Mathematik 1 für Nichtmathematiker

Grundbegriffe – Vektorrechnung – Lineare Algebra und Matrizenrechnung – Kombinatorik – Wahrscheinlichkeitsrechnung

von

Manfred Precht, Karl Voit und Roland Kraft

8., korrigierte Auflage

Oldenbourg Verlag München

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
oldenbourg.de

Lektorat: Kathrin Mönch
Herstellung: Anna Grosser
Coverentwurf: Kochan & Partner, München
Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Gesamtherstellung: Druckhaus „Thomas Müntzer“ GmbH, Bad Langensalza

ISBN 978-3-486-70519-5

Inhalt

Vorwort zur 1. Auflage

In vielen Einzelwissenschaften wie z.B. Biologie, Medizin, Soziologie, Wirtschaftswissenschaften usw. tritt mit fortschreitender Entwicklung eine immer deutlicher werdende Mathematisierung zutage. Um die neueren Methoden in seinem Fachgebiet zu beherrschen, muß sich der betreffende Wissenschaftler in zunehmendem Maße mit mathematischen und statistischen Methoden beschäftigen. Die Mathematik ist daher zu einem wichtigen Hilfsmittel dieser Disziplinen geworden, während sie diese Rolle früher fast ausschließlich für die Physik und die Ingenieurwissenschaften gespielt hat. Diese Tatsache spiegelt sich u.a. darin wider, daß Mathematik für agrarwissenschaftliche und medizinische Fachbereiche scheinpflichtig oder Prüfungsfach geworden ist.

Nun ist die Mathematikausbildung für Nichtmathematiker (gemeint sind in erster Linie Vertreter der eingangs genannten Disziplinen) in mancher Hinsicht problematisch. Viele Studienanfänger sehen nicht richtig ein, warum sie Mathematik lernen sollen. Andererseits sind einer Behandlung der Mathematik z.B. zu Beginn eines Agrarstudiums sowohl vom zeitlichen Umfang als auch von der "Einbettung" in andere, mehr anwendungsbezogene Fächer gewisse Grenzen gesetzt. Notwendige Voraussetzungen für eine Motivation der Studierenden ist unseres Erachtens die Betonung des Anwendungsaspektes und damit einhergehend eine nicht zu starke Abstraktion des Stoffes, natürlich nicht auf Kosten der mathematischen Exaktheit. Anders ausgedrückt: Das Grundsätzliche sollte nur soviel Platz haben wie unbedingt nötig, das Beispielhafte und die Anwendungsbezogenheit soviel Platz wie möglich.

Die vorliegende "Mathematik für Nichtmathematiker" entstand aus Vorlesungen und Übungen, welche die Verfasser an der TU München-Weihenstephan für Studierende der Agrarwissenschaften, des Erwerbsgartenbaues, des Brauwesens, der Lebensmitteltechnologie sowie der Ökotrophologie gehalten haben bzw. halten. Der Inhalt entspricht in etwa einer zweisemestrigen Vorlesung.

Wir haben uns bemüht, den Stoff so darzustellen, daß er auch bei geringeren Mathematik-Vorkenntnissen aus der Schule bewältigt werden kann. Natürlich verlangen die einzelnen Fachrichtungen einen unterschiedlich tiefen Einstieg in die Mathematik. Daher ist der Umfang so gewählt, daß möglichst viele Anforderungen abgedeckt werden. Je nach Bedarf kann sich der Leser seine, für ihn wichtigen Kapitel heraussuchen.

Dieses Skriptum soll den Studenten von einer eigenen Vorlesungsniederschrift weitgehend befreien und ihm somit Gelegenheit geben, dem Vortrag des Dozenten mit kritischer Aufmerksamkeit zu folgen.

Weihenstephan, im Oktober 1978 Manfred Precht
Karl Voit

Vorwort zur 4. Auflage

Die 4. Auflage unterscheidet sich inhaltlich von den vorhergehenden durch die Aufnahme weiterer Beispiele und Übungsaufgaben. Dabei wurde besonderer Wert auf Anwendungen der Mathematik in den biologischen Disziplinen, in einigen Fällen auch in der Physik und der Chemie gelegt. Das Kapitel Kombinatorik wurde unmittelbar vor die Wahrscheinlichkeitsrechnung gestellt, da bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten im Bereich der Glücksspiele bzw. ähnlicher Versuchsanordnungen die Zahl von Zusammenstellungen verschiedener Objekte bestimmt werden muß. Die statistische Fehlerbehandlung wurde herausgenommen und wird an anderer Stelle erscheinen.

Darüberhinaus wurde die vorliegende Auflage in druckreifer Form neu erstellt. Infolgedessen sind Fehler trotz sorgfältiger Korrekturlesung nicht völlig ausgeschlossen. Wir sind für jeden Hinweis sehr dankbar.

Die Verfasser danken Frau Petra Volke für das Tippen von Manuskriptteilen und Herrn Markus Mühlbauer für die Programmierung zur automatischen Erstellung des Sachregisters. Außerdem gilt unser Dank Herrn M. John vom Oldenbourg Verlag für die gute Zusammenarbeit, insbesondere für die Möglichkeit, die 4. Auflage in attraktiver Satzgestaltung mit dem wissenschaftlichen Textformatierungsprogramm LaTeX herauszubringen.

Freising-Weihenstephan, im März 1990

Manfred Precht
Karl Voit
Roland Kraft

Vorwort zur 8. Auflage

Die 8. Auflage ist inhaltlich identisch mit der 7. Auflage. Bekannt gewordene Fehler wurden korrigiert.

Freising-Weihenstephan

Manfred Precht
Karl Voit

Kapitel 1

Grundbegriffe der Mathematik

Das erste Kapitel soll dem Nichtmathematiker elementare Kenntnisse der Mathematik vermitteln und ihn mit der mathematischen Denkweise und Nomenklatur vertraut machen.

1.1 Mengenlehre

Die Mengenlehre ist von grundlegender Bedeutung für zahlreiche Teildisziplinen der Mathematik wie Wahrscheinlichkeitstheorie, Aufbau des Zahlensystems, Funktionsbegriff u.v.m.

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von endlich oder unendlich vielen unterscheidbaren Objekten. Die einzelnen Objekte sind die **Elemente** der Menge. Die Anordnung der Elemente in der Menge ist beliebig.

Eine Menge M kann beschrieben werden, indem man innerhalb geschweifter Klammern ihre Elemente auflistet oder eine definierende Eigenschaft angibt. Im zweiten Fall ist folgende Schreibweise üblich:

$$M = \{x | \text{Eigenschaft der Elemente } x\} \tag{1.1}$$

Gehört ein Element a zu einer Menge M, so schreibt man $a \in M$. Gehört a nicht zu M, so schreibt man $a \notin M$.

Beispiele:

K = Menge aller Karten eines Skatspiels; $\clubsuit\mathrm{D} \in K$
$I\!N$ = Menge aller natürlichen Zahlen $= \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$; $8 \in I\!N$
$I\!N_1$ = Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen $= \{1, 3, 5, \ldots\} =$
$= \{n | n \in I\!N,\ n \text{ ungerade}\} = \{m | m = 2n - 1, n \in I\!N\}$;
$19 \in I\!N_1,\ 8 \notin I\!N_1$
S = Menge aller Bedecktsamer; Rotklee $\in S$
MK = Menge aller monokotylen (einkeimblättrigen) Pflanzenarten;
Knaulgras $\in MK$, Rotklee $\notin MK$

Zwei Mengen M_1 und M_2 sind gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

Die Menge, die kein Element enthält, ist die **leere Menge** oder **Nullmenge**, für die man meistens die Symbole $\emptyset$ oder $\{\}$ verwendet.

Beispiele:

1. *Die Mengen* $A_1 = \{\mathrm{F}, \mathrm{A}, \mathrm{U}, \mathrm{L}\}$ *und* $A_2 = \{\mathrm{L}, \mathrm{A}, \mathrm{U}, \mathrm{F}\}$ *sind gleich, da jedes Element aus* A_1 *auch Element von* A_2 *ist und umgekehrt.*
2. *Die Menge aller männlichen Kühe ist leer.*

Eine Menge M_1 heißt **Teilmenge** einer Menge M, wenn jedes Element von M_1 auch Element von M ist. Andere Sprechweisen sind: "M_1 ist enthalten in M" oder "M ist **Obermenge** von M_1". Man schreibt:

$$M_1 \subseteq M \quad \text{oder} \quad M \supseteq M_1 \tag{1.2}$$

Eine Menge M_2 heißt **echte Teilmenge** einer Menge M, wenn M_2 Teilmenge von M ist, und mindestens ein Element $m \in M$ existiert, das nicht in M_2 enthalten ist, also $m \notin M_2$. Man schreibt dann:

$$M_2 \subset M \quad \text{oder} \quad M \supset M_2 \tag{1.3}$$

Beispiele:

1. *Die Menge* $\mathbb{N}_1$ *aller ungeraden natürlichen Zahlen ist echte Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$: $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$
2. *Beim Pokern ist ein Fullhouse eine Kartenkombination von drei gleichen und zwei gleichen Bildern, beispielsweise drei Damen und zwei Neuner. Alle diese Kombinationen sind echte Teilmengen der Menge aller Karten.*
3. $\mathbb{N}_2 = \{k | k = 2n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$. $\mathbb{N}_2$ *ist die Menge aller geraden natürlichen Zahlen. Diese ist echte Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen.*
4. *Die Menge aller Getreidearten ist echte Teilmenge der Menge aller Bedecktsamer* S *und der Menge aller Monokotylen* MK.
5. *Die Menge* $\mathbb{N}_0$ *der natürlichen Zahlen inklusive der Zahl 0 ist echte Teilmenge der Menge der ganzen Zahlen* $\mathbb{Z} = \{z | z = \pm n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$: $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$
6. *Jede Menge* M *ist unechte Teilmenge von sich selbst. Es gilt:* $M \subseteq M$, *aber* $M \not\subset M$.
7. *Die Nullmenge* $\emptyset$ *ist echte Teilmenge einer jeden Menge, die von der Nullmenge verschieden ist.*

Die Menge aller Teilmengen einer gegebenen Menge M heißt **Potenzmenge** $P(M)$.

Beispiel:

Sei M die Menge aus Kreuz-König und Herz-Dame ($M = \{\clubsuit K, \heartsuit D\}$). Man kann davon die Teilmengen $\{\clubsuit K, \heartsuit D\}$, $\{\clubsuit K\}$, $\{\heartsuit D\}$ und $\emptyset$ bilden. Die Potenzmenge von M ist dann:

$P(M) = \{\emptyset, \{\clubsuit K\}, \{\heartsuit D\}, \{\clubsuit K, \heartsuit D\}\}$

Die **Mächtigkeit** $|M|$ einer Menge M ist die Anzahl ihrer Elemente. Eine Menge M von n Elementen, also eine Menge der Mächtigkeit n, hat 2^n verschiedene Teilmengen.

Beweis:

Für $n = 0$ ist $2^n = 2^0 = 1$ und $M = \emptyset$. Die einzige Teilmenge ist $\emptyset$ selbst. Sei $n \geq 1$ und die Elemente von M in beliebiger Reihenfolge angeordnet. Jedes Element kann in der zu bildenden Teilmenge enthalten sein oder nicht. Es gibt also $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n} = 2^n$ Entscheidungsmöglichkeiten, um eine Teilmenge zu bilden. □

Beispiele:

1. *Im vorhergehenden Beispiel hat die Menge $M = \{\clubsuit K, \heartsuit D\}$ die Mächtigkeit $|M| = 2$. Die Mächtigkeit der Potenzmenge $P(M)$ ist $|P(M)| = 2^2 = 4$.*
2. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}_0| = \infty$

1.1.1 Verknüpfung von Mengen

Die **Schnittmenge** oder der **Durchschnitt** zweier Mengen M_1 und M_2 ($M_1 \cap M_2$ oder $M_1 \cdot M_2$) ist die Menge aller Elemente, die sowohl in M_1 als auch in M_2 enthalten sind (Bild 1.1 a):

$$M_1 \cap M_2 = M_1 \cdot M_2 = \{x | x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\} \tag{1.4}$$

Zwei Mengen, deren Durchschnitt leer ist, heißen **elementfremd** oder **disjunkt**.

Die **Vereinigungsmenge** oder **Vereinigung** von zwei Mengen M_1 und M_2 ($M_1 \cup M_2$ oder $M_1 + M_2$) ist die Menge aller Elemente, die entweder in M_1 oder in M_2 oder in beiden enthalten sind (Bild 1.1 b):

$$M_1 \cup M_2 = M_1 + M_2 = \{x | x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\} \tag{1.5}$$

Die **Differenzmenge** oder **Differenz** zweier Mengen M_1 und M_2 ($M_1 \setminus M_2$ oder $M_1 - M_2$) ist die Menge aller Elemente von M_1, die nicht in M_2 enthalten sind (Bild 1.1 c):

$$M_1 \setminus M_2 = M_1 - M_2 = \{x | x \in M_1 \text{ und } x \notin M_2\} \tag{1.6}$$

Sei M Teilmenge einer Grundmenge E ($M \subseteq E$). Das **Komplement** $\overline{M}$ von M in Bezug auf E ist die Menge aller Elemente, die zu E, aber nicht zu M gehören (Bild 1.1 d):

$$\overline{M}_E = E \setminus M = \{x | x \in E \text{ und } x \notin M\} \tag{1.7}$$

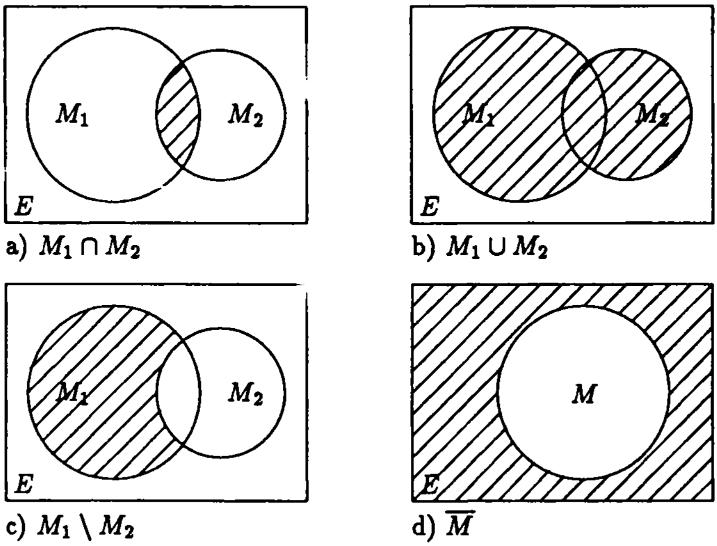

Bild 1.1: Venn-Diagramme zur Verknüpfung von Mengen

Beispiele:

1. $E = \{1, 2, \ldots, 10\}$, $M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M_2 = \{4, 5, 6, 7\}$
$M_1 \cap M_2 = \{4, 5\}$, $M_1 \cup M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $M_1 \setminus M_2 = \{1, 2, 3\}$
$\overline{M_1} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, $\overline{M_2} = \{1, 2, 3, 8, 9, 10\}$

2. $E = \mathbb{Z}$, $M_1 = \mathbb{Z}$, $M_2 = \mathbb{N}$
$M_1 \cdot M_2 = \mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$, $M_1 + M_2 = \mathbb{Z} \cup \mathbb{N} = \mathbb{Z}$
$M_1 - M_2 = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \overline{M_2}$, $\overline{M_1} = \emptyset$

3. $E = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$, $M_1 = \{x | 0 < x < 1\}$, $M_2 = \{0, 1\}$
$M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $M_1 \cup M_2 = E$, $M_1 \setminus M_2 = M_1$
$\overline{M_1} = M_2$, $\overline{M_2} = M_1$

4. *S = Menge aller Bedecktsamer, MK = Menge aller monokotylen Pflanzen, DK = Menge aller dikotylen Pflanzen*
$MK \cap DK = \{\}$, $MK \cup DK = S$, $MK \setminus DK = MK$, $\overline{MK} = DK$, $\overline{DK} = MK$

1.1.2 Mengenalgebra

Man kann die definierten Verknüpfungen und Operationen wiederholt anwenden und somit **Mengenalgebra** betreiben. Es gelten folgende Rechenregeln:

Kommutativgesetze:

$$\begin{aligned} M_1 \cap M_2 &= M_2 \cap M_1 \\ M_1 \cup M_2 &= M_2 \cup M_1 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Assoziativgesetze:

$$\begin{aligned} (M_1 \cap M_2) \cap M_3 &= M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = M_1 \cap M_2 \cap M_3 \\ (M_1 \cup M_2) \cup M_3 &= M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} M_1 \cup (M_2 \cap M_3) &= (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3) \\ M_1 \cap (M_2 \cup M_3) &= (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3) \end{aligned} \tag{1.10}$$

de Morgan-Regeln:

$$\begin{aligned} \overline{M_1 \cup M_2} &= \overline{M_1} \cap \overline{M_2} \\ \overline{M_1 \cap M_2} &= \overline{M_1} \cup \overline{M_2} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Gegeben seien die Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Man bezeichnet die Menge der Elemente, die <u>allen</u> Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ angehören mit

$$M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n = \bigcap_{i=1}^{n} M_i. \tag{1.12}$$

Die Menge der Elemente, die <u>wenigstens</u> zu einer der Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ gehören, wird mit

$$M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n = \bigcup_{i=1}^{n} M_i \tag{1.13}$$

bezeichnet.

Seien A, $M_1, M_2, \ldots, M_n$ Teilmengen einer Grundgesamtheit E. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\overline{M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n} &= \overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \ldots \cap \overline{M_n} \\ \overline{M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n} &= \overline{M_1} \cup \overline{M_2} \cup \ldots \cup \overline{M_n}\end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned}A \cup (M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n) &= (A \cup M_1) \cap (A \cup M_2) \cap \ldots \cap (A \cup M_n) \\ A \cap (M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n) &= (A \cap M_1) \cup (A \cap M_2) \cup \ldots \cup (A \cap M_n)\end{aligned} \tag{1.15}$$

(1.14) ist eine Verallgemeinerung der de Morgan-Gesetze, (1.15) eine Verallgemeinerung der Distributivgesetze.

1.1.3 Kartesische Produktmengen

Wird bei einem Paar von Objekten a, b die Reihenfolge berücksichtigt, so spricht man von einem **geordneten Paar**. Sei z.B. das erste Objekt a, das zweite b, so ist (a, b) ein geordnetes Paar. (a, b) ist also zu unterscheiden von (b, a). Bei einer Menge $\{a, b\}$ kommt es dagegen nicht auf die Reihenfolge an. Es ist egal, ob man schreibt $M = \{a, b\}$ oder $M = \{b, a\}$. Zwei geordnete Paare (a, b) und (c, d) sind gleich, wenn $a = c$ und $b = d$ ist.

Die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in M_1$ und $b \in M_2$ heißt **kartesische Produktmenge** $M_1 \times M_2$:

$$M_1 \times M_2 = \{(a, b) | a \in M_1 \text{ und } b \in M_2\} \tag{1.16}$$

Beispiele:

1. $M_1 = \{1, 2\}$, $M_2 = \{2, 3\}$
   $M_1 \times M_2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$
   $M_2 \times M_1 = \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$
   $M_1 \times M_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$
   Im allgemeinen gilt nicht: $M_1 \times M_2 = M_2 \times M_1$.

2. Wir betrachten Rinder (Fleckviehrinder), die bekanntlich in den Keimzellen einen doppelten Chromosomensatz besitzen, nämlich einen von der mütterlichen und einen von der väterlichen Keimzelle. Es existieren am Genlokus F für die Fellfarbe zwei Allele (Ausprägungen): G = gescheckt, g = einfarbig. Sei $F = \{Gg\}$. Die möglichen Genotypen eines diploiden Rinds können als kartesisches Produkt $F \times F$ aufgefaßt werden, wenn die erste Position die Herkunft des väterlichen und die zweite die des mütterlichen Gens bezeichnet:

   $F \times F = \{(GG), (Gg), (gG), (gg)\}$

Man kann den Begriff der Produktmenge auf sog. **n-Tupel** erweitern. Bei einem n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kommt es ebenso auf die Reihenfolge der n Objekte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ an wie bei einem geordneten Zahlenpaar.

Das Produkt $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ der Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ist die Menge aller n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von Elementen mit $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_n \in M_n$.

Beispiel:

Sei $M = \{\mathtt{K}, \mathtt{W}\}$ (Kopf und Wappen) die Menge aller möglichen Bilder beim Werfen einer Münze. $M \times M \times M$ ist die Menge der Ergebnisse bei einem dreimaligen Münzwurf, also die Menge von geordneten Tripeln:

$M \times M \times M = \{(\mathtt{KKK}), (\mathtt{KKW}), (\mathtt{KWK}), (\mathtt{KWW}), (\mathtt{WKK}), (\mathtt{WKW}), (\mathtt{WWK}), (\mathtt{WWW})\}$

1.1.4 Relationen und Funktionen

Im folgenden werden Teilmengen der Produktmenge $M_1 \times M_2$ betrachtet.

Jede Teilmenge A von $M_1 \times M_2$ heißt eine **Relation** zwischen den Elementen von M_1 und den Elementen von M_2. Ist insbesondere $M_1 = M_2 = M$, d.h. $A \subseteq M \times M$, so spricht man von einer Relation in M.

Für ein Elementpaar $(x, y) \in A \subseteq M_1 \times M_2$ sagt man auch x und y stehen in der Relation A und schreibt xAy (z.B. $x \leq y$).

Beispiel:

Sei $M = \{1, 2, 3\}$, dann ist

$M \times M = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$.

$A = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ *ist eine Relation in M und entspricht der Gleichheitsbeziehung $x = y$.*

Eine Relation A in M heißt **reflexiv**, wenn $(x, x) \in A$ $\forall$ (für alle) $x \in M$, **symmetrisch**, wenn aus $(x, y) \in A$ folgt $(y, x) \in A$ $\forall x, y \in M$ und **transitiv**, wenn aus $(x, y) \in A$ und $(y, z) \in A$ folgt $(x, z) \in A$ $\forall x, y, z \in M$. Eine Relation mit diesen drei Eigenschaften heißt **Äquivalenzrelation**.

Beispiele:

1. *Sei M die Menge der Geraden in einer euklidischen Ebene und*

   $A = \{(g,h) | g \text{ parallel zu } h\}$.

   A ist Äquivalenzrelation.

2. *Sei M die Menge aller Menschen und*

   $A = \{(x,y) | x \text{ ist Vater von } y\}$.

   Hier ist A keine Äquivalenzrelation, da A weder reflexiv, noch symmetrisch, noch transitiv ist.

Spezielle Relationen sind die Abbildungen oder Funktionen.

Eine Relation $f \subseteq M_1 \times M_2$ heißt **Abbildung** oder **Funktion**, wenn sie jedem Element $x \in M_1$ genau ein Element $y \in M_2$ zuordnet. Man spricht auch von einer Abbildung f von M_1 in M_2. Statt $(x,y) \in f$ schreibt man:

$$f : M_1 \rightarrow M_2, \; y = f(x) \tag{1.17}$$

y wird als **Bild** von x, bzw. x als **Urbild** von y bezeichnet. M_1 heißt **Definitionsmenge** oder **Definitionsbereich**, M_2 **Zielmenge** und $\{f(x) | x \in M_1\}$ **Bildmenge** oder **Wertebereich**.

Beispiel:

$M_1 = \mathbb{N}$, $M_2 = \mathbb{Z}$. $f = \{(x,y) | y = -x, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}\}$.
Oder: $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, y = f(x) = -x$. Definitionsbereich ist $\mathbb{N}$, Zielmenge ist $\mathbb{Z}$ und Wertebereich ist $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$.

Aufgaben

1. $M = \{\text{L,O,S}\}$. Bestimmen Sie alle echten Teilmengen von M und die Potenzmenge $P(M)$, die Mächtigkeiten $|M|$ und $|P(M)|$, das Komplement $\overline{M}_E$ in Bezug auf $E = \{\text{A,L,S,O}\}$, sowie $M \cap E$, $M \cup E$, $E \setminus M$.

2. In einer Blutgruppenstudie wurden 6000 Personen untersucht. 2527 hatten das Antigen A, 2234 Antigen B und 1846 kein Antigen.

   a) Stellen Sie diese Beziehungen in einem Venn-Diagramm dar.

   b) Wieviele Personen hatten beide Antigene?

   c) Von den 6000 Personen waren 4816 Rhesus negativ. Wieviele können höchstens den Typ 0 Rhesus negativ haben?

3. In einer Gruppe von 200 Studenten sind 156 Autofahrer, 60 Ökotrophologen, 124 aus Bayern, 46 Autofahrer und Ökotrophologen, 100 Autofahrer und aus Bayern, 40 Ökotrophologen und aus Bayern und 36 Autofahrer, Ökotrophologen und aus Bayern.
   a) Stellen Sie diese Beziehungen durch ein Venn-Diagramm dar.
   b) Wieviele der Studenten sind weder Autofahrer, noch Ökotrophologen, noch aus Bayern?
   c) Wieviele der Studenten sind aus Bayern, die weder Ökotrophologie studieren, noch Auto fahren?
   d) Wieviele der Studenten sind Autofahrer aus Bayern, die nicht Ökotrophologie studieren?
4. Bei Erbsen sind am Genlocus S für die Schotenform die Allele G = glatt und g = gerunzelt, am Locus BF für die Blütenfarbe die Allele R = rot und r = weiß, und am Locus SF für die Schotenfarbe die Allele B = grün und b = gelb vorhanden.
   a) Bilden Sie alle 3-Tupel (Tripel) aus $S \times BF \times SF$.
   b) Zeigen Sie, daß die Relation $f = \{(\mathrm{Rb}), (\mathrm{rB})\} \subset BF \times SF$ eine Funktion ist und bestimmen Sie Definitionsbereich, Zielmenge und Wertebereich.
   c) Ist f eine Äquivalenzrelation?

Lösungen

1. Die echten Teilmengen von M sind:

   $\emptyset, \{\mathrm{L}\}, \{\mathrm{O}\}, \{\mathrm{S}\}, \{\mathrm{L,O}\}, \{\mathrm{L,S}\}, \{\mathrm{O,S}\}$

   Die Potenzmenge ist die Menge obiger Mengen inklusive der Menge M selbst, da sie ebenfalls Teilmenge (unechte) von sich selbst ist.

   $|M| = 3$, $|P(M)| = 2^3 = 8$, $\overline{M}_E = \{A\}$, $M \cap E = M$, $M \cup E = E$, $E \setminus M = \{A\}$.
2. A: Antigen A, B: Antigen B, AB: Antigen A und B, O: kein Antigen
   a) $|E| = 6000$, $|A| = 2527$, $|B| = 2234$, $|O| = 1846$, $|A + B| = |E| - |O| = 4154$ (vgl. Bild 1.2)
   b) $|A + B| = |A| + |B| - |A \cdot B|$, $|A \cdot B| = 2527 + 2234 - 4154 = 607$
   c) Da $|O| = 1846$, können auch nur höchstens so viele die Blutgruppe 0 Rhesus negativ haben.

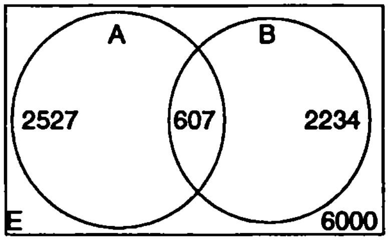

Bild 1.2: Venn-Diagramm für die Blutgruppen

3. A: Autofahrer, B: Bayern, $\ddot{O}$: Ökotrophologen

   a) $|A \cdot B \cdot \ddot{O}| = 36$, $|B \cdot \ddot{O}| = 40$, $|A \cdot B| = 100$, $|A \cdot \ddot{O}| = 46$, $|A| = 156$, $|B| = 124$, $|\ddot{O}| = 60$ (vgl. Bild 1.3)

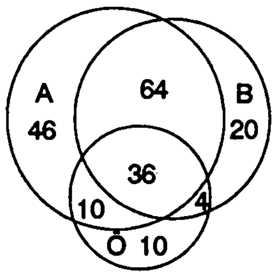

Bild 1.3: Venn-Diagramm für die Studenten

   b) $|\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{\ddot{O}}| = |\overline{A + B + \ddot{O}}| = 10$

   c) $|B \cdot \overline{\ddot{O}} \cdot \overline{A}| = 20$

   d) $|A \cdot B \cdot \overline{\ddot{O}}| = 64$

4. a) (GRB),(GRb),(GrB),(Grb),(gRB), (gRb),(grB),(grb)

   b) f(R) = b und f(r) = B. f ordnet also jedem Element aus BF genau ein Element aus SF zu. Definitionsbereich ist BF, Zielmenge SF und Wertebereich SF.

   c) f ist keine Äquivalenzrelation, da Definitions- und Zielmenge verschieden sind.

1.2 Verknüpfung von Aussagen

Viele mathematische Sätze werden als **Verknüpfungen logischer Aussagen** geschrieben. Jede logische Aussage ist entweder wahr oder falsch. Eine dritte Möglichkeit gibt es nicht. Wenn eine logische Aussage A wahr ist, sagt man: A ist richtig oder A gilt.

Beispiele:

Wahre logische Aussagen:

Alle Säugetiere sind lebendgebärend
Alle Pferde sind Säugetiere
Freising ist eine Stadt in Bayern
16 ist eine Quadratzahl

Falsche logische Aussagen:

Alle lebendgebärenden Tiere sind Säugetiere
Es gibt ein Pferd, das kein Säugetier ist
Kiel ist eine Stadt in Hessen
5 ist eine gerade Zahl

Logische Aussagen, die Variablen enthalten:

C : x ist eine Quadratzahl
D : Die Quadratwurzel aus x existiert und ist eine ganze Zahl
E : x ist eine positive ganze Zahl
F : $y = z$
G : $y^2 = z^2$
H : Die Person N ist Vater
I : Die Person N ist männlich

Aussagen mit Variablen kann erst ein Wahrheitswert zugewiesen werden, wenn der Wert der Variablen bekannt ist. C ist beispielsweise richtig für $x = 9$ und falsch für $x = 5$.

Sprachliche Gebilde, bei denen es nicht sinnvoll ist zu fragen, ob sie wahr oder falsch sind, stellen <u>keine</u> logischen Aussagen dar, z.B. "Nachts ist es kälter als draußen".

Ist A eine Aussage, so ist die Aussage $\overline{A}$ (oder $\neg A$, i.W. nicht A) diejenige Aussage, die wahr ist, wenn A falsch ist, und falsch ist, wenn A wahr ist. Für die logischen Aussagen A und B werden die Verknüpfungen $A \vee B$ (A oder B), $A \wedge B$ (A und B), $A \Rightarrow B$ (aus A folgt B) und $A \Leftrightarrow B$ (A äquivalent B) gemäß folgender Wahrheitswertetafel (w = wahr, f = falsch) erklärt:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	f
f	f	f	f	w	w

Die Verknüpfung $A \Rightarrow B$ wird als **logische Implikation** (Folgerung) bezeichnet. Es sind folgende Sprechweisen üblich: "aus A folgt B", "A impliziert B", "wenn A gilt, dann gilt auch B", "A ist eine **hinreichende Bedingung** für B", "B ist eine **notwendige Bedingung** für A". Aus obiger Tabelle ist ersichtlich, daß $A \Rightarrow B$ nur dann falsch ist, wenn A wahr und B falsch ist (aus etwas Wahrem kann nichts Falsches folgen).

Es gilt folgender Satz:

$$\begin{array}{l} \text{Wenn } A \Rightarrow B \text{ und } B \Rightarrow C, \text{ so gilt } A \Rightarrow C \\ A \Rightarrow B \text{ ist gleichwertig mit } \neg B \Rightarrow \neg A \end{array} \tag{1.18}$$

Satz (1.18) ist mittels einer **Wahrheitstafel** leicht zu verifizieren.

In den Sätzen der Mathematik kommt die Implikation nur zwischen Aussagen vor, die eine oder mehrere Variable enthalten. Dabei kann eine zusammengesetzte Aussage wahr sein, obwohl der Wahrheitswert der einzelnen Aussagen wegen der Variablen nicht bekannt zu sein braucht.

Beispiel:

Mit den auf Seite 13 angeführten Aussagen sind folgende Implikationen richtig bzw. falsch:

richtig	falsch
$C \Rightarrow D$	
$C \Rightarrow E$	$E \Rightarrow C$
$D \Rightarrow C$	
$D \Rightarrow E$	$E \Rightarrow D$
$F \Rightarrow G$	$G \Rightarrow F$
$H \Rightarrow I$	$I \Rightarrow H$

Die Richtigkeit einer Folgerung muß bewiesen werden, indem man zeigt, daß für alle Werte der Variablen, bei denen die linksstehende Aussage richtig ist, auch die rechtsstehende Aussage richtig ist. Für die Falschheit einer Folgerung genügt es, ein Gegenbeispiel anzugeben.

Beispiel:

$E \Rightarrow C$ ist falsch, da für $x = 5$ gilt: x ist eine ganze positive Zahl, d.h. E ist richtig, aber x ist keine Quadratzahl, d.h. C ist falsch.

Die Verknüpfung $A \Leftrightarrow B$ ist eine abgekürzte Schreibweise für $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$. Sprechweisen für äquivalente Aussagen sind: "B gilt genau dann, wenn A gilt", "B gilt dann und nur dann, wenn A gilt", "B ist notwendige und hinreichende Bedingung für A". Dabei kann A und B auch vertauscht werden.

Beispiel:

Mit den Aussagen im Beispiel auf Seite 13 gilt $C \Rightarrow D$ und $D \Rightarrow C$, also $C \Leftrightarrow D$.

1.3 Beweisverfahren in der Mathematik

1.3.1 Der direkte Beweis

Es soll bewiesen werden, daß aufgrund einer Voraussetzung A eine Aussage B folgt. Man geht davon aus, daß A wahr ist (ist A falsch, dann ist $A \Rightarrow B$ immer wahr) und zieht der Reihe nach richtige Schlüsse, bis schließlich B gefolgert ist: $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_n \Rightarrow B$. Nach Gleichung (1.18) gilt dann nämlich $A \Rightarrow B$.

Beispiele:

1. *Behauptung:*
   p gerade $\Rightarrow p^2$ ist auch gerade.

   Beweis:
   $p = 2x$ mit $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow p^2 = 4x^2 = 2(2x^2)$, d.h. p^2 ist gerade.
2. *Behauptung:*
   p ungerade $\Rightarrow p^2$ ist auch ungerade.

   Beweis:
   $p = 2x + 1$ mit $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow p^2 = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 = 2(2x^2 + 2x) + 1$, d.h. p^2 ist ungerade.
3. *Behauptung:*
   Zu jeder endlichen Menge von Primzahlen kann man eine weitere Primzahl hinzufügen.
   Beweis:
   $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sei eine endliche Menge von Primzahlen. Man bilde $q = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Die Zahl q ist durch keine der Primzahlen p_i teilbar, da immer ein Rest 1 übrigbleibt. q ist nun entweder selber eine Primzahl oder läßt sich in Primfaktoren zerlegen, die nicht in der Ausgangsmenge enthalten sind. Also hat man durch die Konstruktion auf jeden Fall eine weitere Primzahl gefunden.

1.3.2 Der indirekte Beweis

Es soll die Aussage A bewiesen werden. Man nimmt an, A gilt nicht, d.h. $\overline{A}$ gilt, und versucht, durch eine Reihe richtiger Schlüsse zu einem Widerspruch zu kommen. Der Widerspruch ist dann eine Folge der Annahme von $\overline{A}$, d.h. $\overline{A}$ ist falsch oder A ist richtig.

Beispiele:

1. *Behauptung:*
   p^2 ist gerade $\Rightarrow p$ ist auch gerade.

   Annahme:
   p ist ungerade. Nach obigem Beispiel ist dann auch p^2 ungerade. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

2. *Behauptung:*
   $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

   Annahme:
   $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ *(p, q ganze, teilerfremde Zahlen).* $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$, *also* p^2 *gerade* $\Rightarrow p$ *gerade, d.h.* $p = 2p'$. $2q^2 = p^2 = 4p'^2 \Rightarrow q^2 = 2p'^2$, *also* q^2 *gerade* $\Rightarrow q$ *gerade, d.h.* $q = 2q'$. *p und q sind also nicht teilerfremd* $\Rightarrow$ *Widerspruch!*

1.3.3 Die vollständige Induktion

Eine wichtige Eigenschaft der natürlichen Zahlen ist der Satz von der **vollständigen Induktion**:

Eine Aussage A enthalte eine allgemeine natürliche Zahl n und sei richtig für ein bestimmtes $n_0 \in \mathbb{N}$. Folgt aus der Annahme, A gilt für n, daß A dann auch für $n+1$ zutrifft, so gilt A für alle natürlichen Zahlen $\geq n_0$. Wenn man die Gültigkeit des Satzes in Bezug auf eine bestimmte Aussage nachgewiesen hat, dann heißt das: Die Aussage gilt für n_0, also auch für $n_0 + 1$, für $n_0 + 2$, $n_0 + 3$, usw., denn die Aussage ist, wenn sie für n gilt, auch für $n+1$ richtig.

Beispiel:

Die Summe der Quadrate der ersten n natürlichen Zahlen ist:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = 1 + 4 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Induktionsanfang $n_0 = 1$:

$$1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$$

Induktionsannahme:

$$1 + 4 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Induktionsschluß $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
1 + 4 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} = \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$