich in jedem von der Fakultät angebotenen Studiengang wenigstens eine Person eingeschrieben ist. Die Abbildung ist jedoch nicht injektiv, da sicherlich in wenigstens einem Studiengang mehr als ein Studierender immatrikuliert ist.
- \* Ist  $A$  die gerade erwähnte Menge von Studierenden und  $N$  die Menge der natürlichen Zahlen.  
Durch  $g: A \rightarrow N$  mit  $g(a) = n$ , falls  $n \in N$  die Matrikelnummer des Studierenden  $a$  ist, ist eine Abbildung definiert. Diese Abbildung ist injektiv, da verschiedene Studierende verschiedene Matrikelnummern besitzen. Weil es natürliche Zahlen gibt, die nicht als Matrikelnummern vergeben sind, ist  $g$  nicht surjektiv.
- \* Seien  $M$  die Menge der verheirateten Männer und  $N$  die Menge der verheirateten Frauen in der BR Deutschland, dann ist durch  $h: M \rightarrow N$  mit  $h(m) = n$ , falls der Mann  $m$  mit der Frau  $n$  verheiratet ist, eine Abbildung definiert, da wegen des Polygamieverbots in Deutschland kein Mann mit mehreren Frauen gleichzeitig verheiratet sein kann. Die so definierte Abbildung ist surjektiv, da jede Frau  $n \in N$  mit einem Mann  $m \in M$  verheiratet ist. Darüber hinaus ist  $h$  auch injektiv, da keine Frau mit mehreren Männern gleichzeitig verheiratet sein kann. Insgesamt ist  $h$  also bijektiv und damit invertierbar, so daß die Umkehrabbildung  $h^{-1}: N \rightarrow M$ , die jeder Frau  $n \in N$  ihren Ehemann  $m = h^{-1}(n) \in M$  zuordnet, existiert.

Unter bestimmten Voraussetzungen kann man Abbildungen  $f$  und  $g$  zu einer neuen Abbildung  $g \circ f$  verknüpfen. Ist nämlich  $g$  für jedes  $f(a)$  definiert, so kann eine neue Abbildung  $h = g \circ f$  durch  $h(a) = g(f(a))$  definiert werden. Formal gilt:

**Definition 1.15:** Sind  $f: A \rightarrow B$  und  $g: B \rightarrow C$  Abbildungen mit der Eigenschaft, daß der Wertebereich von  $f$  im Definitionsbereich von  $g$  enthalten ist, so ist durch  $h: A \rightarrow C$  mit

$$h(a) = g(f(a)) \quad \text{für alle } a \in A$$

eine Abbildung  $h$  definiert, die Komposition von  $f$  und  $g$  genannt und mit  $g \circ f$  bezeichnet wird.

Beispiele:

- \* Es seien  $A$  die Menge der Teilnehmer einer Klausur,  $B = \{0, 1, 2, \dots, n\}$  die Menge der in dieser Klausur erreichbaren Punkte und  $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  die Menge der zu vergebenden Noten. Dann können Abbildungen  $f$  und  $g$  definiert werden:  
 $f: A \rightarrow B$  mit  $f(a) = i$ , falls Teilnehmer  $a$  in der Klausur  $i$  Punkte erreicht;  
 $g: B \rightarrow C$  mit  $g(i) = j$ , falls für  $i$  Punkte in der Klausur die Note  $j$  vergeben wird.  
 Da der Wertebereich von  $f$  mit dem Definitionsbereich von  $g$  übereinstimmt, können  $f$  und  $g$  zur Abbildung  $h = g \circ f$  verknüpft (komponiert) werden:  
 $h = g \circ f: A \rightarrow C$  mit  $h(a) = g(f(a)) = g(i) = j$ , falls Klausurteilnehmer  $a$  (mit  $i$  Punkten) die Note  $j$  erreicht hat.

- \* Sind  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^2$  und  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x) = x + 1$ , so kann  $(g \circ f): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gebildet werden und es gilt:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1.$$

Auch  $(f \circ g): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kann gebildet werden und es gilt:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2.$$

Man sieht an diesem Beispiel, daß auch dann, wenn sowohl  $g \circ f$  als auch  $f \circ g$  definiert sind,  $g \circ f$  und  $f \circ g$  nicht gleich sein müssen.

Ist  $f: A \rightarrow B$  bijektiv mit  $f^{-1}: B \rightarrow A$ , so können  $f$  und  $f^{-1}$  zu  $f^{-1} \circ f: A \rightarrow A$  komponiert werden und es gilt  $(f^{-1} \circ f)(a) = a$  für alle  $a \in A$ . Also ist  $f^{-1} \circ f$  die identische Abbildung auf der Menge  $A$ :  $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$ . Entsprechend kann auch  $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$  definiert werden, und es ist  $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$ .

Regeln für das Rechnen mit komponierten Abbildungen und ihre Eigenschaften sind in dem folgenden Satz zusammengestellt:

**Satz 1.16:** Sind  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$  und  $h: C \rightarrow D$  Abbildungen, dann gilt:

- (i)  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ ;
- (ii) sind  $f$  und  $g$  surjektiv (injektiv), so ist auch  $g \circ f$  surjektiv (injektiv);
- (iii) sind  $f$  und  $g$  bijektiv, so ist auch  $g \circ f$  bijektiv und es gilt:  
 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .

Satz 1.16(i) besagt, daß (bei Vorliegen der entsprechenden Voraussetzungen) auch mehr als zwei Abbildungen verknüpft werden können und daß diese Verknüpfung assoziativ ist.

Satz 1.16(ii) drückt aus, daß sich die Eigenschaften Surjektivität und Injektivität (und damit auch Bijektivität) von  $f$  und  $g$  auf die verknüpfte Abbildung  $g \circ f$  "vererben".

Gemäß Satz 1.16(iii) ist zu beachten, daß bei der Berechnung der inversen Abbildung  $(g \circ f)^{-1}$  als Komposition der inversen Abbildungen die Reihenfolge der "Faktoren"  $g^{-1}$  und  $f^{-1}$  umgekehrt wird:  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .

### 1.1.4 Mächtigkeit von Mengen

Bijektive Abbildungen bilden die Grundlage der Überlegungen zur "Mächtigkeit" von Mengen. Dabei stellt der Begriff der Mächtigkeit eine mathematische Präzisierung der "naiven" Vorstellung von der Anzahl der Elemente in einer Menge dar. Eine solche Präzisierung ist insbesondere für den Umgang mit unendlichen Mengen erforderlich.

**Definition 1.17:** Zwei nichtleere Mengen  $A$  und  $B$  heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung  $f: A \rightarrow B$  gibt.

Besitzt eine Menge  $A$  eine echte Teilmenge  $B \subset A$ ,  $B \neq A$ , die zu  $A$  gleichmächtig ist, so heißt  $A$  unendlich. Andernfalls heißt  $A$  endlich.

Die endlichen Mengen lassen sich auch direkt charakterisieren:

**Satz 1.18:** Eine Menge  $A \neq \emptyset$  ist genau dann endlich, wenn jede injektive Abbildung  $f: A \rightarrow A$  auch surjektiv ist. Ist  $A \neq \emptyset$  eine endliche Menge, so gibt es eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  derart, daß  $A$  und  $\{1, 2, \dots, n\}$  gleichmächtig sind. In diesem Fall wird  $n = n(A)$  die Mächtigkeit von  $A$  genannt. Ist  $A = \emptyset$ , so ist  $A$  endlich und die Mächtigkeit von  $A$  wird auf 0 festgelegt:  $n(\emptyset) = 0$ . Die Mächtigkeit unendlicher Mengen  $A$  wird durch das Symbol  $n(A) = \infty$  ausgedrückt.

Das Zählen der Elemente einer endlichen Menge  $A$  ist nichts anderes als die Konstruktion einer bijektiven Abbildung von  $A$  in die Menge  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,

wobei  $n$  zu Beginn der Konstruktion noch nicht bekannt sein muß. Mit endlichen Mengen und ihren Mächtigkeiten beschäftigt sich die Kombinatorik, die hier nicht weiter behandelt werden soll. Zwei typische Ergebnisse der Kombinatorik, die auch in der Statistik Anwendung finden, sollen jedoch erwähnt werden:

**Satz 1.19:** Sei  $A$  eine endliche Menge mit  $n(A) = n$  mit der Potenzmenge (Menge aller Teilmengen von  $A$ )  $\mathcal{P}(A)$ , dann ist  $n(\mathcal{P}(A)) = 2^n$ .

Ist  $P_k = \{B \subset A \mid n(B) = k\} \subset \mathcal{P}(A)$ , die Menge aller  $k$ -elementigen Teilmengen von  $A$  ( $0 \leq k \leq n$ ), dann ist

$$n(P_k) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-k))} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Der Ausdruck  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  wird durch  $n!$  ( $n$ -Fakultät) abgekürzt ( $0! = 1$ ).

Der Quotient  $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$  heißt Binomialkoeffizient und wird durch  $\binom{n}{k}$  abgekürzt ( $n$  über  $k$ ).

Beispiel:

\* Ist  $A = \{1, 2, 3\}$ , so ist  $n(A) = 3$  und  $A$  besitzt  $n(\mathcal{P}(A)) = 2^3 = 8$  Teilmengen (einschließlich der leeren Menge und  $A$  selbst). Im einzelnen besitzt  $A$ :

$$- \binom{3}{0} = \frac{3!}{0! \cdot 3!} = 1 \text{ Teilmenge mit 0 Elementen } (\emptyset),$$

$$- \binom{3}{1} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3 \text{ Teilmengen mit einem Element } (\{1\}, \{2\}, \{3\}),$$

$$- \binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3 \text{ Teilmengen mit zwei Elementen } (\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\})$$

und

$$- \binom{3}{3} = \frac{3!}{3! \cdot 0!} = 1 \text{ Teilmenge mit drei Elementen } (A \text{ selbst}).$$

Insgesamt enthält  $A$  also  $\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 2^3$  Teilmengen.

Dieser Zusammenhang zwischen den Binomialkoeffizienten und den Potenzen  $2^n$  gilt natürlich allgemein:

Satz 1.20: Es gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ :  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ .

Die Mächtigkeiten von Mengen können in natürlicher Weise geordnet werden, indem man definiert:

$A$  ist höchstens so mächtig wie  $B$  ( $n(A) \leq n(B)$ ), wenn es eine injektive Abbildung von  $A$  nach  $B$  gibt.

In diesem Fall kann  $A$  mit einer Teilmenge von  $B$  identifiziert werden. Auf der Menge der Kardinalzahlen (die natürlichen Zahlen und die Mächtigkeiten der Mengen mit unendlich vielen Elementen) wird durch diese Relation eine vollständige Ordnung definiert. Insbesondere gilt der folgende Satz:

Satz 1.21: Sind  $A$  und  $B$  Mengen und gibt es injektive Abbildungen  $f: A \rightarrow B$  und  $g: B \rightarrow A$ , so gibt es auch eine bijektive Abbildung  $h: A \rightarrow B$ .

Dieser Satz drückt also aus, daß aus  $n(A) \leq n(B)$  und  $n(B) \leq n(A)$  die Gleichheit  $n(A) = n(B)$  folgt. Dieser für endliche Mengen offensichtliche Zusammenhang ist für unendliche Mengen nicht so einfach zu beweisen. Einige Beispiele zur Mächtigkeit unendlicher Mengen sollen dies belegen.

Satz 1.22: Die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen stimmt mit der Mächtigkeit der rationalen Zahlen überein.

Beweisidee:

Offensichtlich ist  $n(\mathbb{N}) \leq n(\mathbb{Q})$ , da beispielsweise die Abbildung  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$  mit  $f(n) = \frac{n}{1} \in \mathbb{Q}$  injektiv ist. Kann man nun auch eine injektive Abbildung

$h: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$  angeben, so folgt aus Satz 1.21 die Gleichmächtigkeit von  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{N}$ .  
Ist  $r = \frac{p}{q}$  (mit  $p \in \mathbb{Z}$  und  $q \in \mathbb{N}$  ( $q > 0$ )), so wird durch

$$h(r) = h\left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} 2^p \cdot 3^q & \text{falls } p \geq 0 \\ 5^{-p} \cdot 3^q & \text{falls } p < 0 \end{cases}$$

eine injektive Abbildung von  $\mathbb{Q}$  nach  $\mathbb{N}$  definiert, da man von der natürlichen Zahl  $n$ , auf die durch  $h$  eine rationale Zahl  $r$  abgebildet wird, eindeutig auf die Zahlen  $p$  und  $q$  und damit auf  $r$  zurückschließen kann. Damit gilt auch  $n(\mathbb{Q}) \leq n(\mathbb{N})$  und insgesamt  $n(\mathbb{N}) = n(\mathbb{Q})$ .

Daß es auch Mengen gibt, deren Mächtigkeiten größer als die der natürlichen Zahlen sind, ist eine Konsequenz des folgenden Satzes.

**Satz 1.23:** Für eine beliebige Menge ist  $n(\mathcal{P}(A)) > n(A)$ .

Für endliche Mengen ist dieser Zusammenhang klar, da  $2^n$  stets größer als  $n$  ist.

Um zu zeigen, daß dieser Zusammenhang auch für die unendliche Menge  $A$  gilt, muß man zeigen, daß es keine bijektive Abbildung  $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$  geben kann. Dieser Nachweis soll durch einen Widerspruchsbeweis erfolgen. Dazu nimmt man an, daß es eine Menge  $A$  gibt, für die eine bijektive Abbildung  $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$  existiert. Betrachtet man nun die Menge

$B = \{a \in A \mid a \notin f(a)\} \in \mathcal{P}(A)$ , so gibt es wegen der Bijektivität von  $f$  ein

$a_0 \in A$  mit  $f(a_0) = B$ . Gilt nun  $a_0 \in B$ ? Wenn ja, dann ist  $a_0 \notin f(a_0) = B$  ein Widerspruch! Wenn nein (also  $a_0 \notin B = f(a_0)$ ), so muß nach Definition von  $B$   $a_0 \in B$  gelten, ein Widerspruch!

Insgesamt führt also die Annahme der Existenz einer bijektiven Abbildung zwischen  $A$  und  $\mathcal{P}(A)$  zu einem Widerspruch, so daß diese Annahme nicht richtig sein kann. Damit ist gezeigt, daß  $n(A) \neq n(\mathcal{P}(A))$  ist. Wegen der Injektivität der Abbildung  $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$  mit  $f(a) = \{a\}$  gilt damit  $n(A) < n(\mathcal{P}(A))$ .

Eine Konsequenz dieses Satzes ist, daß es bei unendlichen Mengen unterschiedliche Mächtigkeiten geben kann. So ist beispielsweise  $n(\mathbb{N}) < n(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ .

Das wichtigste Beispiel für unendliche Mengen mit unterschiedlichen Mächtigkeiten sind die Mengen  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen und  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen:

**Satz 1.24:** Es gilt  $n(\mathbb{N}) < n(\mathbb{R})$ .

**Beweisidee:**

Da  $\mathbb{N}$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist, gilt  $n(\mathbb{N}) \leq n(\mathbb{R})$ , so daß nur noch der Fall  $n(\mathbb{N}) = n(\mathbb{R})$  auszuschließen ist. Dazu wird die Annahme  $n(\mathbb{N}) = n(\mathbb{R})$  zu einem Widerspruch geführt. Da es bijektive Abbildungen  $f: ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, etwa

$$f(x) = \frac{2x-1}{(2x-1)^2-1}, \text{ liegen im (offenen) Intervall } ]0, 1[ \text{ schon genauso viele}$$

reelle Zahlen wie in ganz  $\mathbb{R}$ :  $n(]0, 1[) = n(\mathbb{R})$ .

Es reicht daher aus, die Annahme  $n(\mathbb{N}) = n([0, 1[)$  zu einem Widerspruch zu führen. Wäre also  $n(\mathbb{N}) = n([0, 1[)$ , so gäbe es eine bijektive Abbildung  $a: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1[$  mit  $a(i) = a_i \in [0, 1[$ . Die reellen Zahlen aus  $[0, 1[$  ließen sich dann also der Reihe nach abzählen:  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ .

Jede dieser Zahlen läßt sich eindeutig als unendlicher Dezimalbruch darstellen, wobei die letzten Stellen lauter Nullen (aber nicht lauter Neunen) sein können. Bezeichnet man mit  $a_{ij}$  die  $j$ -te Dezimalstelle der Zahl  $a_i$ , so ist mit  $a^*$  eine reelle Zahl aus  $[0, 1[$  definiert, wenn man die  $j$ -te Dezimalstelle  $a^*_j$

von  $a^*$  definiert durch: 
$$a^*_j = \begin{cases} 5, & \text{falls } a_{jj} \neq 5 \\ 0, & \text{falls } a_{jj} = 5 \end{cases}$$

(Die Auswahl der Ziffer 5 zur Konstruktion der Zahl  $a^*$  ist willkürlich.). Die Zahl  $a^*$  unterscheidet sich an der  $j$ -ten Stelle von der  $j$ -ten Zahl  $a_j$  der Auflistung, so daß  $a^*$  nicht in der Aufzählung der reellen Zahlen aus  $[0, 1[$  vorkommt. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme der Bijektivität der Abbildung  $a$ . Also kann es keine bijektive Abbildung zwischen  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{R}$  geben, so daß  $n(\mathbb{N}) < n(\mathbb{R})$  sein muß.

**Definition 1.25:** Die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen wird abzählbar unendlich und die der reellen Zahlen überabzählbar unendlich genannt.

Die Tatsache, daß die Mächtigkeiten von  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{R}$  verschieden sind, hat eine Reihe von Konsequenzen. Eine ist der folgende Satz:

**Satz 1.26:** Es gibt Abbildungen  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , die von keinem Computer berechnet werden können.

**Beweisidee:**

Damit ein Computer eine Abbildung  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  berechnen kann, benötigt er ein Programm. Ein Programm ist ein Text, der aus Zeichen  $\{z_1, \dots, z_k\}$  besteht und eine endliche Länge besitzt. Man kann zeigen (vgl. Übungsaufgabe 1.7), daß die Menge aller endlichen Ketten von Zeichen aus  $\{z_1, \dots, z_k\}$  abzählbar unendlich ist. Die Menge aller Abbildungen  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ist aber gerade das (abzählbare) kartesische Produkt  $\prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{N}$ , von dem man zeigen kann (vgl. Übungsaufgabe 1.8), daß es überabzählbar unendlich viele Elemente besitzt. Also können Computer nur eine abzählbare (und daher echte) Teilmenge der überabzählbaren Menge aller Abbildungen  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  berechnen. Es muß also auch Abbildungen  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  geben, die nicht berechnet werden können. Die konkrete Angabe einer solchen Funktion erfordert einen beträchtlichen Aufwand und erfolgt daher an dieser Stelle nicht.

## 1.2 Aussagenlogik

### 1.2.1 Verknüpfung von Aussagen

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Grundlagen des logischen Schließens behandelt. Dabei wird das intuitive Verständnis dessen, was "logisch" ist, präzisiert und ein formaler Rahmen entwickelt, in dem Aussagen und ihre Beziehungen untereinander dargestellt werden können. Dazu ist zunächst zu klären, was Aussagen sind:

**Definition 1.27:** Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.

Aussagen  $A$  können also nur einen der beiden Wahrheitswerte  $W(A) = w$  oder  $W(A) = f$  besitzen, eine dritte Möglichkeit gibt es nicht (Prinzip des ausgeschlossenen Dritten). Außerdem können Aussagen nicht gleichzeitig wahr und falsch sein (Prinzip des ausgeschlossenen Widerspruchs). Die Abbildung  $W$

ordnet also jeder Aussage ein Element des Wertebereichs  $\{w, f\}$  zu.

Beispiele für Aussagen sind:

- \* Heute ist Sonntag.
- \* Der Konsum von Alkohol senkt das Risiko von Kreislauferkrankungen.
- \* Steigende Kreditnachfrage führt zu höheren Zinssätzen.
- \* Die FERMATsche Vermutung ist richtig.

Keine Aussagen sind beispielsweise die folgenden Sätze:

- \* Welche Bank besitzt die größte Macht?
- \* Fördern Sie den Mittelstand!
- \* Dieser Satz ist falsch.

Der letzte Satz scheint auf den ersten Blick eine Aussage zu sein. Bei genau-erem Hinsehen erweist er sich jedoch als widersprüchlich: Nimmt man an, daß er wahr sei, so folgt, daß er falsch ist; nimmt man an, daß er falsch sei, so folgt, daß er wahr ist. Dieser Widerspruch hat seinen Grund in der Tatsache, daß dieser Satz auf sich selbst Bezug nimmt. Das ist ein Problem, das in ähnlicher Form auch schon bei Mengen aufgetreten ist (vgl. Abschnitt 1.1.1, RUSSELSche Antinomie).

Die Frage, ob eine konkrete Aussage, wie beispielsweise "Steigende Kreditnachfrage führt zu höheren Zinssätzen.", wahr oder falsch ist, wie also der Wert  $W(A)$  für eine konkrete Aussage zu bestimmen ist, wird nicht von der Aussagenlogik behandelt. Probleme dieser Art sind vielmehr Gegenstand der Einzelwissenschaften wie Medizin, Ökonomie oder auch der Mathematik. Darüber hinaus werden grundsätzliche Fragen der Erkenntnistheorie berührt.

Die Aussagenlogik dagegen beschäftigt sich damit, wie aus gegebenen elementaren Aussagen durch Verknüpfung neue Aussagen entstehen und wie sich ihre Wahrheitswerte aus denen der elementaren Aussagen ergeben.

Die neuen Aussagen sind eindeutig festgelegt, wenn man angibt, wie ihre Wahrheitswerte aus denen der elementaren Aussagen berechnet werden. Sollen beispielsweise die Aussagen  $A$  und  $B$  zu einer neuen Aussage  $A \wedge B$  verknüpft werden, so muß festgelegt werden, welchen Wahrheitswert  $A \wedge B$  bei jeder der vier Kombinationen  $(w, w)$ ,  $(w, f)$ ,  $(f, w)$  und  $(f, f)$  von Wahrheitswerten der Aussagen  $A$  und  $B$  annimmt. Dieser Zusammenhang wird in einer sogenannten Wahrheitswerttabelle dargestellt:

| A | B | $A \wedge B$ |
|---|---|--------------|
| w | w | w            |
| w | f | f            |
| f | w | f            |
| f | f | f            |

Durch diese Wahrheitswerttabelle ist also eine neue Aussage  $A \wedge B$  definiert und eindeutig festgelegt, wie sich ihre Wahrheitswerte aus denen von A und B ergeben. Statt durch die Wahrheitswerttabelle kann  $A \wedge B$  auch mit Hilfe der Abbildung  $W(\dots)$  definiert werden:

$$W(A \wedge B) = \begin{cases} w, & \text{falls } W(A) = W(B) = w \\ f & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Verknüpfung von Aussagen heißt UND-Verknüpfung oder Konjunktion,  $A \wedge B$  wird also "A und B" gelesen. Sie ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind.

Diese Überlegungen lassen sich in einer Definition zusammenfassen:

**Definition 1.28:** Sind A und B Aussagen, dann ist die Aussage  $A \wedge B$

(sprich: A und B) durch die folgende Wahrheitswerttabelle definiert:

| A | B | $A \wedge B$ |
|---|---|--------------|
| w | w | w            |
| w | f | f            |
| f | w | f            |
| f | f | f            |

Beispiel:

- \* Sind  $M_1$  und  $M_2$  Mengen und  $x$  ein Element, dann erhält man Aussagen

A: " $x \in M_1$ " und B: " $x \in M_2$ ". Die Aussage  $A \wedge B$  ist dann " $x \in M_1$  und  $x \in M_2$ " oder " $x \in M_1 \cap M_2$ ". Man sieht, daß die Konjunktion von Aussagen sehr eng mit der Durchschnittsbildung von Mengen zusammenhängt.

Als nächstes wird die ODER-Verknüpfung oder Disjunktion von Aussagen definiert. Dabei ist zu beachten, daß das Wort "oder" in der Umgangssprache zwei Bedeutungen besitzt: Zum einen wird "oder" im ausschließenden Sinn als "entweder...oder..." gebraucht, zum anderen als "schwaches oder" im einschließenden Sinn ("Zum Studium der Wirtschaftsinformatik wird zugelassen, wer im Abitur einen Notendurchschnitt von wenigstens 2,0 erreicht hat oder wessen Abiturprüfung wenigstens 4 Jahre zurückliegt"). In der Mathematik wird "oder" stets im einschließenden (schwachen) Sinn gebraucht:

**Definition 1.29:** Sind A und B Aussagen, dann ist die Aussage  $A \vee B$  (sprich: A oder B) durch die folgende Wahrheitswerttabelle definiert:

| A | B | $A \vee B$ |
|---|---|------------|
| w | w | w          |
| w | f | w          |
| f | w | w          |
| f | f | f          |

Es ist also  $W(A \vee B) = \begin{cases} f, & \text{falls } W(A) = W(B) = f \\ w & \text{sonst.} \end{cases}$

Beispiel:

- \* Sind  $M_1$  und  $M_2$  Mengen und x ein Element. Damit erhält man die Aussagen A: " $x \in M_1$ " und B: " $x \in M_2$ ", und es ergibt sich  $A \vee B$ : " $x \in M_1$  oder  $x \in M_2$ " oder  $A \vee B$ : " $x \in M_1 \cup M_2$ ". Die Vereinigung von Mengen kann also durch die Disjunktion von Aussagen definiert werden.

Als nächstes wird eine Operation für Aussagen definiert, die der Komplementbildung von Mengen entspricht:

**Definition 1.30:** Ist A eine Aussage, so ist die Aussage  $\neg A$  (sprich: "nicht A" oder "Negation von A") durch die folgende Wahrheitswerttabelle definiert:

| A | $\neg A$ |
|---|----------|
| w | f        |
| f | w        |

Es ist also  $W(\neg A) = \begin{cases} w, & \text{falls } W(A) = f \\ f, & \text{falls } W(A) = w. \end{cases}$

Beispiel:

- \* Ist M eine Teilmenge der Grundmenge  $\Omega$  und A die Aussage A: " $x \in M$ ", dann ist  $\neg A$  die Aussage  $\neg A$ : " $x \notin M$ " oder  $\neg A$ : " $x \in \bar{M}^\Omega$ ".

**Satz 1.31:** Für eine Aussage A ist die Aussage  $A \vee \neg A$  stets wahr ( $W(A \vee \neg A) = w$ ), und die Aussage  $(A \wedge \neg A)$  ist stets falsch ( $W(A \wedge \neg A) = f$ ).

Dieser Satz besagt, daß die Aussage  $A \vee \neg A$ , bzw.  $A \wedge \neg A$  unabhängig vom Wahrheitswert von A stets wahr bzw. falsch ist.

Eine weitere wichtige Verknüpfung von Aussagen ist die Implikation:

**Definition 1.32:** Sind A und B Aussagen, dann ist die Aussage  $A \Rightarrow B$  (aus A folgt B) definiert durch die folgende Wahrheitstabelle:

| A | B | $A \Rightarrow B$ |
|---|---|-------------------|
| w | w | w                 |
| w | f | f                 |
| f | w | w                 |
| f | f | w                 |

Es ist also  $W(A \Rightarrow B) = \begin{cases} f, & \text{falls } W(A) = w \text{ und } W(B) = f \\ w & \text{sonst.} \end{cases}$

Daß durch diese Definition tatsächlich die umgangssprachliche "wenn...dann..." Beziehung zwischen Aussagen nachgebildet wird, soll ein Beispiel zeigen:

Sei A die Aussage "Hans studiert BWL" und sei B die Aussage "Hans hat die Abiturprüfung bestanden". Die Aussage  $A \Rightarrow B$  oder umgangssprachlich "Wenn Hans BWL studiert, dann hat er auch die Abiturprüfung bestanden" ist gültig, wenn Hans tatsächlich BWL studiert und auch das Abitur bestanden hat ( $W(A \Rightarrow B) = w$ , falls  $W(A) = W(B) = w$ ). Studiert Hans dagegen nicht BWL, so ist die Prämisse der Aussage nicht erfüllt, so daß die Aussage  $A \Rightarrow B$  nicht falsch sein kann und daher wahr sein muß ( $W(A \Rightarrow B) = w$ , falls  $W(A) = f$ ). Lediglich in dem Fall, wenn Hans BWL studiert ( $W(A) = w$ ) aber die Abiturprüfung nicht bestanden hat ( $W(B) = f$ ), ist die Aussage  $A \Rightarrow B$  ("Wenn Hans BWL studiert, so hat er auch die Abiturprüfung bestanden") falsch ( $W(A \Rightarrow B) = f$ , falls  $W(A) = w$  und  $W(B) = f$ ).

Als letzte Verknüpfung von Aussagen ist die Äquivalenz zu definieren:

**Definition 1.33:** Sind A und B Aussagen, so ist die Aussage  $A \Leftrightarrow B$  (sprich: "A äquivalent B") definiert durch die folgende Wahrheitstabelle:

| A | B | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|-----------------------|
| w | w | w                     |
| w | f | f                     |
| f | w | f                     |
| f | f | w                     |

Es gilt also  $W(A \Leftrightarrow B) = \begin{cases} w, & \text{falls } W(A) = W(B) \\ f & \text{sonst.} \end{cases}$

## 1.2.2 Objekt- und Metalogik

Die Implikation,  $A \Rightarrow B$ , bzw. die Äquivalenz von Aussagen,  $A \Leftrightarrow B$ , sind Verknüpfungen von Aussagen, die der Teilmengenbeziehung bzw. der Gleichheit von Mengen entsprechen. Dabei ist jedoch zu beachten, daß Ausdrücke der Form  $M_1 \subset M_2$  oder  $M_1 = M_2$  Aussagen über Mengen sind, während  $A \Rightarrow B$  und  $A \Leftrightarrow B$

Aussagen und nicht Aussagen über Aussagen sind. Es ist also zwischen der Logik als Untersuchungsgegenstand (Objektlogik) und der Logik als Teil der Regeln mit denen der Untersuchungsgegenstand (die Objektlogik) analysiert wird (Metalogik) zu unterscheiden.

Eine Möglichkeit zur Trennung zwischen Aussagen als Gegenstand der Untersuchung und Aussagen über Aussagen soll als nächstes anhand von Implikation und Äquivalenz dargestellt werden.

Dazu sei  $\mathcal{S}$  ein System (eine Menge) von Aussagen, das mit  $A$  und  $B$  auch  $A \wedge B$ ,  $A \vee B$ ,  $\neg A$ ,  $A \Rightarrow B$  und  $A \Leftrightarrow B$  enthält. Die Verknüpfung von Aussagen aus  $\mathcal{S}$  führt also wieder zu Aussagen aus  $\mathcal{S}$ .

Auf  $\mathcal{S}$  ist die Abbildung  $W : \mathcal{S} \rightarrow \{w, f\}$  mit

$$W(A) = \begin{cases} w, & \text{falls die Aussage } A \text{ wahr ist} \\ f & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert, die jeder Aussage ihren Wahrheitswert zuordnet.

Auf  $\mathcal{S}$  wird durch

$R_{\Leftrightarrow} \subset \mathcal{S} \times \mathcal{S}$  mit  $A \leftrightarrow B$  (oder  $(A, B) \in R_{\Leftrightarrow}$ ), falls  $W(A \Leftrightarrow B) = w$  eine Äquivalenzrelation definiert, die Gleichwertigkeit genannt wird.

Es gilt nämlich für alle Aussagen  $A, B, C \in \mathcal{S}$ :

- Reflexivität:  $A \leftrightarrow A$ , da die Aussage  $A \Leftrightarrow A$  stets wahr ist;
- Symmetrie: Ist  $A \leftrightarrow B$ , so ist  $W(A \Leftrightarrow B) = w$  also auch  $W(B \Leftrightarrow A) = w$  und damit  $B \leftrightarrow A$ ;
- Transitivität: Daß schließlich mit  $A \leftrightarrow B$  und  $B \leftrightarrow C$  auch  $A \leftrightarrow C$  gilt, zeigt man, indem man aus einer Wahrheitswerttabelle für die Aussagen  $A, B$  und  $C$  alle 6 Kombinationen von Wahrheitswerten entfernt, für die  $A \Leftrightarrow B$  oder  $B \Leftrightarrow C$  falsch ist. Ist also  $A \leftrightarrow B$  und  $B \leftrightarrow C$ , so muß  $W(A) = W(B) = W(C) = w$  oder  $W(A) = W(B) = W(C) = f$  sein, so daß auch  $A \Leftrightarrow C$  wahr ist und damit  $A \leftrightarrow C$  gilt.

Zwischen gleichwertigen Aussagen muß - zumindest vom Standpunkt der Aussagenlogik her - nicht mehr unterschieden werden.

Beispiel:

- Für beliebige Aussagen  $A$  und  $B$  sind die Aussagen  $(A \Rightarrow B)$  und  $(\neg A \vee B)$  gleichwertig:

Dazu muß man zeigen, daß für alle Kombinationen von Wahrheitswerten der Aussagen  $A$  und  $B$  die Aussage  $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$  wahr ist. Dies kann mit Hilfe einer Wahrheitswerttabelle leicht überprüft werden:

| A | B | $A \Rightarrow B$ | $\neg A \vee B$ | $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ |
|---|---|-------------------|-----------------|-----------------------------------------------------|
| w | w | w                 | w               | w                                                   |
| w | f | f                 | f               | w                                                   |
| f | w | w                 | w               | w                                                   |
| f | f | w                 | w               | w                                                   |

Eine Äquivalenzaussage dieses Typs, bei dem also die Gleichwertigkeit unabhängig von den Wahrheitswerten der elementaren Aussagen gilt, heißt Tautologie. Davon zu unterscheiden sind Aussagen der Form "Die Zinsen steigen."  $\Leftrightarrow$  "Die Kreditnachfrage steigt." Zum Nachweis der Gültigkeit von Äquivalenzaussagen dieser Art muß aufgrund realwissenschaftlicher, empirischer Erkenntnisse nachgewiesen werden, daß entweder beide Aussagen gleichzeitig wahr oder gleichzeitig falsch sind. Im Übrigen entspricht die Gleichwertigkeit von Aussagen der Gleichheit von Mengen.

Neben der Gleichwertigkeitsrelation kann auf  $\mathcal{S}$  auch eine Ordnungsrelation " $\rightarrow$ " definiert werden:

Definiere  $R_{\rightarrow} \subset \mathcal{S} \times \mathcal{S}$  durch  $A \rightarrow B$  (oder  $(A, B) \in R_{\rightarrow}$ ), falls  $W(A \Rightarrow B) = w$  gilt.

$R_{\rightarrow}$  ist eine Ordnungsrelation, denn es gilt:

- Reflexivität: Für jede Aussage  $A \in \mathcal{S}$  ist die Aussage  $A \Rightarrow A$  stets wahr, so daß  $W(A \Rightarrow A) = w$  oder  $A \rightarrow A$  für alle  $A \in \mathcal{S}$  gilt.
- Antisymmetrie: Gilt für Aussagen  $A \rightarrow B$  und  $B \rightarrow A$ , so muß  $W(A \Rightarrow B) = W(B \Rightarrow A) = w$  sein, was nur möglich ist, wenn  $W(A) = W(B)$  gilt. Also sind A und B gleichwertig.
- Transitivität: Gilt für Aussagen A, B, C  $A \rightarrow B$  und  $B \rightarrow C$ , so ist dies nur für die vier in der folgenden Tabelle dargestellten Kombinationen von Wahrheitswerten von A, B und C möglich. Wie die Tabelle zeigt, ist in diesen vier Fällen aber auch die Aussage  $A \Rightarrow C$  wahr, so daß mit  $A \rightarrow B$  und  $B \rightarrow C$  auch  $A \rightarrow C$  gilt:

| A | B | C | $A \Rightarrow B$ | $B \Rightarrow C$ | $A \Rightarrow C$ |
|---|---|---|-------------------|-------------------|-------------------|
| w | w | w | w                 | w                 | w                 |
| f | w | w | w                 | w                 | w                 |
| f | f | w | w                 | w                 | w                 |
| f | f | f | w                 | w                 | w                 |

Beispiel:

- \* Für beliebige Aussagen A und B gilt:  $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$ .

Zum Nachweis dieser tautologischen Aussage muß man zeigen, daß für alle Kombinationen von Wahrheitswerten der Aussagen A und B die Aussage  $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$  stets wahr ist. Das kann aber ohne Probleme durch eine Wahrheitswerttabelle gezeigt werden:

| A | B | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$ |
|---|---|--------------|------------|---------------------------------------|
| w | w | w            | w          | w                                     |
| w | f | f            | w          | w                                     |
| f | w | f            | w          | w                                     |
| f | f | f            | f          | w                                     |

Die Ordnungsrelation " $\rightarrow$ " für Aussagen entspricht der Teilmengenrelation für Mengen:

Ist  $A(x)$  die Aussage " $x \in M_1$ " und ist  $B(x)$  die Aussage " $x \in M_2$ ", so bedeutet  $A(x) \rightarrow B(x)$  (für alle  $x$  aus einer Grundmenge  $\Omega$ ), daß  $M_1 \subset M_2$  gilt.

Diese Überlegungen zur Gleichwertigkeit und Ordnung von Aussagen zeigen zweierlei Dinge, die über den eigentlichen Gegenstand dieses Abschnitts über Aussagenlogik hinausweisen.

- Wie bereits erwähnt, muß man unterscheiden zwischen der Logik als Gegenstand der Untersuchung (Objektlogik) einerseits und der Logik als ein Teil der Sprache, mit der die Aussagenlogik studiert wird (Metalogik). Zur Unterscheidung von Objekt- und Metaebene werden beispielsweise unterschiedliche Symbole (" $\wedge$ " und " $\Rightarrow$ " auf der Objektebene und " $\leftrightarrow$ " und " $\rightarrow$ " auf der Metaebene) benutzt.
- Für viele Untersuchungen ist es sinnvoll, nicht Aussagen als Konstante  $A$ , sondern Aussagen mit Variablen  $A(x)$ , beispielsweise " $x \in M_1$ ", zu benutzen. Solche Aussagen mit Variablen heißen Aussageformen.

Weiterführende Überlegungen zu diesem Thema, das in der Mathematik unter dem Stichwort Prädikatenlogik behandelt wird, sollen hier nicht angestellt werden. Statt dessen sollen mit Hilfe des Begriffs der Gleichwertigkeit von Aussagen Regeln für das Rechnen mit Aussagen angegeben werden.

Satz 1.34: Für Aussagen  $A$  und  $B$  gilt:

- (i)  $A \vee B \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ ;
- (ii)  $A \Rightarrow B \leftrightarrow (\neg A \vee B)$ ;
- (iii)  $A \Leftrightarrow B \leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$ .

Die Aussagen dieses Satzes, die durch die Berechnung von Wahrheitswerttabellen bewiesen werden können, zeigen, daß die Disjunktion, Implikation und Äquivalenz von Aussagen auf die beiden Verknüpfungen Konjunktion und Negation zurückgeführt werden können. In diesem Sinne können Disjunktion, Implikation und Äquivalenz als abgekürzte Schreibweise für bestimmte Kombinationen von Konjunktion und Negation aufgefaßt werden.

Satz 1.35: Für Aussagen  $A$ ,  $B$  und  $C$  gilt:

- (i)  $(A \vee A) \leftrightarrow A$ ;
- (ii)  $(A \wedge A) \leftrightarrow A$ ;
- (iii)  $(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$ ;

- (iv)  $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A);$
- (v)  $(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C);$
- (vi)  $(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C);$
- (vii)  $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C);$
- (viii)  $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C);$
- (ix)  $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B;$
- (x)  $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B.$

Die Gleichwertigkeitsaussagen dieses Satzes können durch Wahrheitstabelle bewiesen werden. Dazu muß lediglich gezeigt werden, daß die Wahrheitswerte der Aussagen links vom  $\leftrightarrow$ -Zeichen (in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der elementaren Aussagen A, B und C) mit denen der Aussagen rechts vom  $\leftrightarrow$ -Zeichen übereinstimmen.

Im übrigen sieht man, daß die Regeln dieses Satzes für das Rechnen mit Aussagen genau den Regeln des Satzes 1.7 für das Rechnen mit Mengen entsprechen. Dabei gelten im einzelnen die folgenden Beziehungen:

| Mengenalgebra<br>$M_1, M_2$ Mengen | Aussagenalgebra<br>$A_1, A_2$ Aussagen |
|------------------------------------|----------------------------------------|
| $M_1 \subset M_2$                  | $A_1 \rightarrow A_2$                  |
| $M_1 = M_2$                        | $A_1 \leftrightarrow A_2$              |
| $M_1 \cup M_2$                     | $A_1 \vee A_2$                         |
| $M_1 \cap M_2$                     | $A_1 \wedge A_2$                       |
| $\bar{M}_1$                        | $\neg A_1$                             |

### 1.3 Zahlensysteme

In diesem Abschnitt werden die Zahlensysteme  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  und ihre wichtigsten Eigenschaften aus den natürlichen Zahlen hergeleitet. Weiterhin werden vereinfachende Notationen für Summen und Produkte von Zahlen eingeführt und verschiedene Darstellungsmöglichkeiten für Zahlen (Dualzahlen) erörtert.

#### 1.3.1 Natürliche, ganze und rationale Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen ist definiert durch die folgenden Eigenschaften:

**Definition 1.36:** Eine Menge  $N$  heißt Menge der natürlichen Zahlen, wenn sie die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) Es gibt eine Abbildung  $f: N \rightarrow N$ ,  $f(n) = n'$  mit den folgenden Eigenschaften:
  - (ii)  $f$  ist injektiv, d.h.  $n \neq m \Rightarrow n' \neq m'$
  - (i2) es gibt ein Element  $0 \in N$  mit  $n' \neq 0$  für alle  $n \in N$
  - (i3) für alle  $m \in N$ ,  $m \neq 0$  gibt es ein  $n \in N$  mit  $n' = m$ ;
- (ii) ist  $M \subset N$  eine Teilmenge von  $N$  mit den Eigenschaften
  - (ii1)  $0 \in M$  und
  - (ii2)  $n \in M \Rightarrow n' \in M$ ,
 so gilt  $M = N$ .

Die Abbildung  $f$  aus der Definition 1.36(i) beschreibt die Nachfolgerfunktion: Jede natürliche Zahl  $n$  besitzt genau einen Nachfolger  $n'$  (Abbildungseigenschaft); keine natürliche Zahl kann Nachfolger von zwei verschiedenen natürlichen Zahlen sein (Injektivität). Das Element  $0 \in N$  ist die einzige natürliche Zahl, die nicht Nachfolger einer anderen natürlichen Zahl ist. Das

bedeutet aber, daß  $N$  und  $N \setminus \{0\}$  gleichmächtig sind, so daß  $N$  unendlich viele Elemente besitzen muß (vgl. Definition 1.17).

Der zweite Teil der Definition 1.36 wird als Prinzip der vollständigen Induktion bezeichnet und drückt aus, daß die natürlichen Zahlen die "kleinste" Menge sind, für die eine Nachfolgerfunktion mit den angegebenen Eigenschaften existiert. Das Prinzip der vollständigen Induktion kann für Definitionen und Beweise ausgenutzt werden: Wird eine Eigenschaft  $E$  für die Zahl  $0 \in N$  definiert und wird weiterhin definiert, wie sich allgemein die Eigenschaft  $E$  für  $n'$  aus der Eigenschaft  $E$  für  $n$  ergibt, so ist die Eigenschaft  $E$  für alle natürlichen Zahlen definiert. Weiterhin kann man zum Beweis, daß eine Eigenschaft  $E$  für alle natürlichen Zahlen  $n \in N$  gilt, zunächst nachweisen, daß  $0 \in N$  diese Eigenschaft besitzt und dann zeigen, daß  $E$  - wenn  $E$  für  $n$  Gültigkeit besitzt - auch für  $n'$  gilt.

Die beiden folgenden Definitionen der Addition und der Multiplikation natürlicher Zahlen sind erste Anwendung der vollständigen Induktion:

**Definition 1.37:** Die Addition natürlicher Zahlen ordnet zwei natürlichen Zahlen  $m, n \in \mathbb{N}$  eine dritte natürliche Zahl  $m + n \in \mathbb{N}$  zu. Dabei gilt für eine beliebige natürliche Zahl  $m \in \mathbb{N}$ :

- (i)  $m + 0 = m$ ;
- (ii)  $m + n' = (m + n)'$ .

Für jedes beliebige  $m \in \mathbb{N}$  ist damit  $m + n$  induktiv für alle  $n \in \mathbb{N}$  definiert.

**Definition 1.38:** Die Multiplikation natürlicher Zahlen ordnet zwei natürlichen Zahlen  $m, n \in \mathbb{N}$  eine dritte natürliche Zahl  $m \cdot n \in \mathbb{N}$  zu. Dabei gilt für eine beliebige natürliche Zahl  $m \in \mathbb{N}$ :

- (i)  $m \cdot 0 = 0$ ;
- (ii)  $m \cdot n' = m \cdot n + m$ .

Für jedes beliebige  $m \in \mathbb{N}$  ist damit  $m \cdot n$  induktiv für alle  $n \in \mathbb{N}$  definiert.

Neben diesen beiden Verknüpfungen kann auf  $\mathbb{N}$  eine Ordnungsrelation definiert werden:

**Definition 1.39:** Sind  $m, n \in \mathbb{N}$  natürliche Zahlen, dann heißt  $m$  kleiner oder gleich  $n$  ( $m \leq n$ ), falls es eine natürliche Zahl  $x \in \mathbb{N}$  mit  $m + x = n$  gibt.

Aus dieser Definition leiten sich die bekannten Variationen ab:

- $m < n$  ( $m$  "echt kleiner als"  $n$ ) falls  $m \leq n$  und  $m \neq n$ ,
- $m \geq n$  ( $m$  "größer oder gleich"  $n$ ) falls  $n \leq m$ ,
- $m > n$  ( $m$  "echt größer"  $n$ ) falls  $n < m$ .

Die wichtigsten (und allgemein bekannten) Eigenschaften der natürlichen Zahlen sind in dem folgenden Satz zusammengefaßt:

**Satz 1.40:** Sind  $m, n, p \in \mathbb{N}$  natürlichen Zahlen, dann gilt:

- (i)  $m + (n + p) = (m + n) + p$ ;
- (ii)  $m + n = n + m$ ;
- (iii)  $m + 0 = 0 + m = m$ ;
- (iv)  $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$ ;
- (v)  $m \cdot n = n \cdot m$ ;
- (vi)  $m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$   
(dabei ist 1 der Nachfolger von 0:  $1 = 0'$ );
- (vii)  $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$ ;
- (viii)  $m \leq n$  oder  $n \leq m$ ;
- (ix)  $(m \leq n \wedge n \leq m) \Rightarrow m = n$ ;
- (x)  $(m \leq n \wedge n \leq p) \Rightarrow m \leq p$ ;
- (xi)  $m \leq n \Rightarrow m + p \leq n + p$ ;
- (xii)  $m \leq n \Rightarrow m \cdot p \leq n \cdot p$ .

Die Menge der natürlichen Zahlen ist in einem gewissen Sinne unvollständig, so besitzt etwa die Gleichung  $m + x = n$  bei gegebenen  $m, n \in \mathbb{N}$  nur dann eine Lösung  $x \in \mathbb{N}$ , wenn  $m \leq n$  ist. In diesem Fall wird die Lösung  $x$  der Gleichung  $m + x = n$  mit  $x = n - m$  bezeichnet. Sollen Gleichungen der Form  $m + x = n$  stets (für alle  $m, n \in \mathbb{N}$ ) lösbar sein, so ist  $\mathbb{N}$  um die negativen ganzen Zahlen zum Zahlenbereich  $\mathbb{Z}$  zu erweitern:

$$\mathbb{Z} = \{(\text{sgn}, n) \mid \text{sgn} \in \{+, -\}, n \in \mathbb{N}\}.$$

$\mathbb{Z}$  entsteht also aus  $\mathbb{N}$ , indem jedes  $n \in \mathbb{N}$  mit einem Vorzeichen (Signum) "+" oder "-" versehen wird.

Nachdem  $\mathbb{Z}$  als Menge definiert ist, müssen die algebraischen Operationen von  $\mathbb{N}$  auf  $\mathbb{Z}$  verallgemeinert werden. Seien also  $z = (\text{sgn}, n)$  und  $z^* = (\text{sgn}^*, n^*)$  ganze Zahlen, dann wird auf  $\mathbb{Z}$  durch

$$(\text{sgn}, n) + (\text{sgn}^*, n^*) = \begin{cases} (\text{sgn}, n + n^*), & \text{falls } \text{sgn} = \text{sgn}^* \text{ ist} \\ (\text{sgn}, n - n^*), & \text{falls } n \geq n^* \text{ und } \text{sgn} \neq \text{sgn}^* \\ (\text{sgn}^*, n^* - n), & \text{falls } n^* \geq n \text{ und } \text{sgn} \neq \text{sgn}^* \end{cases}$$

eine Addition definiert ( $n, n^* \in \mathbb{N}$ ;  $\text{sgn}, \text{sgn}^* \in \{+, -\}$ ). Die Summen  $(+, n) + (-, n)$  und  $(-, n) + (+, n)$  sind doppelt definiert als  $(+, n - n) = (+, 0)$  und  $(-, n - n) = (-, 0)$ . Da aber  $(+, 0) \neq (-, 0)$  gilt, ergibt sich hieraus kein Widerspruch.

Die Multiplikation auf  $\mathbb{Z}$  ist definiert durch

$$(\text{sgn}, n) \cdot (\text{sgn}^*, n^*) = \begin{cases} (+, n \cdot n^*), & \text{falls } \text{sgn} = \text{sgn}^* \\ (-, n \cdot n^*), & \text{falls } \text{sgn} \neq \text{sgn}^*. \end{cases}$$

Auf  $\mathbb{Z}$  kann eine Ordnungsrelation definiert werden:

Für  $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$  gilt  $z_1 \leq z_2$  falls  $z_2 - z_1$  von der Form  $(+, n)$  für ein geeignetes  $n \in \mathbb{N}$  ist.

Die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  können als Teilmenge der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  aufgefaßt werden. Genauer gilt:

**Satz 1.41:** Die Abbildung  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  mit  $f(n) = (+, n)$  besitzt die folgenden Eigenschaften:

- (i)  $f$  ist injektiv;
- (ii)  $f(m + n) = f(m) + f(n)$ ;
- (iii)  $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ ;
- (iv)  $m \leq n \Rightarrow f(m) \leq f(n)$ .

Dieser Satz drückt aus, daß  $\mathbb{N}$  mit einer Teilmenge von  $\mathbb{Z}$  identifiziert werden kann, daß also  $\mathbb{Z}$  eine Teilmenge besitzt, die alle Eigenschaften der natürlichen Zahlen besitzt. In diesem Sinne ist  $\mathbb{N}$  eine Teilmenge von  $\mathbb{Z}$ .

Die Darstellung ganzer Zahlen ( $\text{sgn}, n) \in \mathbb{Z}$  kann vereinfacht werden: Statt  $(+, n)$  schreibt man  $n$ , statt  $(-, n)$  schreibt man  $-n$ . Die Summe  $m + (-n)$  wird abgekürzt durch  $m - n$  dargestellt. Für eine beliebige ganze Zahl  $m \in \mathbb{Z}$  wird  $(-1) \cdot m$  durch  $-m$  abgekürzt. Die Regeln für das Rechnen mit ganzen Zahlen sind in dem folgenden Satz zusammengestellt:

**Satz 1.42:** Sind  $m, n, p, \in \mathbb{Z}$  ganze Zahlen, dann gilt:

- (i)  $m + (n + p) = (m + n) + p$ ;
- (ii)  $m + n = n + m$ ;
- (iii)  $m + 0 = 0 + m = m$ ;
- (iv)  $m + (-m) = (-m) + m = 0$ ;
- (v)  $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$ ;
- (vi)  $m \cdot n = n \cdot m$ ;
- (vii)  $m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$ ;
- (viii)  $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$ ;
- (ix)  $m \leq n$  oder  $n \leq m$ ;
- (x)  $m \leq n$  und  $n \leq m \Rightarrow m = n$ ;
- (xi)  $m \leq n$  und  $n \leq p \Rightarrow m \leq p$ ;
- (xii)  $m \leq n \Rightarrow m + p \leq n + p$ ;
- (xiii)  $m \leq n$  und  $p \geq 0 \Rightarrow m \cdot p \leq n \cdot p$ .

Aus der Existenz eines inversen Elements bezüglich der Addition für alle ganzen Zahlen  $m \in \mathbb{Z}$  (Eigenschaft (iv)) folgt, daß in  $\mathbb{Z}$  die Gleichung  $m + x = n$  für alle  $m, n \in \mathbb{Z}$  eine Lösung  $x \in \mathbb{Z}$  besitzt:  $x = n + (-m) = n - m$ .

Gleichungen der Form  $m \cdot x = n$  sind in  $\mathbb{Z}$  nicht immer lösbar. Ist  $m = 0$ , so ist für alle  $x \in \mathbb{Z}$   $m \cdot x = 0$ , so daß man im Fall  $m = 0$  keine Lösbarkeit von  $m \cdot x = n$  erwarten kann (wenn  $n \neq 0$  ist). Aber auch wenn  $m \neq 0$  ist, ist die Gleichung  $m \cdot x = n$  nicht immer lösbar. Um die Lösbarkeit von  $m \cdot x = n$  für alle  $m, n \in \mathbb{Z}$  mit  $m \neq 0$  zu gewährleisten, muß  $\mathbb{Z}$  zur Menge  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen erweitert werden. Dazu definiert man zunächst die Menge

$$\mathbb{Q}^* = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \right\}.$$

In  $\mathbb{Q}^*$  wird also zwischen Ausdrücken wie  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{12}{18}$  und  $\frac{34}{51}$  unterschieden.

Da aber Paare (Brüche) der Form  $\frac{m}{n}$ , die durch Erweitern oder Kürzen auseinander

hervorgehen (wie  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{12}{18}$  und  $\frac{34}{51}$ ), dieselbe rationale Zahl darstellen, muß auf  $\mathbb{Q}^*$  eine Äquivalenzrelation  $\sim$  definiert werden, die solche verschiedenen Darstellungen derselben rationalen Zahl zusammenfaßt:

Auf  $\mathbb{Q}^*$  wird durch

$$\frac{m}{n} \sim \frac{m^*}{n^*} \Leftrightarrow n \cdot m^* = n^* \cdot m$$

eine Äquivalenzrelation definiert.