Grundgebiete der Elektrotechnik 1

Gleichstromnetze, Operationsverstärkerschaltungen, elektrische und magnetische Felder

von

Prof. Dr.-Ing. Horst Clausert
Prof. Dr.-Ing. Gunther Wiesemann
Prof. Dr.-Ing. Volker Hinrichsen
Prof. Dr.-Ing. Jürgen Stenzel

11., korrigierte Auflage

Oldenbourg Verlag München

Prof. Dr.-Ing. Horst Clausert lehrt seit 1982 an der Technischen Universität Darmstadt am Institut für Nachrichtentechnik. Die vorausgehenden Stationen seiner Berufstätigkeit waren 1966/67 die University of Surrey (England), von 1967 bis 1970 die Siemens AG, von 1970 bis 1974 die Technische Universität Clausthal und für die Jahre 1974 bis 1982 die Universität-Gesamthochschule Wuppertal.

Prof. Dr.-Ing. Gunther Wiesemann war von 1974 bis 2001 Professor im Fachbereich Elektrotechnik der Fachhochschule Braunschweig/Wolfenbüttel; seit 2001 ist er dort weiterhin als Lehrbeauftragter tätig. Er ist Autor bzw. Mitautor einer Reihe von Lehr- und Übungsbüchern.

Prof. Dr.-Ing. Volker Hinrichsen ist seit 2001 Universitätsprofessor für das Fachgebiet Hochspannungstechnik an der TU Darmstadt. Nach dem Studium der Elektrotechnik an der TU Berlin arbeitete er bis 1989 als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Hochspannungstechnik und Starkstromanlagen der TU Berlin, wo er 1990 promoviert wurde. 1989 ging er in die Industrie als Prüffeldingenieur der Siemens AG. Dort leitete er anschließend von 1992 bis zu seinem Ausscheiden im Juli 2001 die Entwicklungsabteilung für Überspannungsableiter.

Prof. Dr.-Ing. Jürgen Stenzel war seit 1987 bis zu seiner Pensionierung 2009 Universitätsprofessor an der Technischen Universität Darmstadt für das Fachgebiet Systemführung in Energieversorgungsnetzen. Nach dem Studium der Elektrotechnik an der TU Berlin und TU München war er von 1970 bis 1979 als wiss. Mitarbeiter bei Brown, Boveri & Cie tätig. Von 1979 bis 1986 war er wissenschaftlicher Assistent im Fachbereich Elektrotechnik der Universität GH Siegen. Dort wurde er 1984 promoviert.

Coverbild: Algorithmic Art 11-#1 by tw – a parallel plate capacitor - calculated with CST EM-STUDIO®
© Prof. Dr.-Ing. Thomas Weiland, Darmstadt

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
www.oldenbourg-verlag.de

Lektorat: Julia Multerer
Herstellung: Constanze Müller
Einbandgestaltung: hauser lacour
Gesamtherstellung: Grafik + Druck, München

Dieses Papier ist alterungsbeständig nach DIN/ISO 9706.

ISBN 978-3-486-59719-6

Vorwort zur elften Auflage

Die beiden Bände Grundgebiete der Elektrotechnik der Autoren Clausert und Wiesemann als Standardwerk für die Ausbildung der Studierenden der Elektrotechnik erfreuen sich weiterhin großer Beliebtheit, so dass wieder eine unveränderte Neuauflage erforderlich wird.

Trotz sorgfältigen Lesens der Korrekturfahnen für die 10. Auflage haben sich einige Druckfehler nicht vermeiden lassen. Sie wurden für die 11. Auflage korrigiert. Den Studierenden, die uns auf die Fehler aufmerksam gemacht haben, sei an dieser Stelle gedankt.

Das Literaturverzeichnis bedurfte einer Überarbeitung. Etliche zitierte Werke sind im Handel nicht mehr erhältlich und damit den Studierenden schwer zugänglich. Trotzdem haben wir diese Literaturstellen nicht gestrichen. Viele Lehrbücher sind allerdings inzwischen in neuen Auflagen erschienen, so dass wir so weit möglich die Hinweise aktualisiert haben.

Dem Oldenbourg Verlag danken wir für die sehr angenehme Zusammenarbeit.

Darmstadt im März 2011 J. Stenzel, V. Hinrichsen

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage

In dem vorliegenden ersten Band behandeln wir die elektrischen Netze bei Gleichstrom und elektrische und magnetische Felder. Ein folgender zweiter Band wird der Wechselstromlehre und den Ausgleichsvorgängen gewidmet sein. Dem Lehrbuchcharakter entsprechend enthält jeder wichtige Abschnitt einige Beispiele. Diese sind fast alle als Aufgaben formuliert (mit den zugehörigen, oft recht ausführlichen Lösungen) und früheren Klausuren entnommen worden. Einige Beispiele stellen Ergänzungen des Vorlesungsstoffes dar und können beim ersten Durcharbeiten des Buches übersprungen werden.

Das Buch wendet sich in erster Linie an Studierende der Elektrotechnik, aber auch in der Praxis stehende Ingenieure werden aus dem Buch Nutzen ziehen – vielleicht gerade wegen der vielen Beispiele. Der Leser sollte mit den Grundbegriffen der Differential- und Integralrechnung vertraut sein. Die anspruchsvolleren Hilfsmittel der Feldtheorie dagegen werden nicht vorausgesetzt, sondern – soweit sie hier schon erforderlich sind – im Text erläutert.

Zum Schluss sprechen wir all denen unseren Dank aus, die zum Gelingen des Buches beigetragen haben. Der erstgenannte Verfasser dankt besonders Frau Bauks, die die Reinschrift seines Beitrags zu diesem Buch angefertigt hat, sowie Herrn cand. ing. Butscher für das Entwerfen und Zeichnen eines großen Teils der Bilder. Schließlich möchte er nicht versäumen, an dieser Stelle seines Lehrers Herbert Buchholz (1895–1971) zu gedenken, dessen Darmstädter Vorlesungen die Abschnitte über Felder in mancher Hinsicht beeinflusst haben. Der zweitgenannte Verfasser dankt seiner Frau für das sorgfältige Schreiben seines Manuskripts. Dem Verlag gebührt unser Dank für die gute Zusammenarbeit.

Wuppertal, Braunschweig
im Juli 1978

H. Clausert
G. Wiesemann

Inhalt

0. Einheiten und Gleichungen

0.1 Einheitensysteme

0.1.1 Maßsysteme

Um eine physikalische Größe messen zu können, muss man eine Einheit dieser Größe willkürlich festlegen. Messen heißt dann, dass eine Zahl bestimmt wird, die angibt, wie oft die gewählte Einheit in der zu messenden Größe enthalten ist.

Wegen der bestehenden physikalischen Gesetze, die einen Zusammenhang zwischen den physikalischen Größen herstellen, lässt sich die Anzahl der willkürlich festzulegenden Einheiten auf wenige Grundeinheiten beschränken. So sind zur Beschreibung mechanischer Vorgänge drei Basiseinheiten erforderlich. In der Elektrizitätslehre definiert man zweckmäßigerweise zusätzlich eine vierte Basiseinheit und bei Einbeziehung thermischer Vorgänge schließlich noch eine fünfte Basiseinheit. Je nach der Wahl der Grundgrößen, für die Einheiten festzulegen sind, erhält man verschiedene Maßsysteme.

In der Elektrotechnik hat sich das **MKSA-System** weitgehend durchgesetzt, das von den Grundgrößen Länge, Masse, Zeit und Stromstärke ausgeht. Außerdem wird zur Beschreibung thermischer Vorgänge die Temperatur als fünfte Grundgröße gebraucht.

Die Einheiten dieser fünf Grundgrößen sind Bestandteil des internationalen Einheitensystems oder SI-Systems (Système International).

0.1.2 Die Basiseinheiten

Die für die Elektrotechnik wichtigen Basiseinheiten des SI-Systems sind wie folgt definiert (DIN 1301):

1. Die Länge: 1 Meter (= 1 m) ist die Strecke, die das Licht im Vakuum während 1/299792458 s durchläuft.

2. Die Masse: 1 Kilogramm (= 1 kg) ist bestimmt durch die Masse des in Sèvres aufbewahrten »Urkilogramms«.

3. Die Zeit: 1 Sekunde (= 1 s) ist das 9192631770fache der Periodendauer der Strahlung beim Übergang zwischen zwei bestimmten Energieniveaus des Atoms von Cäsium 133.

4. Die Stromstärke: 1 Ampere (= 1 A) ist definiert durch die Stärke eines zeitlich konstanten Stromes durch zwei geradlinige, parallele, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem Querschnitt, die einen Abstand von 1 m haben und zwischen denen die durch den Strom hervorgerufene Kraft im leeren Raum pro 1 m Leitungslänge $2 \cdot 10^{-7}$ mkg/s^2 beträgt.

5. Die Temperatur: 1 Kelvin (= 1 K) ist der 273,16te Teil der Differenz zwischen der Temperatur des absoluten Nullpunkts und der Temperatur, bei der die drei Zustandsformen des Wassers gleichzeitig auftreten (Tripelpunkt).

Der Zusammenhang zwischen Kelvintemperatur T und Celsiustemperatur ϑ ist gegeben durch

$$\vartheta = T - 273{,}15\,\mathrm{K}$$

Die Bezeichnung MKSA-System soll auf die Basiseinheiten Meter (m), Kilogramm (kg), Sekunde (s) und Ampere (A) hinweisen.

0.1.3 Einige abgeleitete Einheiten

1. Die Kraft:
Wegen des Zusammenhangs Kraft = Masse × Beschleunigung definiert man:

$$1\,\mathrm{kg} \cdot 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1\,\mathrm{Newton} = 1\,\mathrm{N}$$

Die Kraft 1 Newton erteilt also der Masse 1 kg die Beschleunigung $1\,\mathrm{m/s^2}$

2. Arbeit, Energie, Leistung:
Für die Einheit der Arbeit = Kraft × Weg schreibt man:

$$1\,\mathrm{N} \cdot 1\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{Joule} = 1\,\mathrm{J}$$

Demnach muss eine Arbeit von 1 J aufgewendet werden, wenn ein Körper mit der Kraft 1 N um 1 m verschoben wird.

Die Leistung = Arbeit pro Zeit erhält die Einheit

$$\frac{1\,\mathrm{Nm}}{1\,\mathrm{s}} = \frac{1\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{Watt} = 1\,\mathrm{W}$$

3. Wärmemenge:
Da es sich bei der Wärmemenge um eine Energie handelt, braucht keine neue Einheit definiert zu werden. Häufig begegnet man noch der älteren Einheit Kalorie (cal). Mit einer Kalorie ist diejenige Energie gemeint, die man braucht, um l g Wasser von 14,5 °C auf 15,5 °C zu erwärmen. Experimentell ergibt sich der Zusammenhang

1 cal ≈ 4,186 Ws.

In vielen praktischen Fällen sind die bis jetzt eingeführten Einheiten unhandlich. Sie sind zu groß oder zu klein. Dann kann man vor die Einheit eines der nachfolgend angegebenen Vorsatzzeichen setzen:

Y	Yotta	10^{24}
Z	Zetta	10^{21}
E	Exa	10^{18}
P	Peta	10^{15}
T	Tera	10^{12}
G	Giga	10^{9}
M	Mega	10^{6}
k	Kilo	10^{3}
h	Hekto	10^{2}
da	Deka	10^{1}

d	Dezi	10^{-1}
c	Zenti	10^{-2}
m	Milli	10^{-3}
µ	Mikro	10^{-6}
n	Nano	10^{-9}
p	Piko	10^{-12}
f	Femto	10^{-15}
a	Atto	10^{-18}
z	Zepto	10^{-21}
y	Yocto	10^{-24}

0.2 Schreibweise von Gleichungen

0.2.1 Größengleichungen

Gleichungen werden in der Elektrotechnik im Allgemeinen als Größengleichungen geschrieben. Gleichungen dieser Form haben den Vorteil, dass sie für beliebige Einheiten richtig sind. Man hat dabei die physikalische Größe als Produkt aus Zahlenwert und Einheit in die Gleichung einzusetzen. Man schreibt z. B. für das Formelzeichen *a:*

$$a = \{a\} \cdot [a]$$

wobei $\{a\}$ den Zahlenwert der Größe a bedeutet und $[a]$ ihre Einheit. Zahlenwert und Einheit sind wie algebraische Größen zu behandeln.

Als Beispiel sei hier der Ausdruck für die Energie angegeben, die aufzuwenden ist, um einen Körper der Masse m und der spezifischen Wärme c um die Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta$ zu erwärmen:

$$W = \mathrm{c} \cdot \mathrm{m} \cdot \Delta\vartheta$$

Die Anwendung dieser Gleichung führt immer zu richtigen Ergebnissen, wenn man nur jede der Größen W, c, m, $\Delta\vartheta$ als Produkt aus Zahlenwert und Einheit auffasst. Beim Zusammenfassen der Einheiten auf der rechten Seite der Gleichung muss sich eine Energieeinheit ergeben. Das Rechnen mit Größengleichungen hat demnach auch den Vorteil, dass Fehler durch Einheitenkontrolle gefunden werden können.

0.2.2 Zahlenwertgleichungen

Früher wurden in der Physik und Technik sehr oft statt der Größengleichungen die unzweckmäßigeren Zahlenwertgleichungen benutzt. In diesen Gleichungen bedeuten die Formelzeichen reine Zahlenwerte. Solche Gleichungen liefern nur dann richtige Ergebnisse, wenn die eingesetzten Werte in ganz bestimmten Einheiten gemessen werden. Eine der Gleichung in 0.2.1 entsprechende Zahlenwertgleichung sieht z. B. so aus:

$$W = 4{,}186\,\mathrm{c} \cdot \mathrm{m} \cdot \Delta\vartheta$$

Hier wird vorausgesetzt, dass c in cal/(g·K), *m* in g und $\Delta\vartheta$ in K bekannt sind. Dann liefert die Formel nach Einsetzen der Zahlenwerte die Anzahl der Wattsekunden, die für den Erwärmungsvorgang gebraucht werden.

0.2.3 Der Begriff Dimension

Will man deutlich machen, in welcher Form die Grundgrößen in die abgeleiteten Größen eingehen, so verwendet man den Begriff Dimension (dim) und schreibt z. B. für die Geschwindigkeit *v* als Quotient aus dem Weg *l* und der Zeit *t*:

$$\dim(v) = \frac{\dim(l)}{\dim(t)}$$

1. Grundlegende Begriffe

1.1 Die elektrische Ladung

Bestimmte elektrische Phänomene, die man mit einem geriebenen Bernsteinstab vorführen kann, sind schon seit dem Altertum bekannt. Das griechische Wort für Bernstein (= Elektron) hat der Elektrizität ihren Namen gegeben. Elektrizität kann nicht direkt begriffen werden. Sie ist nur durch ihre Erscheinungen erkennbar. Von einem geriebenen Bernsteinstab berührte Holundermarkkügelchen stoßen sich untereinander ab. Werden sie anschließend in die Nähe eines geriebenen Glasstabes gebracht, so zieht er sie zunächst an, stößt sie nach der Berührung jedoch ab. Diese Beobachtungen lassen sich nicht mit den aus der Mechanik bekannten Gravitationskräften erklären. Vielmehr handelt es sich hier um die Wirkungen einer neuen Größe, die man die **elektrische Ladung** nennt. Da zwischen Ladungen anziehende und abstoßende Kräfte auftreten können, muss es zwei verschiedene Ladungsarten bzw. Ladungen mit unterschiedlichen Vorzeichen geben. Willkürlich ordnet man den Ladungen eines geriebenen Glasstabes das positive Vorzeichen zu, den Ladungen eines geriebenen Bernsteinstabes das negative Vorzeichen. Damit lässt sich die oben beschriebene Erfahrungstatsache so formulieren: Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an.

Ladungen lassen sich nicht in beliebig kleine Teilladungen aufteilen. Es gibt vielmehr eine kleinste Ladungsmenge, die so genannte **Elementarladung** e. Eine beliebige Ladung ist immer ein ganzzahliges Vielfaches dieser Elementarladung:

$$Q = n \cdot e \qquad (n = 1, 2, \ldots \infty) \tag{1.1}$$

Das Atom besteht aus einem Kern und einer Hülle. Den Kern bilden **Protonen,** die jeweils die Ladung $+e$ tragen, und **Neutronen,** die – wie die Bezeichnung schon andeutet – ungeladen sind. Die den Kern auf sieben Schalen umkreisenden **Elektronen,** die alle die Ladung $-e$ haben, stellen die Atomhülle dar. Die Ladungen von Kern und Hülle sind gleich groß, jedoch von entgegengesetztem Vorzeichen, so dass das Atom insgesamt elektrisch neutral ist. Als Träger der Masse des Atoms ist im Wesentlichen der Kern anzusehen, da die Elektronen eine etwa 1840 mal kleinere Masse als die Protonen und die Neutronen besitzen. Das hier skizzierte Atommodell geht auf die Vorstellungen Bohrs zurück und wird wegen der nahe liegenden Analogie als Bohrsches Planetenmodell des Atoms bezeichnet.

Die Elektronen eines Atoms sind um so stärker an den Kern „gebunden“, je geringer der Abstand zwischen Kern und Elektron ist. Bei manchen Stoffen lassen sich Elektronen der äußersten Schale wegen der geringeren Bindekräfte aus dem Atomverband herauslösen. Es entsteht ein positives **Ion** (= Kation). Nimmt dagegen die äußerste Schale Elektronen auf, so erhält man ein negatives Ion (= Anion).

1.2 Der elektrische Strom

Der Strom kann mit einer Flüssigkeitsmenge verglichen werden, die innerhalb einer bestimmten Zeit einen gegebenen Querschnitt durchströmt. Die Stärke der Strömung charakterisiert man durch den Quotienten aus Menge und Zeit und nennt ihn die Stromstärke oder einfach den Strom. Zusätzlich ist der Strom durch seine Richtung gekennzeichnet. Entsprechend definiert man den **elektrischen Strom:**

$$\boxed{I_m = \frac{\Delta Q}{\Delta t}} \,. \tag{1.2}$$

Dabei bedeuten ΔQ die innerhalb des Zeitraums Δt durch den betrachteten Querschnitt hindurchtretende Ladung und I_m die mittlere Stromstärke während des Zeitraums Δt. Wenn zu gleichen Zeitintervallen Δt unterschiedliche Ladungen gehören, gibt man den Augenblickswert des Stromes an:

$$\boxed{i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}} \,. \tag{1.3}$$

Löst man die Gl. (1.2) nach der Ladung auf erhält man die während des Zeitraums Δt transportierte Ladung:

$$\Delta Q = I_m \Delta t \,. \tag{1.4}$$

Ist die Stromstärke während des Zeitraums Δt konstant, so schreibt man an Stelle des Mittelwertes I_m einfach I:

$$\boxed{\Delta Q = I \Delta t} \,. \tag{1.5}$$

Bei beliebigem zeitlichen Verlauf des Stromes kann die Ladung, die zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 durch den betrachteten Querschnitt hindurchtritt, wegen Gl. (1.3) durch folgende Integration bestimmt werden:

$$\boxed{Q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)dt} \,. \tag{1.6}$$

Zeitlich konstante Größen werden durch große Buchstaben gekennzeichnet (z. B. Strom I), zeitlich veränderliche Größen dagegen durch kleine Buchstaben (z. B. Strom i).

Die durch die Gln. (1.2) bis (1.6) beschriebenen Zusammenhänge werden in Bild 1.1 veranschaulicht, und zwar einmal für einen zeitlich konstanten Strom, man spricht hier von einem **reinen Gleichstrom**. Im anderen Fall ist der Strom eine periodische Funktion mit der Periode T, wobei innerhalb dieser Periode genau so viel Ladung in der einen wie in der anderen Richtung, im Mittel also gar keine Ladung transportiert wird. Einen solchen Strom nennt man einen **reinen Wechselstrom**.

Da die Einheiten des Stromes und der Zeit in dem verwendeten Maßsystem bereits festgelegt sind, wird die Einheit der Ladung eine abgeleitete Einheit. Mit Gl. (1.5) erhält man

$$[\Delta Q] = [I][\Delta t] = 1\,\mathrm{A} \cdot 1\,\mathrm{s} \,.$$

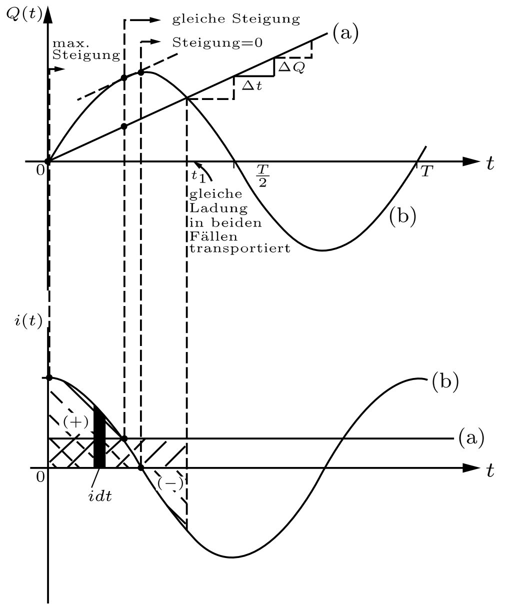

Bild 1.1 *Zusammenhang zwischen transportierter Ladung und Stromstärke.*
(*a*) *reiner Gleichstrom*
(*b*) *reiner Wechselstrom*

Damit ist eine mögliche Einheit der Ladung 1 Amperesekunde. Da diese Einheit häufig vorkommt, hat sie einen speziellen Namen erhalten:

$$1\ \text{As} = 1\ \text{Coulomb} = 1\ \text{C}\ .$$

Die Ladungseinheit erlaubt nun auch die Angabe der Größe der **Elementarladung**, d. h. des Elektrons:

$$e = 1{,}60217733 \cdot 10^{-19}\,\text{C}\ .$$

Dem elektrischen Strom ist willkürlich eine Richtung zugeordnet worden: Man betrachtet die Bewegungsrichtung positiver Ladungsträger als die positive Stromrichtung und spricht auch von der **konventionellen** oder **technischen Stromrichtung.** Die Bewegungsrichtung der negativen Elektronen z. B. in einer Elektronenröhre stimmt dann also nicht mit der konventionellen Stromrichtung überein (Bild 1.2).

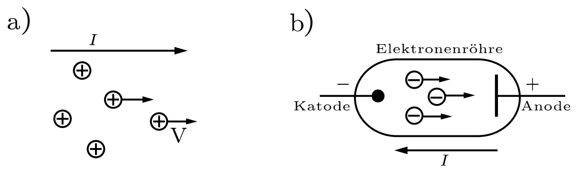

Bild 1.2 *a) Konventionelle Stromrichtung; b) Bewegungsrichtung der Elektronen* in einer Elektronenröhre.

Man teilt die Stoffe nach ihrer Fähigkeit, den Strom zu leiten, in **Leiter, Nichtleiter** und **Halbleiter** ein. Zu den Leitern gehören die Metalle und die Elektrolyte (Säuren und Salzlösungen). Bei diesen Stoffen sind die Ladungsträger frei beweglich. Halbleiter unterscheiden sich in dieser Hinsicht nicht von den Leitern, nur ist die Dichte der frei beweglichen Ladungsträger um Zehnerpotenzen geringer. Beispiele für Halbleiter sind Silizium, Germanium, Selen. Nichtleiter besitzen dagegen keine frei beweglichen Ladungsträger. Hier sind nur geringe Ladungsverschiebungen oder Drehungen (bei Dipolen) möglich. Als Beispiele für Nichtleiter seien genannt: Porzellan, Gummi, Hartpapier.

Die frei beweglichen Ladungsträger in Metallen bewegen sich ungeordnet auf Zickzackbahnen („Elektronengas", „Elektronenwolke"). Ein Strom durch den Leiter kommt erst zustande, wenn sich dieser statistisch verteilten Bewegung eine Bewegung in einer Vorzugsrichtung überlagert (Driftbewegung).

Der elektrische Strom ist im Wesentlichen durch drei Wirkungen gekennzeichnet:

1. Jeder Strom ist von einem Magnetfeld begleitet (Bild 1.3). Seine Wirkung lässt sich z. B. zur Messung durch ein Drehspulinstrument auswerten.
2. Der Stromfluss ist vor allem bei den Elektrolyten mit einem Stofftransport verbunden. Früher wurde die Einheit der Stromstärke durch das sog. „Silberampere" definiert, d. h. durch die bei Stromfluss innerhalb einer gewissen Zeit aus einer Silbersalzlösung ausgeschiedene Menge Silber.
3. Ein von einem Strom durchflossener Leiter erwärmt sich. Diese Wirkung wird bei der Strommessung durch Hitzdrahtamperemeter ausgenutzt.

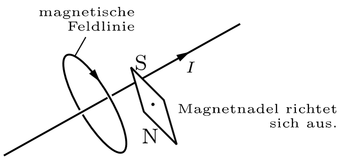

Bild 1.3 *Magnetische Wirkung des elektrischen Stromes.*

Beispiel 1.1
Geschwindigkeit freier Elektronen im Leiter

Durch einen Kupferdraht mit dem Querschnitt $A = 50\ \text{mm}^2$ fließt der Strom $I = 200\,\text{A}$. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit (Driftgeschwindigkeit) der freien Elektronen, wenn deren Dichte $N = 8{,}5 \cdot 10^{19}\ \text{mm}^{-3}$ beträgt?

Lösung:

Der Weg Δx wird in der Zeit Δt zurückgelegt. Während dieser Zeit wird die Ladung

$$\Delta Q = I\Delta t \text{ mit } \Delta Q = eN\Delta \times A$$

transportiert (Bild 1.4). Damit folgt

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v = \frac{I}{eNA} \approx 0{,}3\ \frac{\text{mm}}{\text{s}}\ .$$

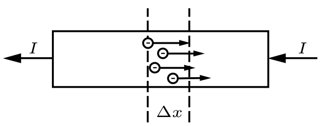

Bild 1.4 *Zur Berechnung der Driftgeschwindigkeit.*

1.3 Die elektrische Spannung

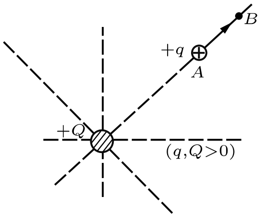

Bild 1.5 *Zur Änderung der potentiellen Energie beim Verschieben der Ladung q von A nach B.*

Im letzten Abschnitt wurde die Frage nach der Ursache für den elektrischen Strom offengelassen. Es liegt nahe, dass eine Kraft erforderlich ist, um die Ladungen im Leiter zu bewegen, und dass mit der Bewegung ein Energieumsatz verbunden ist. Das wird verdeutlicht an Hand von Bild 1.5, in dem zwei Ladungen Q und q dargestellt sind. Haben beide Ladungen gleiches Vorzeichen, so stoßen sie sich nach Abschnitt 1.1 ab. Bei einer Bewegung der Ladung q von A nach B nimmt die potentielle Energie dieser Ladung ab, etwa von W_A auf W_B. Die Energiedifferenz wird in kinetische Energie umgewandelt. Damit ist der Vorgang analog zur Bewegung einer Masse im Schwerefeld der Erde: Ein von A nach B fallender Stein gewinnt eine kinetische Energie, die gleich der Abnahme seiner potentiellen Energie ist. So wie diese potentielle Energie der Masse proportional ist, so erweist sich die potentielle Energie des Ladungsträgers als der Ladung proportional:

$$W_A - W_B \sim q \ .$$

Man führt als Proportionalitätsfaktor auf der rechten Seite die **elektrische Spannung** ein, die mit U bezeichnet wird. Damit haben wir

$$\boxed{\frac{W_A - W_B}{q} = \frac{W_{AB}}{q} = U_{AB}}\,, \qquad (1.7)$$

wobei der Index bei U ausdrückt, dass die Spannung zwischen den Punkten A und B gemeint ist.

Ganz allgemein nennt man eine Einrichtung, in der die bewegten Ladungen potentielle Energie abgeben, einen **Verbraucher** und den Quotienten nach Gl. (1.7) den **Spannungsabfall** U (oder einfach die Spannung U an dem Verbraucher). Einrichtungen, die die potentielle Energie der Ladungen erhöhen, bezeichnet man als **Erzeuger,** Spannungsquellen oder Generatoren und die gemäß Gl. (1.7) definierte Spannung als **Quellenspannung** U_q oder U.

Die Ausdrücke Verbraucher und Erzeuger haben sich eingebürgert, obwohl in ihnen Energie weder verbraucht noch erzeugt, sondern nur in andere Energieformen umgesetzt wird, z. B. elektrische Energie in Wärme im stromdurchflossenen Leiter oder mechanische in elektrische Energie in der Dynamomaschine.

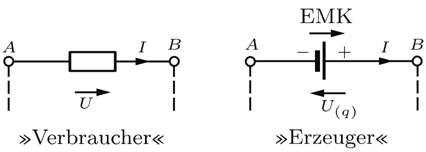

Bild 1.6 *Richtung von Strom und Spannung bei Verbrauchern und Erzeugern.*

Die Richtung der Spannung wählt man bei einem Verbraucher im Allgemeinen genauso wie die des Stromes. (Die möglichen Zuordnungen kommen in Abschnitt 2.4.1 zur Sprache.) Damit gibt der Spannungspfeil die Bewegungsrichtung der positiven Ladungsträger bei Abgabe potentieller Energie an. Bei Zunahme der potentiellen Energie – also bei Generatoren – ist konsequenterweise der Spannungspfeil entgegengesetzt zum Strompfeil einzutragen (Bild 1.6). Den Anschlussklemmen von Verbrauchern und Generatoren ordnet man Vorzeichen zu, und zwar so, dass außerhalb des Generators der Strom vom positiven zum negativen Pol oder Anschluss fließt, somit innerhalb des Generators vom negativen zum positiven Anschluss (Bild 1.6). Die Spannung ist bei Verbrauchern und Generatoren stets vom Pluspol zum Minuspol gerichtet. Aus Gl. (1.7) ergibt sich eine mögliche Einheit der Spannung zu

$$[U] = \frac{[W]}{[q]} = \frac{1\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{As}} = \frac{1\,\mathrm{W}}{1\,\mathrm{A}},$$

wofür man abkürzend schreibt:

$$\frac{1\,\mathrm{W}}{1\,\mathrm{A}} = 1\ \mathrm{Volt} = 1\ \mathrm{V}.$$

1.4 Der elektrische Widerstand

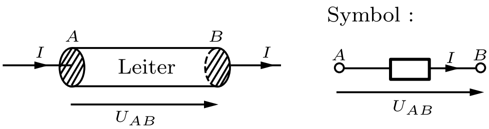

Bild 1.7 *Zur Definition des Widerstandes R_{AB}.*

Um einen elektrischen Strom durch einen Leiter zu treiben, ist Energie erforderlich, da der Leiter der freien Bewegung der Ladungen einen Widerstand entgegensetzt. Je größer der Strom durch den Leiter (Bild 1.7) werden soll, desto größer muss im allgemeinen die Spannung zwischen den Leiterenden A und B sein. Man definiert als **Widerstand** R_{AB} des Leiters den Quotienten aus Spannung U_{AB} und Strom I:

$$\boxed{R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I}} \tag{1.8}$$

Dieser Quotient kann vom Strom abhängen, aber auch konstant sein (s. Abschnitt 2.1.1). In manchen Fällen, z. B. zur Charakterisierung nichtlinearer Zweipole (Abschnitt 2.5.1), ist es zweckmäßig, mit einem **differentiellen Widerstand** r_{AB} zu arbeiten, der so definiert ist:

$$r_{AB} = \frac{dU_{AB}}{dI}. \tag{1.9}$$

Eine Einheit des Widerstandes kann aus Gl. (1.8) hergeleitet werden:

$$[R] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{1\,\mathrm{V}}{1\,\mathrm{A}}.$$

Für den Quotienten V/A schreibt man abkürzend

$$1\,\mathrm{V/A} = 1\ \mathrm{Ohm} = 1\,\Omega\,.$$

Den Kehrwert des Widerstandes R nennt man den **Leitwert** G

$$G = \frac{1}{R} \tag{1.10}$$

mit der möglichen Einheit l/Ohm, die einen speziellen Namen erhalten hat:

$$1/\Omega = 1\ \mathrm{Siemens} = 1\ \mathrm{S}.$$

Bei einem homogenen Leiter von gleichbleibendem Querschnitt A und der Länge l ist der Widerstand erfahrungsgemäß der Länge proportional und dem Querschnitt umgekehrt proportional:

$$R \sim \frac{l}{A}\,.$$

Den Proportionalitätsfaktor auf der rechten Seite nennt man den **spezifischen Widerstand** ϱ des Leitermaterials, seinen Kehrwert bezeichnet man als die **elektrische Leitfähigkeit** γ. Damit hat man

$$\boxed{R = \varrho\frac{1}{A} = \frac{1}{\gamma A}}\,. \tag{1.11}$$

Für die Leitfähigkeit werden vielfach auch die Bezeichnungen σ und χ verwendet. Wir halten uns jedoch hier wie an anderen Stellen an die Empfehlungen von DIN 1304 und ziehen die Bezeichnung γ vor.

Als Einheiten für die Größen ϱ und γ lassen sich mit (1.11) herleiten:

$$[\varrho] = \frac{[R][A]}{[l]} = \frac{\Omega\,\mathrm{m}^2}{\mathrm{m}} = \Omega\,\mathrm{m}$$

$$[\gamma] = \frac{[l]}{[R][A]} = \frac{\mathrm{m}}{\Omega\,\mathrm{m}^2} = \mathrm{S/m}\,.$$

Beispiel 1.2
„Widerstandsnormal“

Ein Quecksilberfaden von 1 mm^2 Querschnitt soll als „Widerstandsnormal“ dienen und den Widerstand 1 Ω haben. Wie lang muss der Faden sein, wenn der spezifische Widerstand von Quecksilber 0,958 Ω mm^2/ m beträgt?

Lösung:

Gl. (1.11) wird nach l aufgelöst:

$$l = \frac{RA}{\varrho} = \frac{1\,\Omega\cdot 1\,\mathrm{mm}^2}{0{,}958\,\Omega\ \mathrm{mm}^2/\mathrm{m}} \approx 1{,}04\,\mathrm{m}.$$

1.5 Energie und Leistung

Wird eine elektrische Ladung von einem Punkt zu einem anderen bewegt und besteht zwischen diesen beiden Punkten die zeitlich konstante Spannung U, so ist diese Bewegung nach Gl. (1.7) mit einem Energieumsatz von

$$\boxed{W = Q\ U} \tag{1.12}$$

verbunden. Ist nun die Spannung nicht mehr zeitlich konstant, so dass während eines ersten Zeitintervalls Δt_1 die von der Ladung ΔQ_1 durchlaufene Spannung U_1 beträgt und im nächsten Zeitintervall Δt_2 dann zu der Ladung ΔQ_2 die Spannung U_2 gehört usw., so erhält man an Stelle von Gl. (1.12):

$$W = U_1 \Delta Q_1 + U_2 \Delta Q_2 + ... \tag{1.13}$$

Durchläuft z. B. die Ladung ΔQ_1 die Spannung U_1 in der Zeit Δt_1, so kann man für ΔQ_1 wegen Gl. (1.5) auch schreiben:

$$\Delta Q_1 = I_1 \Delta t_1 \ .$$

Entsprechendes gilt für die anderen Summanden in Gl. (1.13), so dass folgt:

$$W = U_1 I_1 \Delta t_1 + U_2 I_2 \Delta t_2 + ... = \sum_k U_k I_k \Delta t_k \ .$$

Hierbei werden U_k und I_k während der Zeitintervalle Δt_k als konstant angesehen (daher große Buchstaben). Geht man zum Grenzwert der Summe $(\Delta t_k \to 0)$ und damit zum Integral über, so erhält man die zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 umgesetzte Energie:

$$\boxed{W = \int_{t_1}^{t_2} u(t)\, i(t)\, dt} \tag{1.14}$$

Für den Sonderfall des reinen Gleichstroms (u und i sind konstant) wird die im Zeitraum t umgesetzte Energie

$$\boxed{W = U\ I\ t} \ . \tag{1.15}$$

Eine mögliche Einheit der Energie ergibt sich wegen Gl. (1.15) zu

$$[W] = [U][I][t] = 1\text{V}\ 1\text{A}\ 1\text{s} = 1\text{Ws} = 1\text{J}\ ,$$

womit wir uns in Übereinstimmung mit Abschnitt 0.1.3 befinden. Für viele Zwecke ist die Maßeinheit Ws zu klein, dann verwendet man oft die Einheit Kilowattstunde:

$$1\ \text{kWh} = 3{,}6 \cdot 10^6\ \text{Ws}.$$

Gelegentlich braucht man die folgenden Umrechnungen:

$$1\,\text{Ws} = 0{,}102\,\text{mkp} = 0{,}239\,\text{cal},$$
$$1\,\text{kWh} = 860\,\text{kcal}.$$

In Abschnitt 0.1.3 wurde die Leistung als Arbeit pro Zeit definiert, also

$$P = W/t\ ,$$

womit nach Gl. (1.15) für Gleichstrom herauskommt

$$\boxed{P = U\,I}\,. \tag{1.16}$$

Ist die Leistung eine zeitlich veränderliche Größe, so wird der zeitliche Mittelwert der im Zeitraum $\varDelta t$ umgesetzten Leistung

$$P_m = \frac{\varDelta W}{\varDelta t}$$

und der Augenblickswert

$$\boxed{P(t) = \lim_{\varDelta t \to 0} \frac{\varDelta W}{\varDelta t} = \frac{dW}{dt}}\,. \tag{1.17}$$

2. Berechnung von Strömen und Spannungen in elektrischen Netzen

2.1 Die Grundgesetze

2.1.1 Das Ohmsche Gesetz

Wenn auf die Leitungselektronen des Widerstandes R eine Kraft wirkt (Bild 2.1), so fließt im Widerstand ein Strom I. Dieser Strom wächst, wenn U größer wird; der Strom wächst aber

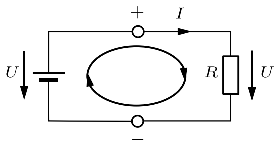

Bild 2.1 *Stromkreis aus Batterie und Widerstand.*

auch, wenn der Wert R des Widerstandes abnimmt. Speziell in einem metallischen Leiter von konstanter Form und Größe ist der Strom der Spannung **streng proportional** (Bild 2.2), solange auch die **Temperatur konstant** gehalten wird:

$$\boxed{I \sim U}\,. \tag{2.1}$$

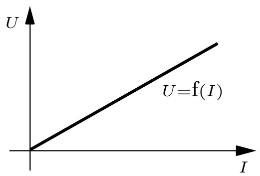

Bild 2.2 *Kennlinie U = f(I) eines ohmschen Widerstandes.*

Diese Proportionalität zwischen Spannung und Strom in metallischen Leitern nennt man **Ohmsches Gesetz.** Normalerweise schreibt man statt der Proportionalität eine Gleichung mit dem Proportionalitätsfaktor R, dem sogenannten ohmschen Widerstand:

$$\boxed{U = R\,I} \quad \text{(mit } R = \text{konst).} \tag{2.2a}$$

Umgeformt ergibt dies

$$I = \frac{U}{R} \tag{2.2b}$$

oder

$$R = \frac{U}{I}\,. \tag{2.2c}$$

Das Bild 2.2 stellt dar, dass der Zusammenhang zwischen U und I eine Gerade ist. Man spricht deshalb auch davon, dass U und I **linear** zusammenhängen (Linearität der Strom-Spannungs-Kennlinie $U = \mathrm{f}(I)$). Den Kehrwert des Widerstandes R nennt man **Leitwert** G:

$$\boxed{G = \frac{1}{R}}\,. \tag{2.3}$$

Damit wird aus den Gln. (2.2)

$$U = \frac{I}{G}; \quad I = GU; \quad G = \frac{I}{U}\,. \tag{2.4a, b, c}$$

Bemerkenswert ist, dass in der deutschen Sprache zwischen dem Bauelement „Widerstand" und seinem Widerstandswert nicht unterschieden wird. (Im Englischen heißt das Bauelement **resistor** und sein Widerstandswert **resistance.)**

Anmerkung: Temperaturabhängigkeit von Widerständen

In einem metallischen Leiter gilt das Ohmsche Gesetz $I \sim U$ nur, solange die Temperatur konstant ist. Der Widerstand solcher Leiter ist also stromunabhängig, aber temperaturabhängig; er nimmt im Allgemeinen mit der Temperatur zu. Bei reinen Metallen (außer den ferromagnetischen) ist der spezifische Widerstand ϱ oberhalb einer bestimmten Temperatur eine nahezu lineare Funktion der Temperatur ϑ (Bild 2.3).

Völlig anders als reine Metalle verhalten sich bestimmte Legierungen, bei denen der spezifische Widerstand innerhalb eines größeren Temperatur-Bereiches sogar abnimmt. So nimmt beispielsweise der spezifische Widerstand von Manganin (86 % Cu, 12 % Mn, 2 % Ni) im Bereich von 35 °C bis 200 °C mit steigender Temperatur geringfügig ab (Bild 2.3).

Bei Temperaturen um $\vartheta = 20$ °C beschreibt man das Verhalten von Widerstands-Materialien gern durch folgende Annäherung der Funktion $R = \mathrm{f}(\vartheta)$ an eine Geraden-Gleichung:

$$\boxed{R \approx R_{20}\left[1 + \alpha_{20}\left(\frac{\vartheta}{{}^\circ\mathrm{C}} - 20\right)\mathrm{K}\right]}\,.$$

Hierbei ist R_{20} der Wert, den ein ohmscher Widerstand bei 20 °C hat. α_{20} ist der materialspezifische **Temperaturbeiwert** (Temperatur-Koeffizient); er ist ein Maß für die relative Zunahme des Widerstandswertes bei Erhöhung der Temperatur um 1 K. Je weniger linear die Funktion $R = \mathrm{f}(\vartheta)$ in Wirklichkeit ist, desto kleiner ist der Temperaturbereich, in dem die Annäherung durch eine Gerade brauchbar ist. Eine genauere Beschreibung der Temperatur-Abhängigkeit erreicht man folgendermaßen:

$$R = R_{20}\left[1 + \alpha_{20}\left(\frac{\vartheta}{{}^\circ\mathrm{C}} - 20\right)\mathrm{K} + \beta_{20}\left(\frac{\vartheta}{{}^\circ\mathrm{C}} - 20\right)^2\mathrm{K}^2 + \ldots\right].$$

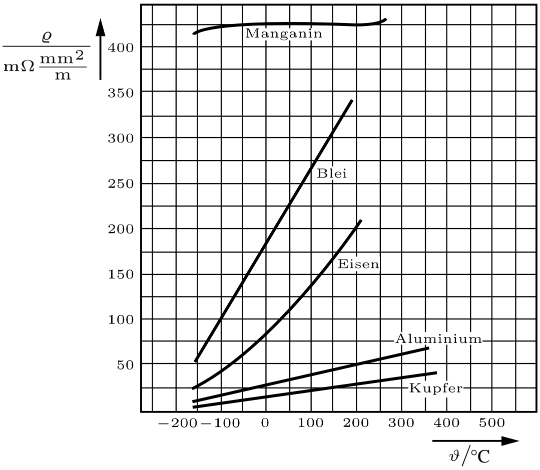

Bild 2.3 *Temperaturabhängigkeit spezifischer Widerstände.*

Hierbei treten zum linearen Term mit dem Koeffizienten α der quadratische Term mit dem Koeffizienten β und eventuell noch mehr Terme hinzu.

In den folgenden Tabellen sind die spezifischen Widerstände ϱ, die spezifischen Leitwerte $\gamma = 1/\varrho$ und die Temperaturbeiwerte α und β für einige wichtige Stoffe zusammengestellt (alle Werte gelten für $\vartheta = 20$ °C).

In diesen Tabellen gibt ϱ_{20} den spezifischen Widerstand bei 20 °C an. Da ϱ_{20} in $\Omega mm^2/m$ angegeben wird, geben die Zahlenwerte in der ersten Spalte der Tabellen unmittelbar an, wieviel Ohm ein Widerstand (Draht) von 1 m Länge und 1 mm^2 Querschnitt hat. So ist z. B. der Widerstandswert eines Konstantandrahtes von 1 m Länge und 1 mm^2 Querschnitt: $R = 0{,}5\ \Omega$.

Spezifischer Widerstand, Leitwert und Temperaturbeiwerte von Reinmetallen

Material	$\frac{\varrho_{20}}{\Omega \frac{mm^2}{m}}$	$\frac{\gamma_{20}}{S \frac{m}{mm^2}}$	$\frac{\alpha_{20}}{1/K}$	$\frac{\beta_{20}}{1/K^2}$
Aluminium	0,027	37	$4{,}3 \cdot 10^{-3}$	$1{,}3 \cdot 10^{-6}$
Blei	0,21	4,75	$3{,}9 \cdot 10^{-3}$	$2{,}0 \cdot 10^{-6}$
Eisen	0,1	10	$6{,}5 \cdot 10^{-3}$	$6{,}0 \cdot 10^{-6}$
Gold	0,022	45,2	$3{,}8 \cdot 10^{-3}$	$0{,}5 \cdot 10^{-6}$
Kupfer	0,017	58	$4{,}3 \cdot 10^{-3}$	$0{,}6 \cdot 10^{-6}$
Nickel	0,07	14,3	$6{,}0 \cdot 10^{-3}$	$9{,}0 \cdot 10^{-6}$
Platin	0,098	10,5	$3{,}5 \cdot 10^{-3}$	$0{,}6 \cdot 10^{-6}$
Quecksilber	0,97	1,03	$0{,}8 \cdot 10^{-3}$	$1{,}2 \cdot 10^{-6}$
Silber	0,016	62,5	$3{,}6 \cdot 10^{-3}$	$0{,}7 \cdot 10^{-6}$
Zinn	0,12	8,33	$4{,}3 \cdot 10^{-3}$	$6{,}0 \cdot 10^{-6}$