Oldenbourg

Höhere Analysis – Funktionentheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen

Ein Kompaktkurs

von
Hans-Joachim Runckel

Oldenbourg Verlag München Wien

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Runckel, Hans-Joachim:
Höhere Analysis – Funktionentheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen :
ein Kompaktkurs / von Hans-Joachim Runckel. – München ; Wien : Oldenbourg, 2000
ISBN 3-486-24904-5

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0, Internet: http://www.oldenbourg.de

Lektorat: Martin Reck
Herstellung: Rainer Hartl
Umschlagkonzeption: Kraxenberger Kommunikationshaus, München
Satz und Layout: Ulrich Illg
Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Druck: Grafik + Druck, München
Bindung: R. Oldenbourg Graphische Betriebe Binderei GmbH

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Buch entstand aus Vorlesungen, die ich im Laufe vieler Jahre an der Universität Ulm regelmäßig für Mathematiker (Diplom und höheres Lehramt) und Wirtschaftsmathematiker gehalten habe. Teile des hier dargestellten Materials wurden in Vorlesungen für Physiker, Elektrotechniker und Informatiker verwendet.

Die Funktionentheorie umfaßt 68 Sätze in 6 Kapiteln, von denen die ersten 5 Kapitel in einem Wintersemester (4-stündig) behandelt werden können. Der Differentialgleichungsteil umfaßt 33 Sätze in 5 Kapiteln, von denen die ersten 4 Kapitel Material für ein Sommersemester bieten. Eine Auswahl beider Teile wurde mehrfach in einer 6-stündigen Wintersemestervorlesung „Höhere Analysis" benutzt. Der Rest des Materials kann jeweils in einer Fortsetzungsvorlesung behandelt werden und wurde von mir auch als Vorlage für Seminare benutzt.

Die Funktionentheorie ist deshalb umfangreicher als der Differentialgleichungsteil, weil hier wichtige Begriffe aus der Analysis-Grundvorlesung wiederholt und vertieft werden. So wird z.B. die abelsche partielle Summation bei der ausführlichen Untersuchung nicht-absoluter aber gleichmäßiger Konvergenz von Funktionenreihen benutzt.

Da außerdem in der Analysis-Grundvorlesung Riemann-Stieltjes- und Kurven-Integrale nicht behandelt werden, später aber in der Wahrscheinlichkeitstheorie und Funktionentheorie benötigt werden, habe ich diesen Integralen ein zusätzliches Kapitel gewidmet. An dieser Stelle bin ich Herrn Dr. Matthias Trittler zu Dank verpflichtet, der mir nahelegte, Riemann-Stieltjes- und Kurven-Integrale gleich parallel in $\mathbb{C}$ und im $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, zu behandeln. Ohne technischen Mehraufwand werden der Existenzsatz (Satz 26) und der grundlegende Satz 27 gleich im $\mathbb{R}^d$ bewiesen. Herrn Dr. Trittler danke ich ganz besonders für die Beweise der Fundamentalsätze für Kurvenintegrale. Der Satz von Goursat, daß Kurvenintegrale holomorpher Funktionen längs Dreieckswegen in $\mathbb{C}$ gleich 0 sind, läßt sich nach Herrn Dr. Trittler auf Dreieckswege im $\mathbb{R}^d$ übertragen (Satz 32). Damit ergibt sich die Existenz von Stammfunktionen auf einem Sterngebiet G sowohl für holomorphe $f : G \to \mathbb{C}$ als auch für differenzierbare Vektorfelder $f : G \to \mathbb{R}^d$ mit $f' = (f')^T$ ohne die Stetigkeit von f' (Satz 33) und folglich $\int_C f(x)\,dx = 0$ für jeden geschlossenen Weg C in G (Satz 34). Alle Rechenregeln für Kurvenintegrale werden möglichst allgemein und gleich für rektifizierbare Kurven in

$\mathbb{R}^d$ bewiesen und führen zu einem besseren Verständnis der Kurvenintegrale in $\mathbb{C}$.

Als weitere Besonderheit wird in Satz 46 mit Hilfe von Stammfunktionen ein neuer elementarer Beweis für die analytische Fortsetzung durch Spiegelung (nach H. A. Schwarz) an einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ unter der schwachen Voraussetzung $\operatorname{Im} f(z) \to 0$ für $z \to \xi \in I$ geliefert.

Im Differentialgleichungsteil werden zunächst verschiedene elementare Lösungsmethoden für spezielle Typen von Differentialgleichungen behandelt. Dabei wird stets Wert darauf gelegt, maximal fortgesetzte Lösungen zu bestimmen und deren Randverhalten zu untersuchen.

Die allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssätze, einschließlich dem globalen Peano-Existenzsatz, werden gleich für Systeme bewiesen, können aber stets im Fall $n = 1$ gelesen und anschaulich verfolgt werden.

Basierend auf einer Arbeit des Autors [18] werden in Kapitel 4 Matrixfunktionen $f(\boldsymbol{A})$ für $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eingeführt, wobei irgend ein Polynom $c(z)$ m-ten Grades mit $c(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$ zugrundegelegt wird. Es wird eine Darstellung von $e^{x\boldsymbol{A}}$ als Polynom in $\boldsymbol{A}$ vom Grade $< m$ hergeleitet, deren Koeffizienten eng verknüpft sind mit den Lösungen der linearen Differenzen- und Differentialgleichungen m-ter Ordnung mit demselben charakteristischen Polynom $c(z)$. Die Struktur und das asymptotische Verhalten der jeweiligen Lösungen ist an den hergeleiteten Formeln direkt ablesbar.

Im letzten Kapitel wird mit der Gronwall-Ungleichung als grundlegendem und einheitlichem Beweishilfsmittel sowohl die Stabilität von Lösungen als auch die stetige bzw. differenzierbare Abhängigkeit der Lösungen von Anfangswerten und von weiteren Parametern untersucht.

Dieses Buch ist zur Benutzung neben Vorlesungen, als Repetitorium der Theorie zur Prüfungsvorbereitung, aber auch zum Selbststudium wegen seiner kompakten Darstellung gut geeignet. Der Aufbau des Buches besteht aus einer Folge von Definitionen, Sätzen, Bemerkungen und Beispielen. Der Schwerpunkt besteht aus einer ausführlichen Darstellung der Theorie. Es wurde besonders großer Wert auf eine sorgfältige, vollständige, gut verständliche Darstellung aller Beweise, vom ersten bis zum letzten Satz, gelegt. In den Bemerkungen werden unmittelbare Folgerungen, Spezialfälle, naheliegende Verallgemeinerungen, andere Formulierungen oder Ergänzungen der vorausgegangenen Sätze behandelt und, teilweise, auch ausführlich bewiesen.

Da in sämtlichen Büchern des Literaturverzeichnisses sehr viele Beispiele aus allen nur denkbaren Anwendungsbereichen enthalten sind, habe ich relativ wenige Beispiele behandelt. Diese sollen z.B. zeigen, daß ein Satz scharf ist, oder daß eine explizit nicht berechenbare Lösung eine leicht berechenbare Umkehrfunktion haben kann. Manche Beispiele sollen auf einen besonderen Trick aufmerksam machen. Als Ergänzung zu den ersten beiden Kapiteln möchte ich ganz besonders auf das Buch von T. Needham [12] hinweisen, das eine Fülle von schönen Illustrationen zur stereographischen Projektion und zur konformen Abbildung durch Möbiustransformationen und anderer Funktionen enthält.

Herrn Dipl.-Math. Ulrich Ilg danke ich für seine unermüdliche und nervenaufreibende Arbeit. Herr Ilg hat das gesamte Manuskript einschließlich der Bilder in LaTeX gesetzt. Ganz besonders danke ich Herrn Ilg für die unendliche Ausdauer, mit der er auf Änderungswünsche und Ergänzungen von mir einging.

Dem R. Oldenbourg Verlag danke ich für die Geduld, die er mir bei der Fertigstellung meines Manuskriptes entgegenbrachte.

Ulm, im August 1999 Hans-J. Runckel

TEIL I

FUNKTIONENTHEORIE

1 Komplexe Zahlen, Folgen, Reihen

1.1 Rechenregeln für komplexe Zahlen

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden einen Körper mit Anordnung, der bezüglich dieser Anordnung vollständig ist.
Anordnung: $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Beziehungen $a < b$, $a = b$, $b < a$ ($\Longleftrightarrow$: $a > b$) (*Trichotomie*). Aus $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$ (*Transitivität*). Aus $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ $\forall c \in \mathbb{R}$ und $ac < bc$ $\forall c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ (*Monotoniegesetze*).

Aus dem Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ entsteht folgendermaßen der Körper $\mathbb{C}$ der *komplexen Zahlen*:

$$\mathbb{C} := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

wobei $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) :\Longleftrightarrow x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$. Weiter sei

$$i := (0, 1)\,.$$

Mit $z_1 := (x_1, y_1)$, $z_2 := (x_2, y_2)$ sei

$$z_1 \pm z_2 := (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2) \qquad z_1 \cdot z_2 := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)\,.$$

Bezüglich dieser Addition und Multiplikation ist $\mathbb{C}$ ein Körper mit $(0, 0)$ als additiv neutralem und $(1, 0)$ als multiplikativ neutralem Element. Die Abbildung $x \mapsto (x, 0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ist ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$ auf den Unterkörper $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ von $\mathbb{C}$. Ließe sich $\mathbb{C}$ anordnen, so wäre $(1, 0) > (0, 0)$, $(-1, 0) < (0, 0)$ und allgemein

$$(a, b) \cdot (a, b) > (0, 0) \;\; \forall (a, b) \neq (0, 0)\,.$$

Dies widerspricht $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) < (0, 0)$. Daher läßt sich in $\mathbb{C}$ keine Anordnung definieren.

Beispiel einer teilweisen Anordnung von $\mathbb{C}$:

$$(a, b) \prec (c, d) :\Longleftrightarrow b = d \text{ und } a < c \text{ oder } b < d \;\; \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}\,.$$

Alle Anordnungseigenschaften sind erfüllt bis auf das Monotoniegesetz:

$$z_1 \prec z_2 \text{ und } 0 \prec z_3 \Rightarrow z_1 z_3 \prec z_2 z_3,$$

denn $(0,0) \prec (0,1)$, aber $(0,1)^2 = (-1,0) \prec (0,0)$.

Kartesische Schreibweise

Wegen $(x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1) \cdot (y,0)\ \forall (x,y) \in \mathbb{C}$ und weil $\mathbb{R}$ isomorph zu $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ ist, sei im folgenden $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$x + iy := (x,y)\,.$$

Mit dem Binom $x + iy$ wird genauso wie mit reellen Binomen $a + b$ gerechnet, wobei nur jeweils $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$ ($i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) und ferner $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i, \ldots$ zu berücksichtigen ist.

Definition 1 Sei $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Dann heißt $x =: \operatorname{Re} z$ *Realteil* von z, $y =: \operatorname{Im} z$ *Imaginärteil* von z, $\overline{z} := x - iy$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl*,

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

der *Betrag* (oder die *Norm*) von z (Abstand von z zu 0).

Rechenregeln

$$|z| = 0 \iff z = 0\,.$$

$$z = x \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = \text{Betrag in } \mathbb{R} = |x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{, falls } x \geq 0 \\ -x & \text{, falls } x < 0 \end{cases}$$

(d.h. $|x|$ ist durch die Anordnung in $\mathbb{R}$ definiert). $\Rightarrow$ Die Abbildung $x \mapsto (x,0)$ ist eine Isometrie (abstandstreu). $z = x + iy \Rightarrow$

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z})\,,\ y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = \frac{i}{2}(\overline{z} - z)\,,$$

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i\,,\ z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2\,.$$

$$z \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\,\frac{y}{x^2 + y^2}\,.$$

$$\overline{\overline{z}} = z\,,\ \overline{(z_1 \pm z_2)} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}\,,\ \overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\,,\ \overline{(z_1/z_2)} = \overline{z_1}/\overline{z_2}\ (z_2 \neq 0).$$

Komplexe Nullstellen reeller Polynome:

$$P(z_0) = a_0 + a_1 z_0 + \cdots + a_n z_0^n = 0\,,\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R},$$

$\Rightarrow P(\overline{z_0}) = \overline{P(z_0)} = \overline{0} = 0$, d.h. mit z_0 ist auch $\overline{z_0}$ Nullstelle.

Mit $|z|^2 = z\overline{z}$ folgt

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|\,,\ |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|\ (z_2 \neq 0)\,.$$

$x \le |x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+y^2} = |z| \le |x| + |y|$, analog $y \le |y| \le |z| \le |x| + |y|$, d.h.

$$\left.\begin{matrix} |\operatorname{Re} z| \\ |\operatorname{Im} z| \end{matrix}\right\} \le |z| \le |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \quad , \quad \operatorname{Re} z = |z| \iff z = \operatorname{Re} z \ge 0\,.$$

$|z_1 - z_2| =:$ euklidischer Abstand von z_1, z_2 (Metrik).

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \ \textit{(Dreiecksungleichung)} \quad \text{und}$$
$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff z_1 = cz_2 \text{ oder } z_2 = cz_1 \text{ mit } c \ge 0\,.$$

Beweis

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2|z_1z_2| + |z_2|^2 = \big(|z_1| + |z_2|\big)^2. \end{aligned}$$

Es gilt „=“ genau dann, wenn $\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) = |z_1\overline{z_2}|$, $\iff z_1\overline{z_2} = \operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \ge 0$, oder, falls $z_2 \ne 0$, $z_1 = c_0/\overline{z_2} = \big(c_0/|z_2|^2\big)z_2$, $c_0 \ge 0$, d.h. $z_1 = cz_2$, $c \ge 0$. □

Wie in $\mathbb{R}$ folgt $|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$. Daher ist $|z|$ eine stetige Funktion von z.

1.2 Trigonometrische Darstellung und n-te Wurzeln komplexer Zahlen

Polarkoordinaten

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r = |z| =$ Abstand von z zu 0, $\varphi = \arg z =$ Argument von z ist eindeutig modulo 2π (außer bei $z = 0$).

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,,$$

$|\cos\varphi + i\sin\varphi| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$.

Multiplikation in trigonometrischer Darstellung

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2\big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\big) \\ &= r_1r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big)\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arg(z_1z_2) &= \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \mod 2\pi\,, \\ \arg(z_1/z_2) &= \arg z_1 - \arg z_2 \mod 2\pi \ (z_2 \ne 0)\,, \\ \arg(1/z) &= \arg 1 - \arg z = -\arg z \mod 2\pi \ (z \ne 0)\,. \end{aligned}$$

Formel von De Moivre

Mit $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ folgt für $n \in \mathbb{Z}$

$$z^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi\,.$$

Anwendungen

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{n}\cos\nu\varphi + i\sum_{\nu=0}^{n}\sin\nu\varphi &= \sum_{\nu=0}^{n} z^\nu \overset{z\neq 1}{=} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{(1-z^{n+1})(1-\overline{z})}{|1-z|^2}\\ &= \frac{1-\overline{z}-z^{n+1}+\overline{z}z^{n+1}}{|1-z|^2} \overset{\frac{1}{z}=\overline{z}}{=} \frac{1-\overline{z}-z^{n+1}+z^n}{(1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}\\ &= \frac{1-\cos\varphi-\cos(n+1)\varphi+\cos n\varphi+i(\sin\varphi-\sin(n+1)\varphi+\sin n\varphi)}{2(1-\cos\varphi)}.\end{aligned}$$

Besser: Benutze $\sqrt{z}$. Setze $w := \cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}$, $\Rightarrow w^2 = z$, $(-w)^2 = z$ $(w =: \sqrt{z})$.

$$\begin{aligned}\frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1-w^{2(n+1)}}{1-w^2} &= \frac{w^{n+1}}{w}\cdot\frac{w^{-(n+1)}-w^{n+1}}{w^{-1}-w} \overset{\frac{1}{w}=\overline{w}}{=} w^n\cdot\frac{\operatorname{Im} w^{n+1}}{\operatorname{Im} w}\\ &= \left(\cos\frac{n}{2}\varphi + i\sin\frac{n}{2}\varphi\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\varphi\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}}\,,\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1+\sum_{\nu=1}^{n}\cos\nu\varphi = \frac{\cos\frac{n}{2}\varphi\,\sin(n+1)\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\,,\ \sum_{\nu=1}^{n}\sin\nu\varphi = \frac{\sin\frac{n}{2}\varphi\,\sin(n+1)\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\,.$$

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{n} z^\nu = z\frac{1-z^n}{1-z} &= w^2 w^{n-1}\frac{\operatorname{Im} w^n}{\operatorname{Im} w}\\ &= \left(\cos(n+1)\frac{\varphi}{2} + i\sin(n+1)\frac{\varphi}{2}\right)\frac{\sin n\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\,,\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{\nu=1}^{n}\cos\nu\varphi = \frac{\cos(n+1)\frac{\varphi}{2}\,\sin n\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\,.$$

Anwendung: Fourierreihen.

n-te Wurzeln

Gegeben sei $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$. Gesucht werden alle $w = \varrho(\cos\psi + i\sin\psi)$ mit $w^n = z$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = w^n = \varrho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$. $\Rightarrow \varrho^n = r$ und $\cos n\psi = \cos\varphi$, $\sin n\psi = \sin\varphi$. $\Rightarrow \varrho = \sqrt[n]{r} > 0$ und $n\psi = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Für $k = 0, 1, \dots, n-1$ ergeben sich genau n *verschiedene* Punkte (= Zahlen in $\mathbb{C}$)

$$w_k = r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

mit $w_k^n = z$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Beweis Annahme: Für $k_1, k_2 \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ gilt $w_{k_1} = w_{k_2}$.

$$\Rightarrow \frac{\varphi + 2k_1\pi}{n} = \frac{\varphi + 2k_2\pi}{n} + 2l\pi$$

mit einem $l \in \mathbb{Z}$. $\Rightarrow \varphi + 2k_1\pi = \varphi + 2k_2\pi + 2nl\pi$, $\Rightarrow k_1 - k_2 = nl$. Wäre $l \neq 0$, so $\Rightarrow |l| \geq 1$, $\Rightarrow |k_1 - k_2| = n|l| \geq n$ im Widerspruch zu $|k_1 - k_2| \leq n - 1 < n$. $\Rightarrow$ $l = 0$, also $k_1 = k_2$. □

Wegen $w_{k+ln} = w_k$, $k = 0, \dots, n-1$ und $\forall l \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

Es gibt genau n n-te Wurzeln aus $z \neq 0$, d.h. genau n verschiedene Nullstellen $w_0, \dots, w_{n-1}$ des Polynoms $f(w) := w^n - z$. Diese bilden ein regelmäßiges n-Eck auf dem Kreis mit Radius $|z|^{1/n}$ um 0.

Beispiel 1 — Quadratwurzeln aus i $|i| = 1$, $i = 0 + i \cdot 1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

$$w_k = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right), \ k = 0, 1,$$

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \ w_1 = -w_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i).$$

Beispiel 2 — n-te Einheitswurzeln $w_k^n = 1$, $k = 0, \dots, n-1$.

$$w_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

bilden regelmäßiges n-Eck auf dem Einheitskreis mit $w_0 = 1$.
Für $n = 3$:

$$w_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}, \ k = 0, 1, 2.$$

w_1, w_2 erzeugen zyklische (multiplikative) Gruppe der Ordnung 3.
Berechnung von $\cos\frac{2\pi}{3}$, $\sin\frac{2\pi}{3}$: $w_0 = 1$, $w_2 = \overline{w_1}$,

$$\begin{aligned} w^3 - 1 &= (w-1)(w-w_1)(w-\overline{w_1}) \\ &= w^3 - w^2(1 + w_1 + \overline{w_1}) + w(w_1\overline{w_1} + w_1 + \overline{w_1}) - w_1\overline{w_1}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1 + 2\,\mathrm{Re}\,w_1 = w_1\overline{w_1} + w_1 + \overline{w_1} = 0$$

$$\Rightarrow \cos\frac{2\pi}{3} = \mathrm{Re}\,w_1 = -\frac{1}{2}\,,\ \sin\frac{2\pi}{3} = \sqrt{1-1/4} = \sqrt{3}/2\,.$$

$$w_0 = 1\,,\ w_1 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ w_2 = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Für $n = 8$:

$$w_k = \cos\frac{k\pi}{4} + i\sin\frac{k\pi}{4}\,,\ k = 0, 1, \ldots, 7.$$

$$\Rightarrow w_0 = 1\,,\ w_2 = i\,,\ w_4 = -1\,,\ w_6 = -i\,,$$
$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\,,\ w_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)\,,\ w_5 = \overline{w_3}\,,\ w_7 = \overline{w_1}\,.$$

Hier erzeugen w_1, w_3, w_5, w_7 eine zyklische (multiplikative) Gruppe der Ordnung 8.

1.3 Riemannsche Zahlenkugel und stereographische Projektion

Definition 2 Sei $S := \{(\xi,\eta,\zeta)^T \in \mathbb{R}^3 : \xi^2+\eta^2+\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\}$ die *Riemannsche Zahlenkugel (Sphäre)* und $N := (0,0,1)$ der Nordpol von S. Bei der *stereographischen Projektion* wird jedem $z = x + iy \in \mathbb{C}$ durch geradlinige Verbindung mit N der eindeutige Schnittpunkt $P = (\xi,\eta,\zeta)^T \in S$ dieser Geraden mit S zugeordnet.

Dann gilt:

$$P : \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\\ 0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0-x\\ 0-y\\ 1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1-t)x\\ (1-t)y\\ t\end{pmatrix} \text{ für ein } t \text{ mit } 0 \le t < 1,\ t = \zeta.$$

$\Rightarrow (1-t)^2(x^2+y^2) + (t-1/2)^2 = 1/4$ oder $(1-t)^2|z|^2 + t^2 - t = 0$,

$$\Rightarrow |z|^2 = \frac{t(1-t)}{(1-t)^2} = \frac{t}{1-t}\,,\ t = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}\,,\ 1-t = \frac{1}{1+|z|^2}\,,$$

$$\Rightarrow \xi = (1-t)x = \frac{x}{1+|z|^2}\,,\ \eta = (1-t)y = \frac{y}{1+|z|^2}\,,\ \zeta = t = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}\,.$$

Umkehrabbildung:

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}\,,\ y = \frac{\eta}{1-\zeta}\,.$$

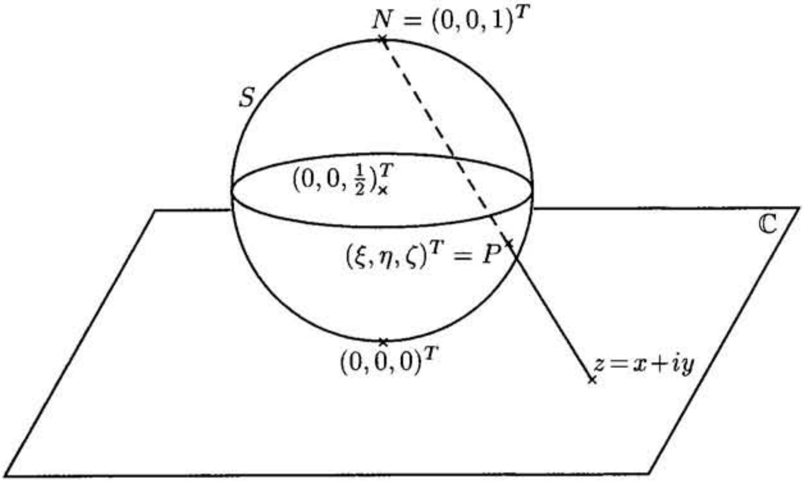

Abbildung 1.1: Die Riemannsche Zahlenkugel und die stereographische Projektion.

$\Rightarrow$ Die stereographische Abbildung ist eine Bijektion $\mathbb{C} \to S \setminus \{N\}$ mit

$$(\xi,\eta,\zeta)^T \to (0,0,1)^T = N \text{ für } |z| \to \infty.$$

Satz 1 Jeder Kreis (bzw. jede Gerade) der z-Ebene $\mathbb{C}$ geht bei der stereographischen Projektion in einen Kreis nicht durch N (bzw. durch N) auf der Riemannschen Zahlenkugel über und umgekehrt.

Beweis Ein Kreis oder eine Gerade in $\mathbb{C}$ wird beschrieben durch

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0 \quad \text{mit } a,b,c,d \in \mathbb{R},\ 4ad < b^2+c^2.$$

Setze $x=\frac{\xi}{1-\zeta}$, $y=\frac{\eta}{1-\zeta}$, $|z|^2=\frac{\zeta}{1-\zeta}$ ein $\Rightarrow a\,\frac{\zeta}{1-\zeta}+b\,\frac{\xi}{1-\zeta}+c\,\frac{\eta}{1-\zeta}+d=0$ oder

$$(a-d)\zeta+b\xi+c\eta+d=0\,.$$

Dies ist eine Ebenengleichung im $\mathbb{R}^3$ (beachte: $a=d \Rightarrow 0 \le 4ad < b^2+c^2$). Bildkurve auf der Riemannschen Zahlenkugel ist daher der Schnitt von Ebene mit Kugel. Genau die Geraden in $\mathbb{C}$ (mit $a=0$) werden auf Kreise durch $N=(0,0,1)^T$ abgebildet. □

Verhalten von $w=f(z)=1/z$ auf der Riemannschen Zahlenkugel

$z=x+iy \Rightarrow$

$$\frac{1}{z}=\frac{x-iy}{|z|^2}\,,\ \xi=\frac{x}{1+|z|^2}\,,\ \eta=\frac{y}{1+|z|^2}\,,\ \zeta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2}\,.$$

Seien ξ^*, η^*, ζ^* die Koordinaten von $1/z$ auf der Kugel $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\xi^* &= \frac{x/|z|^2}{1+1/|z|^2} = \frac{x}{|z|^2+1} = \xi\,,\\
\eta^* &= \frac{-y/|z|^2}{1+1/|z|^2} = \frac{-y}{|z|^2+1} = -\eta\,,\\
\zeta^* &= \frac{1/|z|^2}{1+1/|z|^2} = \frac{1}{|z|^2+1} = 1-\zeta\,.
\end{aligned}$$

Daher ist die Abbildung $z \mapsto 1/z$ eine Drehung der Riemannschen Zahlenkugel um die Achse durch Mittelpunkt und parallel zu $\mathbb{R}$ um den Winkel π, bzw. Spiegelung an der ξ,ζ-Ebene ($\eta \to -\eta$) und Spiegelung an der Ebene $\zeta = 1/2$ ($\zeta \to 1-\zeta$).

Chordale Metrik

Man kann den euklidischen $\mathbb{R}^3$-Abstand zweier Punkte $P_1 = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$, $P_2 = (\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \neq N$ auf S durch die ihnen in der Ebene $\mathbb{C}$ entsprechenden Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ ausdrücken.

$$d(z_1, z_2) := \left((\xi_1-\xi_2)^2 + (\eta_1-\eta_2)^2 + (\zeta_1-\zeta_2)^2\right)^{1/2},$$

$\Rightarrow \left(d(z_1,z_2)\right)^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 + \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 - 2(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2)$. Wegen der Kugelgleichung $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0$, $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\left(d(z_1,z_2)\right)^2 &= \zeta_1 + \zeta_2 - 2(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2)\\
&= \frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2} + \frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2} - \frac{2\left(x_1x_2 + y_1y_2 + |z_1|^2|z_2|^2\right)}{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)}\\
&= \frac{|z_1|^2\left(1+|z_2|^2\right) + |z_2|^2\left(1+|z_1|^2\right) - 2\left(x_1x_2 + y_1y_2 + |z_1|^2|z_2|^2\right)}{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)}\\
&= \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2}{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)} = \frac{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)}\,,
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow d(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{\left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)}}\,.$$

Dies definiert die *chordale Metrik* in $\mathbb{C}$, da der euklidische Abstand in $\mathbb{R}^3$ eine Metrik (in $\mathbb{R}^3$) ist.

Definition 3 — Erweiterte komplexe Zahlenebene $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, wobei ∞ dem Punkt $N = (0,0,1)^T$ auf der Riemannschen Zahlenkugel S entspricht.

Rechenregeln

$$a+\infty := \infty\,,\ \frac{a}{\infty} := 0\ \forall a \in \mathbb{C}\,,\ a\cdot\infty := \infty\,,\ \frac{a}{0} := \infty\ \forall a \in \mathbb{C}\,,\ a \neq 0\,.$$

$$\Rightarrow \lim_{|z_2|\to\infty} d(z_1,z_2) = \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} =: d(z_1,\infty) = d(\infty,z_1)\,,\ d(\infty,\infty) := 0.$$

Damit ist $d(z_1, z_2)$ eine Metrik auf $\hat{\mathbb{C}}$.

1.4 Komplexe Folgen und Reihen

Definition 4 Seien $z_0, z_n \in \mathbb{C}\ \forall n \in \mathbb{N}$.
z_0 heißt *Häufungswert* der Folge $(z_n) = (z_n)_{n=1}^{\infty} = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} :\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall n_0 > 0\ \exists n_1 \geq n_0\ :\ |z_{n_1} - z_0| < \varepsilon\,.$$

z_0 heißt *Limes* der Folge $(z_n) :\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) > 0\ :\ \forall n \geq N(\varepsilon)\quad |z_n - z_0| < \varepsilon$$

$(z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n,\ z_n \to z_0\ (n \to \infty))$.

Bemerkung 1 Genauer bedeutet dies:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N(\varepsilon)>0}{\exists} \left(\underset{n\geq N(\varepsilon)}{\forall} |z_n - z_0| < \varepsilon \right).$$

Einige grundlegende Ergebnisse
Jede beschränkte Folge (z_n) hat mindestens einen Häufungswert (*Bolzano-Weierstraß*). Sie ist genau dann konvergent, wenn sie nur einen Häufungswert hat. Da $z_n \to z_0 \Longleftrightarrow \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z_0$ und $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z_0\ (n \to \infty)$, gilt das *Cauchy-Konvergenzkriterium* auch in $\mathbb{C}$ (Vollständigkeit von $\mathbb{C}$): Die Folge (z_n) aus $\mathbb{C}$ ist konvergent $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) > 0\ :\ \forall n, m \geq N(\varepsilon)\ |z_n - z_m| < \varepsilon$.

Definition 5 Sei $a_n \in \mathbb{C}\ \forall n \in \mathbb{N}$.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent* $:\Longleftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert $(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty)$.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *bedingt konvergent* $:\Longleftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergiert $(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty)$.

Bemerkung 2 Jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe ist wieder konvergent zum selben Wert.

Majorantenkriterium

$$\text{Sei } c_n \geq 0,\, a_n \in \mathbb{C},\, |a_n| \leq c_n \;\forall n \in \mathbb{N} \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty.$$

Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Bemerkung 3 $|a_n| \geq c_n$ und $\sum c_n = \infty \Rightarrow \sum |a_n| = \infty$, aber im allgemeinen nicht $\sum a_n$ divergent. $(c_n) =$ Minorantenfolge.

Wurzelkriterium (Geometrische Reihe als Majorante)

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \vartheta < 1 \;\forall n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty\,.$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\; \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \;\left(\text{und } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent}\right),$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\; \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergent } \left(\text{und } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty\right),$$

da unendlich viele $|a_n| > 1$.

Quotientenkriterium (Geometrische Reihe als Majorante, siehe Satz 2)

$$a_n \neq 0 \text{ und } \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \vartheta < 1 \;\forall n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty\,.$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \;\left(\text{und } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent}\right),$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \;\forall n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergent } \left(\text{und } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty\right),$$

da $|a_n| \geq |a_{n_0}| \;\forall n \geq n_0\,.$

$\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \;\forall n \geq n_0\,,\right.$ z.B. wenn $\left.\underline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1\right).$

Beispiel 3 $|b_n| \leq \vartheta < 1 \;\forall n \geq n_0,\; a_n := b_0 b_1 \cdots b_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty.$

Allgemein gilt:

Satz 2 $0 \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

Beweis Sei

$$
\begin{aligned}
& a := \underline{\lim}_{n\to\infty} \left|\tfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \text{ und } 0 < a < \infty. \\
& \Rightarrow \forall \varepsilon \in (0,a)\ \exists N = N(\varepsilon) > 0 \,:\, \forall n \geq N\ |a_{n+1}/a_n| \geq a - \varepsilon > 0\,, \\
& \Rightarrow \forall n \geq N\ |a_n/a_N| = \prod_{\nu=N}^{n-1} |a_{\nu+1}/a_\nu| \geq (a-\varepsilon)^{n-N}\,, \\
& \Rightarrow |a_n| \geq K(\varepsilon)(a-\varepsilon)^n \text{ mit } K(\varepsilon) := |a_N|(a-\varepsilon)^{-N}\,, \\
& \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \geq \sqrt[n]{K(\varepsilon)}(a-\varepsilon)\,, \\
& \Rightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq a - \varepsilon\,.
\end{aligned}
$$

Da $\varepsilon \in (0,a)$ beliebig klein wählbar ist, $\Rightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq a$. Falls $a = +\infty$, so ersetze man $a - \varepsilon$ durch ein beliebig groß wählbares $c > 0$. Der Rest der Behauptung wird analog bewiesen. □

Bemerkung 4 $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to L \in [0,+\infty]$, $\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \to L$.

Beispiel 4 Beim Beweis von Satz 2 wird

$$\sqrt[n]{K} \to 1\ (n \to \infty)\ \forall K > 0$$

benutzt. Nun folgt:

$$1.)\ a_n := n^K\,, \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^K \to 1\,, \Rightarrow \sqrt[n]{n^K} \to 1\ (n \to \infty)\,.$$

$$2.)\ a_n := \frac{z^n}{n!}\,,\ z \neq 0\,, \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{z}{n+1} \to 0\,, \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{|z|^n}{n!}} \to 0\,,$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \text{absolut konvergent } \forall z \in \mathbb{C}.$$

Satz 3 — Verdichtungssatz von Cauchy
Vor. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1} \geq 0$.
Beh.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty\,.$$

Beweis

$$n \geq 0: \sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}-1} a_\nu \leq \left(2^{n+1} - 2^n\right) a_{2^n} = 2^n a_{2^n},$$

$$n \geq 1: \sum_{\nu=2^{n-1}+1}^{2^n} a_\nu \geq (2^n - 2^{n-1}) a_{2^n} = \frac{1}{2}\left(2^n a_{2^n}\right).$$

Mit $s_n := \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$ und $k \geq 0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{k} 2^n a_{2^n} \leq s_{2^k} \leq s_{2^{k+1}-1} \leq \sum_{n=0}^{k} 2^n a_{2^n}.$$

Es gilt: (s_n) konvergiert $\iff$ (s_{2^k}) konvergiert. □

Beispiel 5 Sei $\alpha > 0$.

$$1.)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{\alpha n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n < \infty \iff \alpha > 1.$$

$$2.)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha} < \infty \iff$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n (n \log 2)^\alpha} = \frac{1}{(\log 2)^\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \iff \alpha > 1.$$

Definition 6 Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Menge $\neq \emptyset$, $F_n(z) : M \to \mathbb{C}\ \forall n \in \mathbb{N}$.
1.) Die Funktionenfolge $\left(F_n(z)\right)_{n=1}^{\infty}$ *konvergiert gleichmäßig auf M* gegen die Funktion $F(z) : M \to \mathbb{C} :\iff$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) > 0 : \forall n \geq N(\varepsilon)\ \forall z \in M \quad |F_n(z) - F(z)| < \varepsilon.$$

2.) $\left(F_n(z)\right)_{n=1}^{\infty}$ *konvergiert kompakt in M* (gegen die Fkt. $F(z) : M \to \mathbb{C}$) $:\iff$ $\left(F_n(z)\right)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert auf jedem Kompaktum in M gleichmäßig (gegen $F(z)$).

Bemerkung 5 Genauer bedeutet Definition 6, 1.):

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N(\varepsilon)>0}{\exists} \left(\underset{n \geq N(\varepsilon)}{\forall} \text{ und } \underset{z \in M}{\forall}\ |F_n(z) - F(z)| < \varepsilon\right).$$

Negation hiervon:

$$\underset{\varepsilon_0>0}{\exists} \left(\underset{N>0}{\forall}\ \underset{n_N \geq N}{\exists} \text{ und } \underset{z_N \in M}{\exists}\ |F_{n_N}(z_N) - F(z_N)| \geq \varepsilon_0\right).$$

Satz 4 — Weierstraß-Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz

Vor. Sei $f_n(z) : M \to \mathbb{C}$ und $|f_n(z)| \leq c_n \; \forall n \in \mathbb{N}$ und $\forall z \in M$. Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$.

Beh. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ sind auf M gleichmäßig konvergent.

Beweis

$$\left|\sum_{\nu=n}^{n+p} f_\nu(z)\right| \leq \sum_{\nu=n}^{n+p} |f_\nu(z)| \leq \sum_{\nu=n}^{n+p} c_\nu \leq \varepsilon \;\; \forall n \geq N(\varepsilon)\,,\; \forall p \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \forall z \in M.$$

Die Behauptung folgt aus dem *Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz:* $\big(F_n(z)\big)$ ist auf M gleichmäßig konvergent (gegen eine Funktion $F(z)$) $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \; : \; \forall n, m \geq N(\varepsilon) \; \forall z \in M \quad |F_n(z) - F_m(z)| < \varepsilon\,.$$

(Beachte: $N(\varepsilon)$ ist unabhängig von z.) Wähle hier $F_n(z) := \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(z)$. □

Bemerkung 6 $\sqrt[n]{|f_n(z)|} \leq \vartheta < 1 \; \forall n \geq n_0$, $\forall z \in M$, $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ ist auf M gleichmäßig absolut konvergent.

Bemerkung 7 $|f_\nu(z)| \leq c_\nu(z) \; \forall \nu \in \mathbb{N}$, $\forall z \in M$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(z)$ gleichmäßig konvergent auf M, $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|$ und folglich $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ gleichmäßig konvergent auf M.

Satz 5 — Potenzreihen

Vor. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$, gegeben und sei

$$R := \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty] \quad \text{(Formel von Cauchy-Hadamard)}$$

Beh. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ konvergiert absolut für $|z - z_0| < R$ und divergiert für $|z - z_0| > R$. Für jedes r mit $0 < r < R$ ist die Potenzreihe für $|z - z_0| \leq r$ gleichmäßig (absolut) konvergent. Die Potenzreihe stellt also eine für $|z - z_0| < R$ stetige Funktion dar. (R heißt *Konvergenzradius* von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$.)

Beweis

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n||z - z_0|^n} = \frac{|z - z_0|}{R} \begin{cases} < 1 & \text{für } |z - z_0| < R \\ > 1 & \text{für } |z - z_0| > R \end{cases}.$$

Der Rest der Behauptung folgt aus Satz 4 wegen $|a_n(z-z_0)^n| \leq |a_n| r^n$ für $|z-z_0| \leq r$ und $\sum |a_n| r^n < \infty$. □

Bemerkung 8 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut konvergent für $|z| < 1$, gleichmäßig konvergent für $|z| \leq r < 1$.

Beispiel 6 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \ |z| < 1.$

Definition 7

$$e^z = \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Der Konvergenzradius ist jeweils $R = \infty$, so daß alle drei obigen Funktionen stetig auf $\mathbb{C}$ sind. Wegen der absoluten Konvergenz kann die Reihe für e^{iz} beliebig umgeordnet werden.

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos z + i \sin z.$$

$$\cos(-z) = \cos z, \ \sin(-z) = -\sin z,$$

$$\Rightarrow \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (\textit{Euler Formeln}).$$

1.5 Abelsche partielle Summation, Kriterien für bedingte Konvergenz

Abelsche partielle Summation Für $a_\nu, b_\nu \in \mathbb{C}$, $\nu \in \mathbb{N}_0$, und $A_n := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ gilt

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu (b_\nu - b_{\nu+1}) + A_n b_{n+1}.$$

Beweis Mit $A_{-1} := 0$ ist

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} (A_\nu - A_{\nu-1}) b_\nu &= \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu b_\nu - \sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu b_{\nu+1} \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu (b_\nu - b_{\nu+1}) + A_n b_{n+1}.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 9 $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu$ konvergiert (gleichmäßig auf M), wenn $\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu (b_\nu - b_{\nu+1})$ konvergiert (gleichmäßig auf M) und $\lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1}$ existiert (gleichmäßig auf M).