
Mathematische Methoden der Signalverarbeitung

von
Walter Strampp,
Evgenij V. Vorozhtsov

Oldenbourg Verlag München Wien

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

© 2004 Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH
Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
www.oldenbourg-verlag.de

Das Werk einschließlich aller Abbildungen ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen.

Lektorat: Kathrin Veigel, Sabine Krüger
Titelbild: Digital Vision Ltd, London
Herstellung: Rainer Hartl
Umschlagkonzeption: Kraxenberger Kommunikationshaus, München
Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Druck: R. Oldenbourg Graphische Betriebe Druckerei GmbH

ISBN 3-486-27457-0

Vorwort

Im Allgemeinen vermitteln Signale Informationen oder Nachrichten über Vorgänge, die in einer gewissen Entfernung vom Empfänger ablaufen. Die Signalverarbeitung beschäftigt sich mit der Analyse, der Übertragung und der Synthese von Signalen. Die Methoden der Signalverarbeitung und im weiteren Sinn auch der Bildverarbeitung und der Systemtheorie beruhen auf den klassischen Ergebnissen der Fourier- und Laplacetheorie. Oft kann ein Signal nur als Dichtefunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung beschrieben werden, weil man beispielsweise die Physik des Generators nicht gut genug kennt. Diese statistischen Aspekte der Signalverarbeitung werden hier jedoch nicht betrachtet. Dafür werden den moderneren Entwicklungen auf dem Gebiet der Wavelettheorie sowie im Bereich des Softwareeinsatzes Rechnung getragen.

Die kontinuierliche und die diskrete Fourieranalyse, die Laplace- und die z-Transformation, die neuere Methode der Wavelets sowie die Theorie der linearen zeitinvarianten Systeme und Filter bilden den Hauptbestandteil des Buches. Der Bogen der Theorie soll von den Fourierreihen bis hin zu den Wavelets gespannt werden. Dabei werden aus dem ersten Studienabschnitt bekannte Dinge kurz aufgegriffen und in Richtung der Signalverarbeitung ausgebaut. Hinzu kommen Beispiele für die Umsetzung der Ergebnisse mit den Systemen MATLAB und Maple. Die Literatur zu diesem Themenkomplex ist sehr vielfältig und ausgeprägt. Man findet jedoch kaum Bücher, welche die mathematische Theorie in einer Gesamtschau mit den unerlässlichen Themen aus dem Grundlagenbereich - Funktionentheorie, Distributionen und Hilberträume - darstellen.

Es ist unmöglich, die z-Transformation zu behandeln, ohne die Grundlage der Reihenentwicklung komplexer Funktionen zu legen. Ähnliches gilt für Wavelets ohne funktionalanalytische Grundlagen oder für die Fourieranalyse ohne Distributionen. Im Gegensatz zu vielen Büchern, die sich an Ingenieure wenden, verzichten wir nicht auf mathematische Exaktheit. Wir verzichten jedoch darauf, den mathematischen Begriffsapparat unnötig aufzublähen. Die Theorie der Fourieranalyse und der Laplacetransformation ist in teilweise sehr schwierigen mathematischen Lehrbüchern gespeichert. Die Wavelettheorie findet man zum großen Teil noch in Originalarbeiten niedergelegt. Wir verstehen unsere Arbeit als Vermittlung zwischen schwer zugänglicher mathematischer Literatur und der Ingenieurpraxis.

Formale Manipulationen, die ohne fundiertes mathematisches Hintergrundwissen ausgeführt werden, sind oft wenig hilfreich und lassen die nötige Präzision vermissen. Auf der anderen Seite sind mathematische Theorien für den Ingenieur erst dann nützlich, wenn sie sich in den Anwendungen bewähren. MATLAB ist ein äußerst vielseitiges Hilfsmittel bei Problemen aus der Angewandten Mathematik und der Technik. Digitale Signale sind Folgen reeller oder komplexer Zahlen, die in Form eines Vektors geschrieben werden können. Für alle Operationen der diskreten Fouriertransformation bietet MATLAB mit den Datentypen Matrix und Vektor eine ausgezeichnete Rechenumgebung. Auf der anderen Seite bildet das Computeralgebra-System Maple ein ideales Werkzeug für alle symbolischen Rechnungen. Der Einsatz von MATLAB und Maple ist als Unterstützung beim interaktiven Lernen und bei der Bearbeiten eigener Problemstellungen gedacht. Viele typische Anwendungssituationen und die dabei benötigten Befehle und Funktionen werden erläutert.

Herrn Prof. Dr. W. J. Becker danken wir für wertvolle Diskussionen und den stetigen Einsatz für unser Projekt.

Kassel, W. Strampp, E. V. Vorozhtsov

Inhaltsverzeichnis

1	Funktionentheorie	1
1.1	Holomorphe Funktionen	1
1.2	Komplexe Integration	16
2	Fourierreihen	35
2.1	Eigenschaften der Fourierreihe	35
2.2	Konvergenz der Fourierreihe	61
3	Fouriertransformation	73
3.1	Eigenschaften der Fouriertransformation	73
3.2	Das Fourier-Integraltheorem und Folgerungen	105
4	Laplacetransformation	119
4.1	Eigenschaften der Laplacetransformation	119
4.2	Rechenregeln und Differenzialgleichungen	130
5	Distributionen	147
5.1	Begriff der Distribution	147
5.2	Fouriertransformation von Distributionen	166
6	Diskrete Fouriertransformation	183
6.1	Grundbegriffe und Eigenschaften	183
6.2	Anwendungen	195
7	z-Transformation	205
7.1	Begriff der z-Transformation	205
7.2	Eigenschaften der z-Transformation	224
7.3	Differenzgleichungen	243
8	Übertragungssysteme	251
8.1	Zustandsgleichungen und Übertragungsfunktionen	251
8.2	Frequenzcharakteristiken	276
8.3	Analoge Filter	295
8.4	Digitale Filter	318

8.5	Filter mit linearer Phase	332
9	Hilberträume	347
9.1	Skalarprodukte	347
9.2	Orthogonalität und Operatoren	360
9.3	Frames und Riesz-Basen	377
10	Wavelets	385
10.1	Gefensterte Fouriertransformation	385
10.2	Begriff der Wavelet-Transformation	393
10.3	Multiskalen-Analyse	421
	Sachwortverzeichnis	458

1 Funktionentheorie

1.1 Holomorphe Funktionen

Der Aufbau der Analysis im Komplexen geschieht analog zur reellen Analysis von Funktionen einer Variablen. Eine einzige komplexe Variable zerfällt aber in zwei reelle Variable, nämlich Real- und Imaginärteil. Genauso werden Funktionen in Real- und Imaginärteil zerlegt. Bei einer komplexen Funktion wird eine Teilmenge der z -Ebene durch $w = f(z)$ in eine w -Ebene abgebildet. Real- und Imaginärteil sind in einem entsprechenden Teilgebiet der reellen Ebene erklärt.

Real- und Imaginärteil einer komplexen Funktion:

Jedes Element $f(z)$ aus dem Bildbereich einer komplexen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, kann in Real- und Imaginärteil zerlegt werden mit reellwertigen Funktionen u und v :

$$f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i.$$

Die Zerlegung in Real- und Imaginärteil einer komplexwertigen Funktion f einer komplexen Variablen ermöglicht eine geometrische Veranschaulichung von f , indem man die beiden Funktionen u und v darstellt. Eine weitere Möglichkeit der Veranschaulichung besteht darin, im Definitionsbereich D ein Netz von Koordinatenlinien auszulegen, und das Bild dieses Netzes in der w -Ebene zu betrachten.

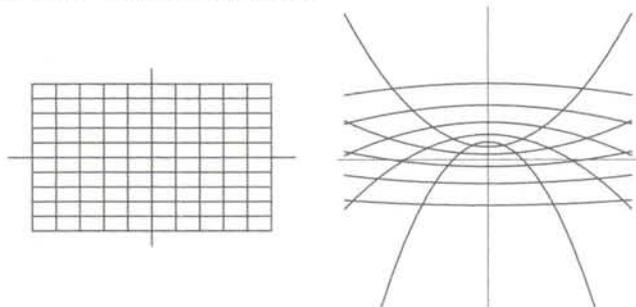


Bild 1.1: Kartesische Koordinatenlinien in der z -Ebene (links) und ihre Bilder in der w -Ebene (rechts) unter einer Abbildung $f(z)$

Beispiel 1.1**Bilder der kartesischen Koordinatenlinien unter der Quadratfunktion bestimmen:**

Wir bestimmen Real- und Imaginärteil sowie die Bilder der Koordinatenlinien

$x = x_0, y = y_0$ unter der Funktion $f(z) = z^2$.

Aus der Darstellung: $f(z) = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = u(x, y) + v(x, y)i$
folgt: $u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy$.

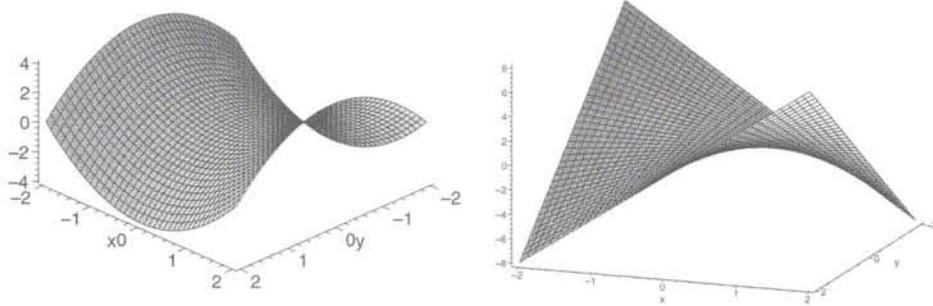


Bild 1.2: Realteil (links) und Imaginärteil (rechts) der Funktion $f(z) = z^2$

Die Bilder der Koordinatenlinien $x = x_0 \neq 0$ ergeben sich aus:

$$u(x_0, y) = x_0^2 - y^2, \quad v(x_0, y) = 2x_0y.$$

Eliminiert man den Parameter y , so bekommt man die Parabel: $u = -\frac{v^2}{4x_0^2} + x_0^2$.

Der Spezialfall $x_0 = 0$ liefert die negative u -Achse in der Bildebene.

Die Bilder der Koordinatenlinien $y = y_0 \neq 0$ ergeben sich aus:

$$u(x, y_0) = x^2 - y_0^2, \quad v(x, y_0) = 2xy_0.$$

Eliminiert man den Parameter x , so bekommt man die Parabel: $u = \frac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2$.

Der Spezialfall $y_0 = 0$ liefert die positive u -Achse in der Bildebene.

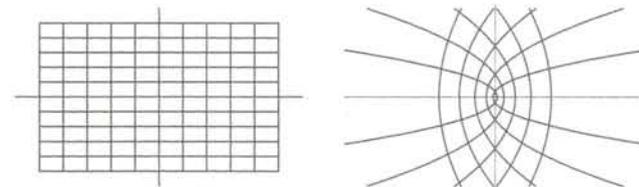


Bild 1.3: Kartesische Koordinatenlinien in der z -Ebene (links) und ihre Bilder in der w -Ebene (rechts) unter der Abbildung $f(z) = z^2$

Der Begriff der offenen Menge wird von der reellen Ebene \mathbb{R}^2 in die Gaußsche Ebene übernommen.

Offene Menge, Gebiet:

Ist $z_0 \in \mathbb{C}$ ein fester Punkt, dann stellen die Punkte z mit $|z - z_0| < r$ eine offene Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt z_0 und dem Radius r dar.

Die Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt offen, wenn zu jedem $z_0 \in D$ eine offene Kreisscheibe existiert, die ganz zu D gehört.

Man bezeichnet jede Menge: $\{z \mid |z| > \epsilon\}$ als offene Umgebung von ∞ .

Eine offene, zusammenhängende Menge heißt Gebiet.

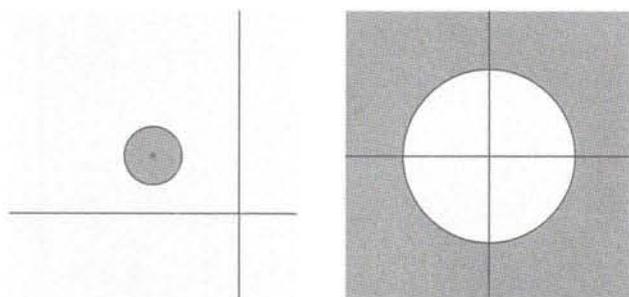


Bild 1.4: Kreisscheibe $|z - z_0| < r$ mit dem Mittelpunkt z_0 und dem Radius r (links), Umgebung von ∞ (rechts)

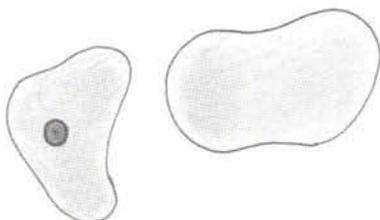


Bild 1.5: Offene Menge (nicht zusammenhängend) mit Umgebung eines Punktes

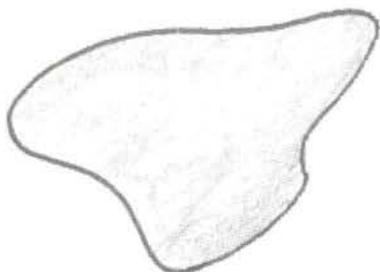


Bild 1.6: Offene zusammenhängende Menge (Gebiet)

Die Konvergenz einer Folge kann auf die Konvergenz von Real- und Imaginärteil zurückgeführt werden.

Konvergenz und Stetigkeit:

Die Definition der Konvergenz einer Folge wird direkt aus dem Reellen übernommen. Die Folge $z_n = x_n + y_n i$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ ist genau dann konvergent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z = x + y i, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

wenn die Beziehungen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ erfüllt sind. Alle Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen aus dem Reellen gelten weiter.

Die Definition der Stetigkeit, die Folgedefinition und andere Sätze lassen sich unmittelbar aus dem Reellen übernehmen. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ ist stetig in einem Punkt $z_0 \in D$, wenn für alle Folgen $\{z_n\}$ aus D gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(z_0).$$

Bei absolut konvergenten Reihen ist wie im Reellen jede Umordnung erlaubt.

Absolute Konvergenz einer Reihe:

Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} |z_\nu|$ konvergiert. Die wichtigen Konvergenzkriterien wie das Majorantenkriterium, das Quotienten- und Wurzelkriterium gelten wie im Reellen.

Beispiel 1.2**Quotienten- bzw. Wurzelkriterium anwenden:**

Mithilfe des Quotienten- bzw. Wurzelkriteriums zeigen wir, dass die folgende Reihe absolut konvergiert:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i)^{2\nu}}{2\nu + 1}.$$

Nach dem Quotienten- bzw. Wurzelkriterium konvergiert eine Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ dann absolut, wenn gilt:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \right| < 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} < 1.$$

Bei der gegebenen Reihe erhält man folgenden Betrag des Quotienten zweier aufeinander folgender Glieder:

$$\left| \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i \right|^2 \frac{2\nu + 1}{2\nu + 2} = \frac{13}{36} \frac{2\nu + 1}{2\nu + 2}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{v+1}}{a_v} \right| = \frac{13}{36} < 1.$$

Die v -te Wurzel aus dem Betrag des Reihenglieds a_v beträgt:

$$\sqrt[v]{|a_v|} = \frac{\sqrt[v]{\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i\right|^{2v}}}{\sqrt[v]{2v+1}} = \frac{13}{36} \frac{1}{\sqrt[v]{2v+1}}.$$

Hieraus ergibt sich wieder:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[v]{|a_v|} = \frac{13}{36} < 1.$$

Man kann das Quotienten- bzw. Wurzelkriterium in einer allgemeineren Form betrachten, und dann tritt auch der Unterschied der beiden Kriterien hervor. Das Wurzelkriterium ist stärker als das Quotientenkriterium.

Beispiel 1.3

Exponentialfunktion und Eulersche Formel:

Die Exponentialfunktion

$$e^z = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{z^v}{v!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

erfüllt die Funktionalgleichung $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$. Für reelle y zeigen wir die Eulersche Formel:

$$e^{yi} = \cos(y) + \sin(y)i.$$

Anschließend zerlegen wir die e-Funktion in Real- und Imaginärteil und bestimmen die Bilder der Koordinatenlinien $x = x_0$ und $y = y_0$. Ein Streifen: $\{x + yi \mid x \in \mathbb{R}, -\pi < y \leq \pi\}$ wird durch die Exponentialfunktion auf $\mathbb{C} \setminus 0$ abgebildet.

Wir setzen $z = yi$, $y \in \mathbb{R}$, in die Exponentialfunktion ein und bekommen:

$$\begin{aligned} e^{yi} &= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(yi)^v}{v!} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(yi)^{2v}}{(2v)!} + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(yi)^{2v+1}}{(2v+1)!} \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v y^{2v}}{(2v)!} + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v y^{2v+1}}{(2v+1)!} i \\ &= \cos(y) + \sin(y)i. \end{aligned}$$

(Bei der letzten Umformung benutzt man die Taylorentwicklung der reellen Sinus- bzw. Cosinusfunktion). Mit der Funktionalgleichung kann die Exponentialfunktion nun in Real- und Imaginärteil zerlegt werden: $e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x (\cos(y) + \sin(y)i)$.

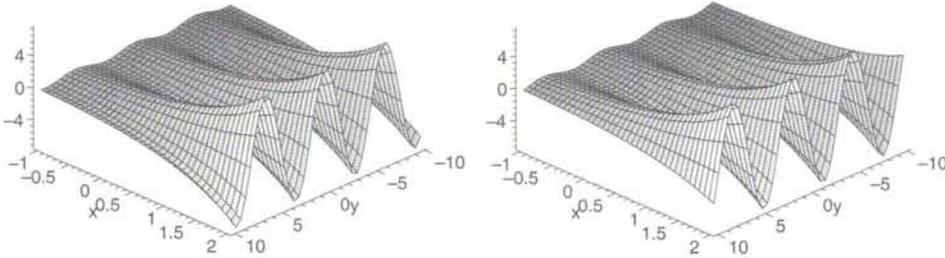


Bild 1.7: Realteil (links) und Imaginärteil (rechts) der Exponentialfunktion

Die Strecken $z = x_0 + yi$, $-\pi < y \leq \pi$ werden von der Exponentialfunktion auf Kreise mit dem Radius e^{x_0} in der w -Ebene abgebildet. Dadurch wird die ganze w -Ebene mit Ausnahme des Nullpunktes ausgeschöpft.

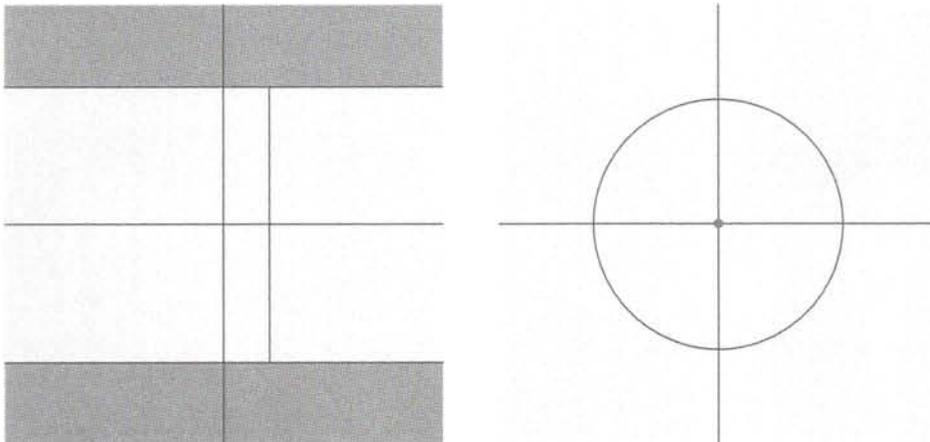


Bild 1.8: Der Streifen $-\pi < y \leq \pi$ in der z -Ebene (links) und sein Bild in der w -Ebene (rechts) unter der Abbildung e^z

Die Differenzierbarkeit einer Funktion wird analog zum reellen Fall über den Differenzenquotienten erklärt.

Differenzierbarkeit im Komplexen, Holomorphie:

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt differenzierbar im Punkt $z_0 \in D$, wenn folgender Grenzwert existiert:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Folgende Schreibweisen für die Ableitung sind üblich:

$$f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) = \frac{d}{dz}f(z_0).$$

Alle Rechenregeln wie Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel werden direkt übertragen.

Ist eine Funktion in jedem Punkt einer offenen Menge D differenzierbar und die Ableitung f' stetig in D , dann heißt f holomorph in D .

Der Unterschied zur Differenzierbarkeit einer Funktion einer reellen Variablen ergibt sich dadurch, dass man auf den verschiedensten Wegen in der komplexen Ebene zur Grenze übergehen kann. Wir zerlegen eine komplexe Funktion und schließen auf die partielle Differenzierbarkeit von Real- und Imaginärteil. Man nähert sich der Grenze z_0 einerseits auf einer Parallelen zur reellen Achse und andererseits auf einer Parallelen zur imaginären Achse.

Komplexe und partielle Differenzierbarkeit:

Die Funktion f besitze folgende Zerlegung in Real- und Imaginärteil:

$$f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i.$$

Ist f im Punkt $z_0 = x_0 + y_0i$ differenzierbar, dann existieren die partiellen Ableitungen von u und v in (x_0, y_0) , und es gilt:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)i = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)i.$$

Nimmt man den Grenzübergang auf einer Parallelen zur reellen Achse $z = z_0 + h$ vor, so ergibt sich:

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h}i.$$

Nimmt man den Grenzübergang auf einer Parallelen zur imaginären Achse $z = z_0 + hi$ vor, so ergibt sich:

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{u(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0)}{hi} + \frac{v(x_0, y_0 + h) - v(x_0, y_0)}{h}.$$

Aus der Darstellung der Ableitung durch die partiellen Ableitungen ergeben sich die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen, über die wir den vollständigen Zusammenhang zwischen komplexer und reeller Differenzierbarkeit erhalten.

Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichungen:

Aus der komplexen Differenzierbarkeit ergeben sich stets die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y).$$

Umgekehrt gilt: Erfüllen die auf der offenen Teilmenge D der Gaußschen Ebene erklärten, stetig differenzierbaren Funktionen $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt (x_0, y_0) die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen, dann ist die Funktion

$$f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$$

in $z_0 = x_0 + y_0 i$ komplex differenzierbar.

Man bräuchte eigentlich gar keine komplexen, differenzierbaren Funktionen einzuführen. Man könnte statt dessen mit einem Paar von stetig differenzierbaren Funktionen in zwei reellen Variablen arbeiten, welche die Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichungen erfüllen. Man nennt solche Paare konjugiert harmonische Funktionen. Es zeigt sich, dass eine holomorphe Funktion beliebig oft komplex differenzierbar ist. Damit sind Real- und Imaginärteil beliebig oft differenzierbare reellwertige Funktionen.

Differenziert man die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen jeweils nach x und nach y und berücksichtigt die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Ableitungen, so ergibt sich:

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) = 0.$$

Der Realteil u und der Imaginärteil v einer holomorphen Funktion genügen also der Potenzialgleichung. Man nennt solche Funktionen Potenziale oder harmonische Funktionen.

Wir führen noch wie im Reellen die Stammfunktion ein.

Stammfunktion:

Ist eine Funktion f in einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ erklärt und holomorph, so bezeichnen wir f als Stammfunktion von f' . Wie im Reellen gilt, dass sich zwei Stammfunktionen von ein und der selben Funktion nur um eine additive Konstante unterscheiden können, wenn D zusätzlich noch zusammenhängend ist.

Beispiel 1.4**Holomorphie der e-Funktion mit den Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen bestätigen:**

Mithilfe der Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen zeigen wir, dass die Exponentialfunktion holomorph ist, und dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\frac{d}{dz}e^z = e^z$.

Wir zerlegen in Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+yi} = e^x e^{yi} \\ &= e^x \cos(y) + e^x \sin(y) i = u(x, y) + v(x, y) i. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= e^x \cos(y), & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= -e^x \sin(y), \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= e^x \sin(y), & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &= e^x \cos(y). \end{aligned}$$

Damit sind die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen erfüllt, und die komplexe Ableitung kann berechnet werden:

$$\frac{d}{dz} e^z = e^x \cos(y) + e^x \sin(y) i = e^z.$$

Beispiel 1.5

Reelle Differenzierbarkeit des Arguments bestätigen:

Gegeben sei die Argumentfunktion in der Form:

$$\arg(z) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right), & y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right), & y < 0 \end{cases}$$

mit $z = x + yi$, $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ und der Umkehrfunktion \arccos von $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$. Wir zeigen, dass die Funktion $v(x, y) = \arg(x + yi)$ in der Ebene mit Ausnahme des Nullpunktes und der negativen x -Achse stetige partielle Ableitungen besitzt.

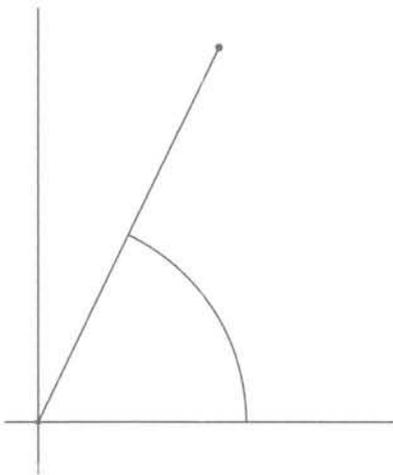


Bild 1.9: Das Argument einer komplexen Zahl

Wir benutzen die Ableitung des Arcuscosinus:

$$\frac{d}{ds} \arccos(s) = -\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}, \quad -1 < s < 1,$$

und die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x} r = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial}{\partial y} r = \frac{y}{r}.$$

Dann gilt zunächst für alle Punkte mit $x \neq 0$ und $y > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) &= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}} \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) = -\frac{y^2}{\sqrt{y^2}} \frac{1}{r^2} = -\frac{y}{r^2}, \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} v(x, y) &= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{r} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}} \left(-\frac{xy}{r^3} \right) = \frac{xy}{\sqrt{y^2}} \frac{1}{r^2} = \frac{x}{r^2}. \end{aligned}$$

Analog erhält man für Punkte mit $x \neq 0$ und $y < 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) &= \frac{y^2}{\sqrt{y^2}} \frac{1}{r^2} = -\frac{y}{r^2}, \\ \frac{\partial}{\partial y} v(x, y) &= -\frac{xy}{\sqrt{y^2}} \frac{1}{r^2} = \frac{x}{r^2}. \end{aligned}$$

Schließlich überzeugt man sich für $x > 0$ von $\frac{\partial}{\partial x} v(x, 0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial y} v(x, 0) = 0$ und der Stetigkeit der partiellen Ableitungen.

Beispiel 1.6

Holomorphie der Logarithmusfunktion mit den Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen bestätigen:

Mithilfe des (reellen) natürlichen Logarithmus wird für $z \neq 0$ der Hauptzweig des (komplexen) Logarithmus erklärt:

$$\log(z) = \ln(|z|) + \arg(z) i.$$

Wir zeigen, dass gilt:

$$\log(e^z) = z, \quad -\pi < y \leq \pi \quad \text{bzw.} \quad e^{\log(z)} = z, \quad z \neq 0.$$

Ferner zeigen wir, dass die Logarithmusfunktion im Gebiet

$$\mathbb{C} \setminus \{z \mid \Re(z) \leq 0, \Im(z) = 0\}$$

holomorph ist mit der Ableitung:

$$\frac{d}{dz} \log(z) = \frac{1}{z}.$$

Offensichtlich gilt für $z = x + yi$, $-\pi < y \leq \pi$, gemäß der Festlegung des Arguments:

$$\log(e^z) = \log(e^x e^{yi}) = \ln(e^x) + yi = x + yi = z.$$

Umgekehrt gilt für $z \neq 0$:

$$e^{\log(z)} = e^{\ln(|z|) + \arg(z)i} = e^{\ln(|z|)} e^{\arg(z)i} = |z| e^{\arg(z)i} = z.$$

Zerlegen wir die log-Funktion in Real- und Imaginärteil, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \log(x + yi) &= \frac{\ln(x^2 + y^2)}{2} + \arg(x + yi)i \\ &= u(x, y) + v(x, y)i. \end{aligned}$$

Die Argumentfunktion ist auf der negativen reellen Achse unstetig und damit nicht differenzierbar. Sonst gilt aber mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) = \frac{x}{r^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) = \frac{y}{r^2}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} v(x, y) = -\frac{y}{r^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} v(x, y) = \frac{x}{r^2}.$$

Das heißt, die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen garantieren die Holomorphie. Insbesondere zeigt sich, dass die reellwertige Funktion $\ln(x^2 + y^2)$ die Potenzialgleichung erfüllt.

Beispiel 1.7

Ableitung von Sinus, Cosinus, Sinushyperbolicus und Cosinushyperbolicus berechnen:

Mithilfe der Exponentialfunktion werden die Funktionen Sinus, Cosinus, Sinushyperbolicus und Cosinushyperbolicus wie folgt in \mathbb{C} erklärt:

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

und

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Wir berechnen jeweils die Ableitung.

Aus der Definition und der Holomorphie von e^z folgt, dass $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\sinh(z)$ und $\cosh(z)$ in ganz \mathbb{C} holomorph sind. Ferner gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \sin(z) &= \frac{1}{2i} (i e^{iz} + i e^{-iz}) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \\ \frac{d}{dz} \cos(z) &= \frac{1}{2} (i e^{iz} - i e^{-iz}) = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \end{aligned}$$

d. h., für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\frac{d}{dz} \sin(z) = \cos(z), \quad \frac{d}{dz} \cos(z) = -\sin(z).$$

Genauso folgt:

$$\frac{d}{dz} \sinh(z) = \cosh(z), \quad \frac{d}{dz} \cosh(z) = \sinh(z).$$

MAPLE:

Beim Differenzieren geht Maple stets von der Definition einer Funktion in der komplexen Ebene aus. Benutzt wird der Befehl `diff`.

```
diff(exp(z), z);
```

$$\frac{\partial}{\partial z} e^z = e^z$$

```
diff(sinh(z), z);
```

$$\frac{\partial}{\partial z} \sinh(z) = \cosh(z)$$

MATLAB:

MATLAB benützt ebenfalls den Befehl `diff` für das symbolische Differenzieren. Die symbolischen Variablen müssen mithilfe des Befehls `syms` deklariert werden.

```
syms z
latex(diff(exp(z), 'z'))
```

$$e^z$$

```
latex(diff(sinh(z), 'z'))
```

$$\cosh(z)$$

Beispiel 1.8**Potenz im Komplexen betrachten:**

Wir überlegen uns, dass die Potenzfunktion z^n , $n \in \mathbb{N}$ die Teilmenge:

$$S_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{n} < \arg(z) \leq \frac{\pi}{n} \right\}$$

der z -Ebene umkehrbar eindeutig auf die ganze w -Ebene abbildet und dass die Umkehrung durch den Hauptzweig der n -ten Wurzel gegeben wird:

$$\sqrt[n]{z} = e^{\frac{\log(|z|) + \arg(z)i}{n}}, \quad z \neq 0.$$

Ferner bestimmen wir das Bild des Quadrats $z = x + yi$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ unter der Abbildung $w = z^3$.

Es gilt $0^n = 0$. Der Logarithmus bildet $\mathbb{C} \setminus 0$ eindeutig auf den Streifen $-\pi < y \leq \pi$ ab und auf diesem Streifen wirkt die Exponentialfunktion als Umkehrfunktion des Logarithmus. Für $z \neq 0$ schreiben wir:

$$z = e^{\log(z)} = e^{\log(|z|) + \arg(z)i}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$z^n = e^{(\log(|z|) + \arg(z)i)n}$$

und man sieht sofort, dass die Potenz z^n den Sektor umkehrbar eindeutig auf die ganze w -Ebene abbildet.

Wir beschreiben das Quadrat durch (a) Strecken mit Endpunkten $1 + yi$, $0 \leq y \leq 1$:

$$t(1 + yi), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

und Strecken (b) mit Endpunkten $x + i$, $0 \leq x < 1$:

$$t(x + i), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Offensichtlich genügt es, jeweils nur den Endpunkt einer Strecke abzubilden und dann vom Nullpunkt in der w -Ebene eine Strecke zum Bild des Endpunkts zu zeichnen.

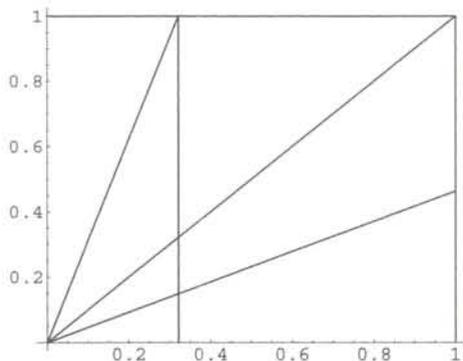


Bild 1.10: Strahlen im Quadrat
 $z = x + yi$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$

Im Fall (a) gilt für das Argument $\varphi = \arg(1 + yi)$:

$$y = \arctan(\varphi) \iff \varphi = \tan(y).$$

Im Fall (b) gilt für das Argument $\varphi = \arg(x + i)$:

$$x = \operatorname{arccot}(\varphi) \iff \varphi = \cot(x).$$

Hieraus ergibt sich das Bild des Endpunktes im Fall (a):

$$\left(\sqrt{1+y^2}\right)^3 (\cos(3 \arctan(y)) + \sin(3 \arctan(y)) i)$$

und im Fall (b):

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3 ((\cos(3 \operatorname{arccot}(x)) + \sin(3 \operatorname{arccot}(x)) i) .$$

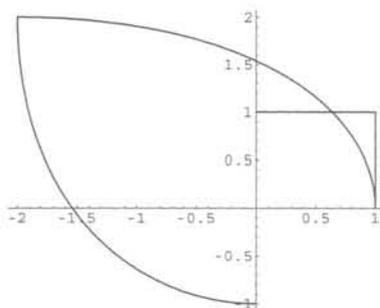


Bild 1.11: Das Quadrat
 $z = x + yi, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$
 und sein Bild unter der Abbildung $w = z^3$.

Beispiel 1.9

Differenzierbarkeit nachweisen, Urbilder der Koordinatenlinien bestimmen:

Wir bestimmen den Real- und Imaginärteil der Funktion $f(z) = \frac{1}{z}, z \neq 0$, und zeigen mithilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, dass f holomorph ist. Ferner bestimmen wir die Urbilder der Koordinatenlinien $u = u_0$ und $v = v_0$.

Wir zerlegen f in Real- und Imaginärteil ($x \neq 0, y \neq 0$):

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x + yi) = \frac{1}{x + yi} \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i \\ &= u(x, y) + v(x, y) i. \end{aligned}$$

In $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ sind Real- und Imaginärteil stetig partiell differenzierbar, und es gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y).$$

Somit ergibt sich die Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) i \\ &= -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} i = -\frac{x^2 - y^2 - 2xy i}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{1}{z^2}. \end{aligned}$$

Die Urbilder der Koordinatenlinien in der w -Ebene $u = u_0 \neq 0$ bzw. $v = v_0 \neq 0$ lauten in der z -Ebene:

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = u_0 \iff \left(x - \frac{1}{2u_0}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4u_0^2}$$

bzw.

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = -v_0 \iff x^2 + \left(y + \frac{1}{2v_0}\right)^2 = \frac{1}{4v_0^2}.$$

Das Urbild der v -Achse $u = 0, v \neq 0$ ist die y -Achse $x = 0, y \neq 0$. Das Urbild der u -Achse $v = 0, u \neq 0$ ist die x -Achse $y = 0, x \neq 0$.

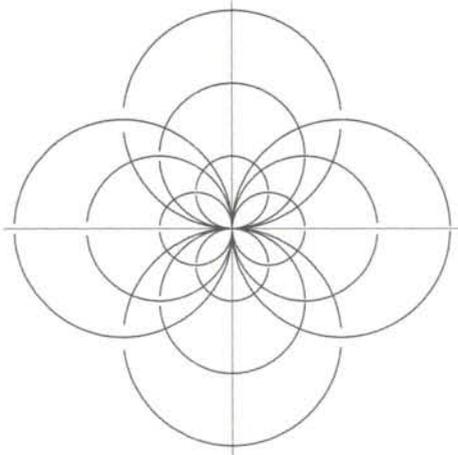


Bild 1.12: Urbilder der Koordinatenlinien

$$\begin{aligned} &u = u_0, v = v_0 \\ &\text{in der } z\text{-Ebene unter} \\ &f(z) = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

1.2 Komplexe Integration

Wir betrachten zuerst eine komplexwertige Funktion $f(t)$ einer reellen Variablen und zerlegen sie in Real- und Imaginärteil: $f(t) = u(t) + v(t)i$. Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer solchen Funktion werden durch die entsprechenden Eigenschaften des Real- und Imaginärteils gegeben. Setzt man stetig differenzierbare Funktionen aneinander, so entstehen in den Teilpunkten Unstetigkeiten in der Funktion selbst oder in der Ableitung.

Stückweise glatte Funktion:

Die Funktion $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *stückweise glatt*, wenn es eine Zerlegung von $[\alpha, \beta]$ in endlich viele Teilintervalle gibt, sodass f in jedem Teilintervall einschließlich den Randpunkten stetig differenzierbar ist. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *stückweise glatt*, wenn sie in jedem endlichen Teilintervall stückweise glatt ist.

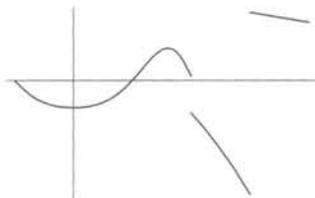


Bild 1.13: Eine reellwertige stückweise glatte Funktion (links). Eine komplexwertige, stückweise glatte Funktion einer reellen Variablen gezeichnet im Raum $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ (rechts).

Wie beim Differenzieren geht man beim Integrieren einer komplexwertigen Funktion einer reellen Variablen vor. Die Operation wird im Realteil und im Imaginärteil ausgeführt und anschließend fasst man die Teile zusammen.

Integration einer komplexwertigen Funktion einer reellen Variablen:

Eine stetige, komplexwertige Funktion einer reellen Variablen

$$f(t) = u(t) + v(t)i, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

wird integriert, indem man Real- und Imaginärteil integriert:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} u(t) dt + \left(\int_{\alpha}^{\beta} v(t) dt \right) i.$$

Mit komplexwertigen Funktionen einer reellen Variablen beschreiben wir Kurven in der Gaußschen Ebene. Man schreibt dann $z(t) = x(t) + y(t)i$. Eine Kurve $z(t)$ heißt *glatt*, wenn in jedem Punkt eine Tangente existiert, d.h. wenn stets $z'(t) = x'(t) + y'(t)i \neq 0$ gilt. Eine *stückweise glatte* Kurve wird aus glatten Teilstücken zusammengesetzt.

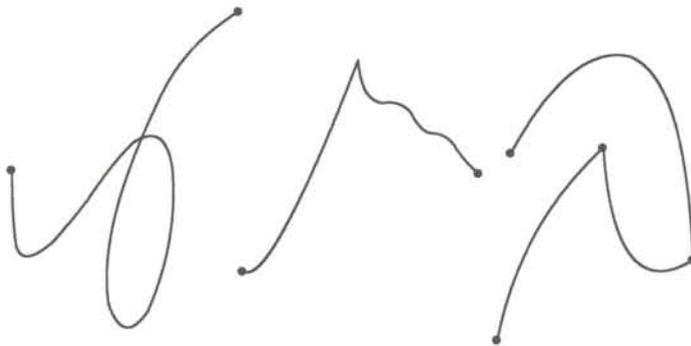


Bild 1.14: Glatte Kurve $z'(t) \neq 0$ (links), nicht glatte Kurve: in der Spitze existiert keine eindeutige Tangente (Mitte), stückweise glatte Kurve: drei glatte Kurvenstücke werden zusammengesetzt (rechts)

Analog zum reellen Kurvenintegral können wir damit das Integral einer komplexen Funktion längs einer Kurve in der komplexen Ebene erklären.

Kurvenintegral:

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und durch $t \rightarrow z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, werde eine glatte Kurve $\Gamma \subseteq D$ gegeben. Dann heißt:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt$$

das Kurvenintegral von f längs Γ . Wenn eine stückweise glatte Kurve aus endlich vielen glatten Kurvenstücken $\Gamma_1(t), \Gamma_2(t), \dots, \Gamma_n(t)$ besteht, definiert man entsprechend:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f(z) dz.$$

Es gilt:

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |z'(t)| dt \max_{z \in \Gamma} |f(z)|.$$

Das Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} |z'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

stellt die Länge der Kurve dar. Der Betrag des Kurvenintegrals wird durch das Produkt aus der Kurvenlänge und dem Maximum des Betrags der Funktionswerte auf der Kurve beschränkt.

Beispiel 1.10**Zusammenhang zwischen komplexen und reellen Kurvenintegralen:**

Ein komplexes Kurvenintegral kann in zwei reelle Kurvenintegrale zerlegt werden:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} (u(x, y) dx - v(x, y) dy) + \left(\int_{\Gamma} (v(x, y) dx + u(x, y) dy) \right) i.$$

Nach Definition des Integrals einer Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{C} besteht das Kurvenintegral aus einer Summe, die mit zwei reellen Integralen bzw. Kurvenintegralen gebildet wird. Mit $f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y) i$ und $z(t) = x(t) + y(t) i$, $t \in [\alpha, \beta]$, ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} (u(x(t), y(t)) + v(x(t), y(t)) i) (x'(t) + y'(t) i) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t)) dt \\ &\quad + \int_{\alpha}^{\beta} (u(x(t), y(t)) y'(t) + v(x(t), y(t)) x'(t)) dt i \\ &= \int_{\Gamma} (u(x, y) dx - v(x, y) dy) + \int_{\Gamma} (v(x, y) dx + u(x, y) dy) i. \end{aligned}$$

Wie im Reellen lässt sich das Kurvenintegral sehr einfach angeben, wenn man eine Stammfunktion hat.

Kurvenintegral mit Stammfunktionen berechnen:

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit der Stammfunktion F und $t \rightarrow z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ eine glatte Kurve $\Gamma \subset D$. Dann gilt:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = F(z(\beta)) - F(z(\alpha)).$$

Man überlegt sich zuerst:

$$\frac{d}{dt} F(z(t)) = f(z(t)) z'(t).$$

Ist nämlich $z(t) = x(t) + y(t)i$ und $F(z) = u(x, y) + v(x, y)i$ so gilt nach den Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} F(z(t)) &= \frac{d}{dt} u(x(t), y(t)) + \frac{d}{dt} v(x(t), y(t)) i \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} u(x(t), y(t)) x'(t) + \frac{\partial}{\partial y} u(x(t), y(t)) y'(t) \\
 &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x} v(x(t), y(t)) x'(t) + \frac{\partial}{\partial y} v(x(t), y(t)) y'(t) \right) i \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} u(x(t), y(t)) (x'(t) + y'(t)i) \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial x} v(x(t), y(t)) (-y'(t) + x'(t)i) \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x(t), y(t)) + \frac{\partial}{\partial x} v(x(t), y(t)) i \right) (x'(t) + y'(t)i) \\
 &= f(z(t)) z'(t).
 \end{aligned}$$

Mit der Zerlegung in Real- und Imaginärteil ergibt sich nun:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} F(z(t)) dt \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} \Re(F(z(t))) dt + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} \Im(F(z(t))) dt i \\
 &= \Re(F(z(\beta))) - \Re(F(z(\alpha))) + (\Im(F(z(\beta))) - \Im(F(z(\alpha)))) i.
 \end{aligned}$$

Beispiel 1.11

Kurvenintegrale mit einer Stammfunktion und nach Definition berechnen:

Die Kurve Γ werde gegeben durch: $z(t) = 1 + e^{ti}$, $0 \leq t \leq \pi$. Wir berechnen folgende Kurvenintegrale:

$$\int_{\Gamma} \bar{z} dz \quad \text{bzw.} \quad \int_{\Gamma} \cos(z) dz.$$

Beim ersten Integral gehen wir nach Definition und beim zweiten mithilfe einer Stammfunktion vor. Nach Definition des Kurvenintegrals ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \bar{z} dz &= \int_0^{\pi} (1 + e^{-ti}) i e^{ti} dt = \int_0^{\pi} (e^{ti} i + i) dt \\
 &= e^{ti} \Big|_0^{\pi} + ti \Big|_0^{\pi} = -2 - \pi i.
 \end{aligned}$$

Mit der Stammfunktion $-\sin(z)$ bekommen wir:

$$\int_{\Gamma} \cos(z) dz = -\sin(1 + e^{\pi i}) + \sin(1 + e^{0i}) = \sin(1).$$

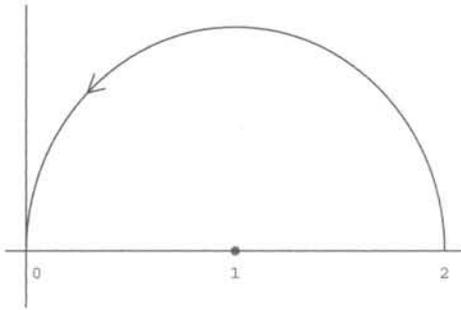


Bild 1.15: Der Integrationsweg $z(t) = 1 + e^{ti}$, $0 \leq t \leq \pi$

Beispiel 1.12

Kurvenintegrale mit einer Stammfunktion und nach Definition berechnen:

Sei $m \in \mathbb{Z}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Wir zeigen für das Kurvenintegral über den Kreis um z_0 mit dem Radius r :

$$\int_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } m \in \mathbb{Z}, m \neq -1, \\ 2\pi i & , \text{ falls } m = -1. \end{cases}$$

Für $m = -1$ schreiben wir mit $z(t) = z_0 + r e^{ti}$, $t \in [0, 2\pi]$:

$$\int_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^{-1} dz = \int_0^{2\pi} r^{-1} e^{-ti} i r e^{ti} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

Für $m \neq -1$ liegt in dem Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ eine Stammfunktion vor:

$$\frac{d}{dz} \frac{(z - z_0)^{m+1}}{m+1} = (z - z_0)^m, \quad m \neq -1.$$

Da Anfangs- und Endpunkt der Kurve übereinstimmen folgt:

$$\int_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^m dz = z(2\pi) - z(0) = 0.$$

Wir zeichnen eindeutige, doppelpunktfreie Kurven aus. Sind solche Kurven geschlossen, so beranden sie beschränkte, einfach zusammenhängende Gebiete.

Jordan-Kurve:

Ist die Abbildung $\Gamma : t \rightarrow z(t)$, $\Gamma : [\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{C}$, umkehrbar, so heißt Γ Jordan-Kurve. Stimmen Anfangs- und Endpunkt einer Jordan-Kurve überein, so bezeichnet man die Kurve als geschlossen. Eine geschlossene Jordankurve Γ ist positiv orientiert, wenn beim Durchlaufen von Γ das von der Kurve berandete, einfach zusammenhängende Gebiet stets auf der linken Seite liegt.



Bild 1.16: Jordan-Kurve: es treten keine Doppelpunkte auf (links), geschlossene, positiv orientierte Jordan-Kurve (Mitte), geschlossene, negativ orientierte Jordan-Kurve (rechts),

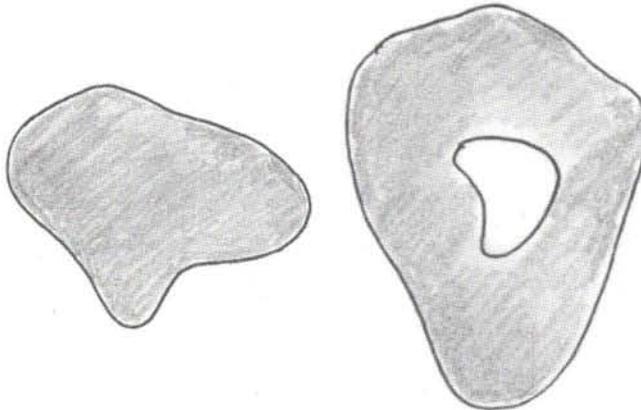


Bild 1.17: Einfach zusammenhängendes Gebiet (links), nicht einfach zusammenhängendes Gebiet (rechts),

Der Cauchysche Integralsatz liefert die Grundlage für die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals.

Cauchyscher Integralsatz, Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals:

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f eine in D holomorphe Funktion. Dann gilt für jede glatte, geschlossene Jordankurve $\Gamma \subset D$:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Stimmen Anfangs- und Endpunkt zweier Kurven Γ_1 und Γ_2 überein, so gilt:

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

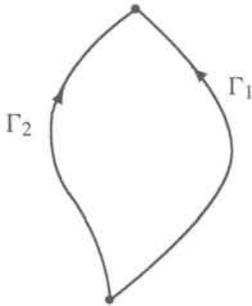


Bild 1.18: Kurven Γ_1 und Γ_2 mit jeweils übereinstimmendem Anfangs- und Endpunkt

Der Cauchysche Integralsatz ist eine Folgerung aus den Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen und dem Greenschen Satz aus der Vektoranalysis. Der Cauchysche Integralsatz kann oft zur Berechnung reeller Integrale herangezogen werden.

Beispiel 1.13**Ein reelles Integral mithilfe des Cauchyschen Integralsatzes berechnen:**

Wir integrieren die Funktion $\frac{e^{aiz}}{z}$ über einen Halbkreis mit Mittelpunkt null in der oberen Halbebene und zeigen, dass für alle $a > 0$ gilt:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(at)}{t} dt = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos(at)}{t} dt = 0.$$

Wir integrieren über einen im positiven Sinn durchlaufenen Halbkreis Γ_r , der die Punkte $z = r$ und $z = -r$, $z = re^{i\varphi}$ miteinander verbindet:

$$\int_{\Gamma_r} \frac{e^{aiz}}{z} dz = i \int_0^{\pi} e^{air \cos(\varphi)} e^{-ar \sin(\varphi)} d\varphi.$$

Hieraus schließen wir:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{aiz}}{z} dz = \pi i \quad \text{und} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} \frac{e^{aiz}}{z} dz = 0.$$

Die erste Behauptung ist klar. Zum Nachweis der zweiten schätzen wir ab und benutzen den Mittelwertsatz der Integralrechnung:

$$\left| \int_{\Gamma_r} \frac{e^{aiz}}{z} dz \right| \leq \int_0^\pi e^{-ar \sin(\varphi)} d\varphi = \pi e^{-ar \sin(\tilde{\varphi})}$$

mit einer Zwischenstelle $0 < \tilde{\varphi} < \pi$. Für wachsende r fallen die Funktionen $e^{-ar \sin(\varphi)}$ und damit die Integrale. Somit fallen auch die Zwischenstellen gegen die Minimalstelle der Funktionen $\frac{\pi}{2}$ und die Behauptung folgt.

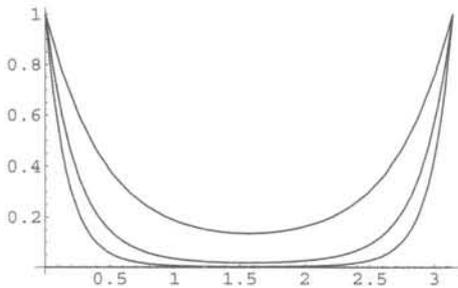


Bild 1.19: Die Funktionen $e^{-ar \sin(\varphi)}$ für wachsende r .

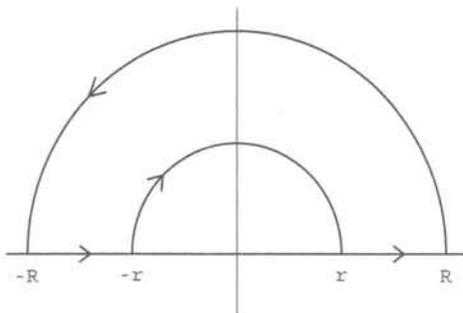


Bild 1.20: Integrationsweg zur Bestimmung des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\sin(at)}{t} dt$$

Integrieren wir nun über einen geschlossenen Weg $\Gamma_R \cup \Gamma_1 \cup (-\Gamma_r) \cup \Gamma_2$, der $z = 0$ nicht enthält, so folgt nach dem Cauchyschen Integralsatz:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ait}}{t} dt = \pi i.$$

Durch Zerlegung des Integrals in Real- und Imaginärteil folgen die behaupteten Beziehungen. Wir bemerken noch, dass die Grenzübergänge gleichmäßig in a erfolgen, wenn man sich auf $a \geq a_0 > 0$ einschränkt.

MAPLE:

Reelle Integrale werden mit `int` berechnet.

```
int(sin(a*t)/t, t=0..infinity);
```

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(at)}{t} dt = \frac{1}{2} \operatorname{signum}(a) \pi$$

MATLAB:

Reelle Integrale werden analog mit `int` berechnet.

```
syms a t
latex(int(sin(a*t)./t, t, 0, inf))
```

$$1/2 \operatorname{signum}(a) \pi$$

Die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals nach dem Cauchyschen Integralsatz ist schließlich entscheidend dafür, dass man für jede holomorphe Funktion Stammfunktionen bekommen kann.

Stammfunktion durch Kurvenintegrale:

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f eine in D holomorphe Funktion. Wir bezeichnen das Integral längs einer glatten, die Punkte $z_0, z \in D$ verbindenden Kurve Γ mit:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta.$$

Das Kurvenintegral: $\int_{z_0}^z f(z) dz$ bildet eine Stammfunktion von f :

$$\frac{d}{dz} \int_{z_0}^z f(z) dz = f(z).$$

Die erste wichtige Konsequenz aus dem Cauchyschen Integralsatz stellt die Cauchysche Integralformel dar. Die Werte einer holomorphen Funktion im Inneren eines einfachen zusammenhängenden Gebiets sind bereits durch die Werte auf dem Rand bestimmt.

Cauchysche Integralformel:

Sei D ein einfach zusammenhängendes Gebiet, f eine in D holomorphe Funktion und $\Gamma \subset D$ eine geschlossene Jordankurve mit positiver Orientierung. Dann gilt für alle Punkte z aus dem Inneren der Kurve Γ :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Zunächst wird das Integral über die Kurve Γ durch ein Integral über einen Kreis $|\zeta - z| = r$ dargestellt.

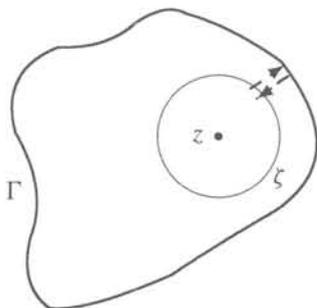


Bild 1.21: Integrationsweg bei der Cauchyschen Integralformel. Der Kreis um z wird durch ein Geradenstück mit der Kurve Γ verbunden. Das Geradenstück wird zweimal durchlaufen. Die beiden Integrationen heben sich auf.

Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Mit der Parametrisierung $\zeta = z + r e^{ti}$ folgt:

$$\int_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + r e^{ti})}{r e^{ti}} i r e^{ti} dt = i \int_0^{2\pi} f(z + r e^{ti}) dt.$$

Schließlich geht $r \rightarrow 0$: $\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z)$.

Ein wesentlicher Unterschied zur reellen Analysis besteht darin, dass eine einmal differenzierbare komplexe Funktion beliebig oft differenzierbar ist und in eine Taylorreihe entwickelt werden kann. Die Cauchysche Integralformel kann nämlich wie folgt verallgemeinert werden. Im Inneren der Kurve Γ besitzt f stetige Ableitungen beliebig hoher Ordnung, und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Hieraus ergibt sich die Taylorentwicklung.

Taylorreihe:

Die Funktion f sei in der Kreisscheibe: $\{z \mid |z - z_0| < r, 0 < r\}$ holomorph. Dann ist f in diesem Gebiet beliebig oft differenzierbar und lässt sich in eine Taylorreihe entwickeln:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} (z - z_0)^{\nu}.$$

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig in jeder Teilscheibe $|z - z_0| \leq \tilde{r} < r$, und die Koeffizienten a_{ν} , $\nu \geq 0$, ergeben sich als Integrale über einen im entgegengesetzten Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreis mit Radius $\rho < r$:

$$a_{\nu} = \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{\nu+1}} dz.$$

Der Grundgedanke der Taylorentwicklung besteht zunächst in der Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{\nu}}{(\zeta - z_0)^{\nu+1}}, \end{aligned}$$

die man in die Cauchysche Integralformel einsetzt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=r} f(\zeta) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{\nu}}{(\zeta - z_0)^{\nu+1}} d\zeta \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{\nu+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^{\nu}. \end{aligned}$$

Nimmt man eine Taylorentwicklung vor, so muss man also nicht wie im reellen Fall den Konvergenzradius ermitteln. Die Taylorreihe konvergiert in einem Kreis um den Entwicklungspunkt z_0 , solange man dabei ganz im Holomorphiegebiet bleibt.

Beispiel 1.14**Taylorentwicklung vornehmen:**

Wir entwickeln die Funktion:

$$f(z) = \log(1 + z)$$

in eine Taylorreihe um $z = 0$. Durch Differenzieren bekommen wir:

$$f'(z) = \frac{1}{1+z}, \quad f''(z) = -\frac{1}{(1+z)^2}, \quad f'''(z) = \frac{2}{(1+z)^3}, \dots$$

Mit vollständiger Induktion kann man nun sehen, dass gilt:

$$f^{(v)}(0) = (-1)^{v+1} (v-1)!.$$

Die Taylorreihe nimmt damit die folgende Gestalt an:

$$\log(1+z) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^{v+1}}{v} z^v.$$

Die Funktion $f(z) = \log(1+z)$ ist in einer Kreisscheibe um $z_0 = 0$ mit dem Radius $r = 1$ holomorph, und damit konvergiert die Taylorentwicklung absolut und gleichmäßig innerhalb jeder Kreisscheibe $|z - z_0| \leq \tilde{r} < r$.

Eine wichtige Folgerung der Taylorentwicklung ist der Identitätssatz. Zwei holomorphe Funktionen f und g stimmen in einem Gebiet D genau dann überein, wenn ihre sämtlichen Ableitungen $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ in einem beliebigen Entwicklungspunkt $z_0 \in D$ übereinstimmen. Eine dazu äquivalente Bedingung lautet, dass $f(z_n) = g(z_n)$ gilt, für die Glieder einer konvergenten Folge $z_n \in D$, deren Grenzwert auch in D liegt.

Wir betrachten Funktionen, die in einem Kreisring holomorph sind. Anstelle der Taylorentwicklung, bekommen wir nun eine Laurententwicklung.

Laurentreihe:

Die Funktion f sei im Kreisring: $\{z \mid r < |z - z_0| < R, 0 < r < R\}$ holomorph. Dann lässt sich f in diesem Gebiet in eine Laurentreihe entwickeln:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{v=0}^{\infty} a_v (z - z_0)^v + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{a_{-v}}{(z - z_0)^v} \\ &= \sum_{v=-\infty}^{\infty} a_v (z - z_0)^v. \end{aligned}$$

Beide Reihen konvergieren absolut und gleichmäßig in jedem Teilring $r < \tilde{r} \leq |z - z_0| \leq \tilde{R} < R$, und die Koeffizienten a_v , $v \in \mathbb{Z}$, ergeben sich als Integrale über einen im entgegengesetzten Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreis mit Radius $r < \rho < R$:

$$a_v = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{v+1}} dz.$$

Man kann sich eine Laurentreihe als Summe zweier holomorpher Funktionen vorstellen. Nehmen wir der Einfachheit halber $z_0 = 0$. Der analytische Teil $\sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ stellt eine innerhalb des äußeren Kreises $|z| < R$ holomorphe Funktion dar. Der Hauptteil $\sum_{v=-\infty}^{-1} a_v z^v$ stellt eine

außerhalb des inneren Kreises $r < |z|$ holomorphe Funktion dar. Ersetzt man z durch $\frac{1}{z}$, so wird der Hauptteil zu einer analytischen Funktion im Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $\frac{1}{r}$. Man spricht deshalb beim Hauptteil auch von einer Entwicklung um den unendlich fernen Punkt bzw. um Unendlich.

Ist eine Funktion f in einer Kreisscheibe mit Ausnahme des Mittelpunkts holomorph, so sprechen wir von einer isolierten Singularität.

Polstelle:

Die Laurent-Entwicklung um die isolierte Singularität z_0 besitze die Gestalt:

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} (z - z_0)^{\nu}, \quad 0 < |z - z_0| < r.$$

Die isolierte Singularität z_0 wird als Pol der Ordnung $m \geq 1$ bezeichnet, wenn im Hauptteil $a_{-m} \neq 0$ und $a_{-\nu} = 0$ für alle $\nu > m$.

Beispiel 1.15

Laurententwicklung vornehmen:

Wir entwickeln die Funktion:

$$f(z) = \frac{1}{z-3} + \frac{1}{z+i}$$

um die Stelle $z_0 = 0$ in eine Laurentreihe im Gebiet (a) $|z| < 1$, (b) $1 < |z| < 3$, (c) $3 < |z|$.

Wir entwickeln für $|z| < 3$:

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{3^{\nu+1}} z^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-3^{-\nu-1}) z^{\nu}$$

und für $3 < |z|$:

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} 3^{\nu} z^{-\nu-1} = \sum_{\nu=-\infty}^{-1} 3^{-\nu+1} z^{\nu}.$$

Genauso entwickeln wir für $|z| < 1$:

$$\frac{1}{z+i} = -i \frac{1}{1-iz} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-i^{\nu+1}) z^{\nu}$$

und für $1 < |z|$:

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{i}{z}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-i)^{\nu} z^{-\nu-1} = \sum_{\nu=-\infty}^{-1} (-i)^{-\nu+1} z^{\nu}.$$

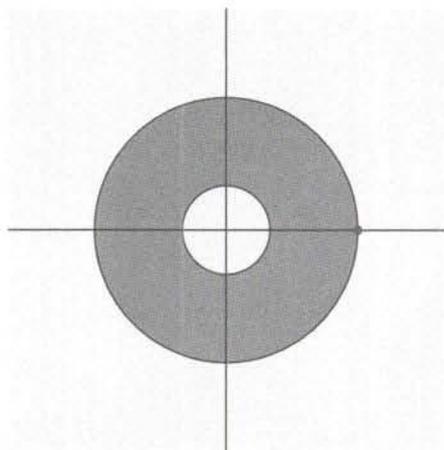


Bild 1.22: Entwicklungspunkt $z_0 = 0$, Pole und Entwicklungsgebiete der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z-3} + \frac{1}{z+i}$$

Insgesamt ergibt sich nun im Fall (a):

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(-3^{-\nu-1} - i^{\nu+1} \right) z^{\nu},$$

im Fall (b):

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(-3^{-\nu-1} \right) z^{\nu} + \sum_{\nu=-\infty}^{-1} (-i)^{-\nu+1} z^{\nu},$$

im Fall (c):

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{-1} \left(3^{-\nu+1} + (-i)^{-\nu+1} \right) z^{\nu}.$$

MAPLE:

```
series(1/(z-3)+1/(z+I), z=0, 5);
```

$$\text{Series}\left(\frac{1}{z-3} + \frac{1}{z+I}, z=0, 5\right) =$$

$$-\frac{1}{3} - I + \frac{8}{9}z + \left(\frac{-1}{27} + I\right)z^2 - \frac{82}{81}z^3 + \left(\frac{-1}{243} - I\right)z^4 + O(z^5)$$

```
series(1/(z-3), z=0, 5)+series(1/(z-3)+1/(z+I), z=infinity, 5);
```

$$\text{Series}\left(\frac{1}{z-3}, z=0, 5\right) + \text{Series}\left(\frac{1}{z-3} + \frac{1}{z+I}, z=\infty, 5\right) =$$

$$\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{9}z - \frac{1}{27}z^2 - \frac{1}{81}z^3 - \frac{1}{243}z^4 + O(z^5)\right) \\ + \frac{2}{z} + \frac{3-I}{z^2} + \frac{8}{z^3} + \frac{27+I}{z^4} + O\left(\frac{1}{z^5}\right)$$

```
series(1/(z-3)+1/(z+I), z=infinity, 5);
```

$$\text{Series}\left(\frac{1}{z-3} + \frac{1}{z+I}, z = \infty, 5\right) =$$

$$2\frac{1}{z} + \frac{3-I}{z^2} + \frac{8}{z^3} + \frac{27+I}{z^4} + O\left(\frac{1}{z^5}\right)$$

MATLAB:

```
syms z
latex(taylor(1./(z - 3)+ 1./(z + i), 5, 0))
```

$$-1/3 - \sqrt{-1} + \frac{8}{9}z + \left(-1/27 + \sqrt{-1}\right)z^2 - \frac{82}{81}z^3 + \left(-\frac{1}{243} - \sqrt{-1}\right)z^4$$

```
latex(taylor(1./(z-3), 5, 0) + taylor(1./(z-3)+1./(z+i), 5, inf))
```

$$-1/3 - 1/9z - 1/27z^2 - \frac{1}{81}z^3 - \frac{1}{243}z^4 + 2z^{-1} + \frac{3 - \sqrt{-1}}{z^2} + 8z^{-3} + \frac{27 + \sqrt{-1}}{z^4}$$

```
latex(taylor(1./(z - 3) + 1./(z + i), 5, inf))
```

$$2z^{-1} + \frac{3 - \sqrt{-1}}{z^2} + 8z^{-3} + \frac{27 + \sqrt{-1}}{z^4}$$

Bei der Partialbruchzerlegung stellt man eine gebrochen rationale Funktion als Summe der Hauptteile der jeweiligen Laurent-Entwicklung um die einzelnen Polstellen dar.

Partialbruchzerlegung:

Gegeben sei eine gebrochen rationale Funktion:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

mit Polynomen $p(z)$ und $q(z)$. Der Grad des Zählerpolynoms sei echt kleiner als der des Nennerpolynoms. Der Nenner $q(z)$ besitze n verschiedene Nullstellen z_1, \dots, z_n mit Vielfachheiten $m_k, k = 1, \dots, m$. Der Hauptteil der Laurent-Entwicklung von f um z_k werde mit $H_k, k = 1, \dots, n$ bezeichnet:

$$H_k(z) = \frac{a_{k,-m_k}}{(z - z_1)^{m_k}} + \frac{a_{k,-m_k+1}}{(z - z_1)^{m_k-1}} + \dots + \frac{a_{k,-1}}{z - z_1}.$$

Dann gilt in \mathbb{C} mit Ausnahme der Polstellen: $f(z) = \sum_{k=1}^n H_k(z)$.

Zieht man die Hauptteile von f ab, so entsteht eine in ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion:

$h(z) = f(z) - \sum_{k=1}^n H_k(z)$. Man kann sich überlegen, dass diese Funktion beschränkt ist. Der

Satz von Liouville besagt dann, dass h konstant sein muss. Damit ist h identisch gleich Null. Der Satz von Liouville garantiert also die Zerlegbarkeit einer rationalen Funktion in Partialbrüche.

Dem Koeffizienten mit dem Index -1 kommt bei der Laurent-Entwicklung um eine isolierte Singularität eine besondere Bedeutung zu. Das liegt daran, dass Kurvenintegrale beim Umlaufen eines Pols erster Ordnung nicht verschwinden.

Residuum:

Sei f in einer punktierten Kreisscheibe $0 < |z - z_0| < r$ holomorph mit der Laurent-Entwicklung:

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{-\nu}}{(z - z_0)^{\nu}} + \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} (z - z_0)^{\nu}.$$

Der Koeffizient a_{-1} von $(z - z_0)^{-1}$ heißt Residuum von f in z_0 : $\text{Res}(f, z_0) = a_{-1}$.

Das Residuum kann durch Integration über einen im umgekehrten Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreis mit Radius $0 < \rho < r$ berechnet werden:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} f(z) dz.$$

Integriert man f über einen Kreis um z_0 mit dem Radius $\rho < r$, so ergibt sich gerade aus der Laurententwicklung: $\int_{|z-z_0|=\rho} f(z) dz = 2\pi i a_{-1}$. Man kann dies verallgemeinern zu einem Kurvenintegral, bei welchem mehrere Singularitäten von einer beliebigen geschlossenen Kurve umlaufen werden. Das Integral einer Funktion f über eine geschlossene Kurve lässt sich durch die Summe der Residuen der umlaufenen Singularitäten von f ausdrücken.

Residuensatz:

Die Funktion f sei im Gebiet D mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten holomorph. Die stückweise glatte, einfach geschlossene Kurve $\Gamma \subset D$ umlaufe die Singularitäten z_1, \dots, z_n im positiven Sinn. Dann gilt:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

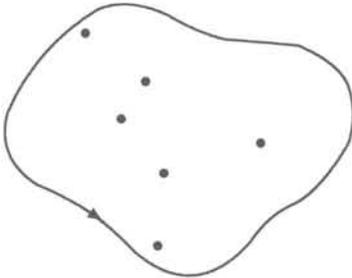


Bild 1.23: Singularitäten umlaufende Kurve beim Residuensatz

Beispiel 1.16

Residuum eines Pols durch Ableiten berechnen:

In der punktierten Kreisscheibe $0 < |z - z_0| < r$ besitze die Funktion f folgende Darstellung:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

mit einer in $|z - z_0| < r$ holomorphen Funktion g . Ferner sei $g(z_0) \neq 0$. Wir zeigen, dass sich das Residuum durch Ableiten des Zählers berechnen lässt:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(z_0),$$

bzw.

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z - z_0)^n f(z)).$$

Wir wenden die Cauchysche Integralformel auf die Funktion g an. Integrieren wir dabei über einen positiv orientierten Kreis $|z - z_0| = \rho < r$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} g^{(n-1)}(z_0) &= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{g(z)}{(z-z_0)^n} dz \\ &= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} f(z) dz = (n-1)! \operatorname{Res}(f, z_0). \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort die Behauptung.

Beispiel 1.17

Residuensatz anwenden:

Wir berechnen das Kurvenintegral $\int_{\Gamma} h(z) dz$ der Hilfsfunktion:

$$h(z) = \frac{e^{zi}}{1+z^2}$$

über den Weg Γ , der von $-R$ nach R längs der reellen Achse führt und dann von R nach $-R$ längs eines Halbkreises durch die obere Halbebene. Anschließend zeigen wir, dass gilt:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(t)}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2e}.$$

In der oberen Halbebene hat $h(z)$ einen einfachen Pol bei $z = i$ mit dem Residuum:

$$\lim_{z \rightarrow i} (z-i) h(z) = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

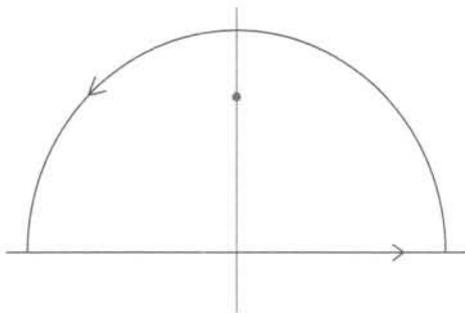


Bild 1.24: Integrationsweg mit Polstelle beim Integral:

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{zi}}{1+z^2} dz$$

Nach dem Residuensatz gilt dann: $\int_{\Gamma} \frac{e^{zi}}{1+z^2} dz = \pi e^{-1}.$

Längs des Halbkreises $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, können wir mit $|1 + z^2| \geq |z^2| - 1$ abschätzen:

$$\left| \frac{e^{zi}}{1 + z^2} \right| \leq \frac{e^{-R \sin(\varphi)}}{R^2 - 1}.$$

Damit ergibt sich für das Integral über den Halbkreis HK bei $t \geq 0$:

$$\left| \int_{HK} h(z) dz \right| \leq \frac{R\pi}{R^2 - 1}.$$

Das heißt, für $R \rightarrow \infty$ strebt das Integral über den Halbkreis gegen 0, und wir bekommen:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ti}}{1 + t^2} dt = \pi e^{-1}, \quad t \geq 0.$$

Betrachtet man den Realteil, so folgt die Behauptung.

MAPLE: `int(cos(t)/(1+t^2), t=0..infinity);`

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(t)}{1 + t^2} dt = \frac{1}{2} \pi (-\sinh(1) + \cosh(1))$$

MATLAB: `syms t
latex(int(cos(t)/(1+t.^2), 0, inf))`

$$-1/2 \pi \sinh(1) - 1/2 \sqrt{-1} Shi(1) \sinh(1) + 1/2 \cosh(1) \pi + 1/2 Si(\sqrt{-1}) \sinh(1)$$

2 Fourierreihen

2.1 Eigenschaften der Fourierreihe

Bei der Fourierentwicklung werden periodische Funktionen durch trigonometrische Polynome angenähert. Im Grenzfall können wir periodische Funktionen durch eine Fourierreihe (trigonometrische Reihe) ersetzen. Eine komplexwertige Funktion einer reellen Variablen der Gestalt:

$$p(t) = \sum_{j=-n}^n c_j (e^{\omega t i})^j = \sum_{j=-n}^n c_j e^{i j \omega t}$$

bezeichnet man als trigonometrisches Polynom. Man kann ein solches Polynom sowohl in der Exponential- als auch in der harmonischen Darstellung angeben.

$$p(t) = \sum_{j=-n}^n c_j e^{i j \omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n (a_j \cos(j \omega t) + b_j \sin(j \omega t))$$

Aus der Eulerschen Formel folgt:

$$\cos(j \omega t) = \frac{e^{i j \omega t} + e^{-i j \omega t}}{2}, \quad \sin(j \omega t) = -i \frac{e^{i j \omega t} - e^{-i j \omega t}}{2}.$$

Einsetzen in die harmonische Darstellung ergibt:

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n a_j \frac{e^{i j \omega t} + e^{-i j \omega t}}{2} + \sum_{j=1}^n b_j (-i) \frac{e^{i j \omega t} - e^{-i j \omega t}}{2} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n (a_j - i b_j) \frac{e^{i j \omega t}}{2} + \sum_{j=-1}^{-n} (a_{-j} + i b_{-j}) \frac{e^{i j \omega t}}{2}. \end{aligned}$$

Die Exponentialdarstellung bekommt man nun, indem man setzt:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_j = \frac{a_j - b_j i}{2}, \quad c_{-j} = \frac{a_j + b_j i}{2}, \quad j = 1, \dots, n,$$

Die meisten Signale lassen sich durch stückweise glatte Funktionen beschreiben. Wir ordnen nun stückweise glatten, periodischen Funktionen Fourier-Koeffizienten zu.

Fourier-Koeffizienten:

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise glatte Funktion mit der Periode $T > 0$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Die komplexen Zahlen:

$$c_j = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i j \omega t} dt, \quad j \in \mathbb{Z},$$

$$a_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(j \omega t) dt, \quad j \in \mathbb{N}_0, \quad b_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(j \omega t) dt, \quad j \in \mathbb{N},$$

werden als Fourier-Koeffizienten von f bezeichnet. Der Zusammenhang zwischen Exponential- und harmonischer Darstellung lautet:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_j = \frac{a_j - b_j i}{2}, \quad c_{-j} = \frac{a_j + b_j i}{2}, \quad j = 1, \dots, n,$$

bzw.

$$a_0 = 2c_0, \quad a_j = c_j + c_{-j}, \quad b_j = (c_j - c_{-j})i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Ist p reellwertig, also $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, so gilt ferner: $c_j = \overline{c_{-j}}$, $j = 1, \dots, n$.

Offensichtlich kann man die Fourier-Koeffizienten durch Integration über ein beliebiges Periodenintervall berechnen:

$$c_j = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i j \omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} f(t) e^{-i j \omega t} dt.$$

Es gibt durchaus Anwendungen, bei welchen die Forderung der stückweisen Glattheit zu stark ist. Man kann diese Forderung abschwächen und lediglich verlangen, dass die Funktion absolut

integrierbar ist: $\int_0^T |f(t)| dt < \infty$. Dies genügt, um Fourierkoeffizienten zu definieren:

$$\left| \int_0^T f(t) e^{-i j \omega t} dt \right| \leq \int_0^T |f(t) e^{-i j \omega t}| dt = \int_0^T |f(t)| dt < \infty.$$

Die meisten der folgenden Überlegungen können ebenfalls auf der Basis der Integrierbarkeit durchgeführt werden. Von größter Bedeutung sind die Voraussetzungen bei der Frage nach der Konvergenz der Fourierreihe.

Beispiel 2.1**Orthogonalität des trigonometrischen Systems:**

Für die trigonometrischen Exponentialfunktionen gilt die Orthogonalitätsrelation:

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{i j \omega t} e^{-i k \omega t} dt = \begin{cases} 1 & , j = k, \\ 0 & , j \neq k, \end{cases} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Berücksichtigen wir $T = \frac{2\pi}{\omega}$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{i(j-k)\omega t} dt &= \begin{cases} T & , j = k, \\ \frac{e^{i(j-k)\omega T} - e^{i(j-k)\omega 0}}{i(j-k)\omega} = 0 & , j \neq k, \end{cases} \\ &= \begin{cases} T & , j = k, \\ \frac{e^{i(j-k)2\pi} - 1}{i(j-k)\omega} = 0 & , j \neq k. \end{cases} \end{aligned}$$

Mit

$$e^{i(j-k)2\pi} = \cos((j-k)2\pi) + i \sin((j-k)2\pi) = 1$$

bekommt man daraus sofort die Orthogonalitätsrelationen.

Man kann dies auch direkt für das reelle trigonometrische System zeigen. Aus den trigonometrischen Formeln

$$\begin{aligned} 2 \sin(j \omega t) \sin(k \omega t) &= \cos((j-k)\omega t) - \cos((j+k)\omega t), \\ 2 \cos(j \omega t) \cos(k \omega t) &= \cos((j-k)\omega t) + \cos((j+k)\omega t), \\ 2 \sin(j \omega t) \cos(k \omega t) &= \sin((j-k)\omega t) + \sin((j+k)\omega t), \end{aligned}$$

folgt:

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin(j \omega t) \sin(k \omega t) dt &= \begin{cases} \frac{T}{2} & , j = k, \\ 0 & , j \neq k, \end{cases} \\ \int_0^T \cos(j \omega t) \cos(k \omega t) dt &= \begin{cases} \frac{T}{2} & , j = k \neq 0, \\ 0 & , j \neq k, \end{cases} \\ \int_0^T \sin(j \omega t) \cos(k \omega t) dt &= 0, \quad \text{für alle } j, k. \end{aligned}$$

Beispiel 2.2**Fourierkoeffizienten eines trigonometrischen Polynoms:**

Gegeben sei das trigonometrische Polynom

$$p(t) = \sum_{j=-n}^n c_j e^{i j \omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n (a_j \cos(j \omega t) + b_j \sin(j \omega t)), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Wir zeigen, dass gilt: $c_k = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) e^{-i k \omega t} dt$, $k = -n, \dots, n$.

Multipliziert man $p(t)$ mit $\frac{e^{-i k \omega t}}{T}$ und integriert anschließend, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_0^T p(t) e^{-i k \omega t} dt &= \int_0^T \sum_{j=-n}^n c_j e^{i j \omega t} e^{-i k \omega t} dt \\ &= \sum_{j=-n}^n c_j \int_0^T e^{i j \omega t} e^{-i k \omega t} dt \\ &= T \sum_{j=-n}^n c_j \delta_{jk} = T c_k. \end{aligned}$$

Insgesamt bedeutet dies $p(t) = \sum_{j=-n}^n \left(\frac{1}{T} \int_0^T p(t) e^{-i j \omega t} dt \right) e^{i j \omega t}$,

bzw. in harmonischer Form:

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt + \sum_{j=1}^n \left(\frac{2}{T} \int_0^T p(t) \cos(j \omega t) dt \right) \cos(j \omega t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \left(\frac{2}{T} \int_0^T p(t) \sin(j \omega t) dt \right) \sin(j \omega t). \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion braucht man die Funktion nur auf einem Periodenintervall. Hat man eine zunächst nur auf einem Intervall erklärte Funktion $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, so kann man f definitionsgemäß Fourierkoeffizienten zuordnen. Diese Fourier-Koeffizienten entsprechen aber den Koeffizienten einer T -periodischen Funktion, die durch direkte periodische Fortsetzung aus f entsteht.

Direkte Periodische Fortsetzung:

Die Funktion

$$\tilde{f}(t) = f(t - kT), \quad kT \leq t < (k+1)T, \quad k \in \mathbb{Z},$$

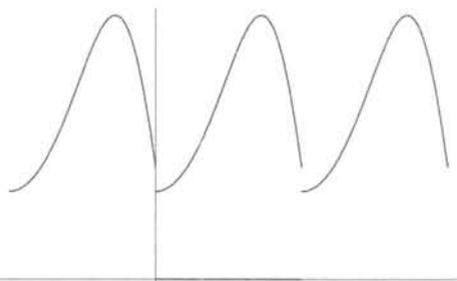
wird als direkte periodische Fortsetzung der Funktion $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ bezeichnet.

Bild 2.1: Direkte periodische Fortsetzung: Ist $f(0) \neq f(T)$, so entsteht bei der direkten Fortsetzung jeweils bei kT , $k \in \mathbb{Z}$, eine Unstetigkeitsstelle.

Bildet man zunächst ohne Konvergenzbetrachtungen eine trigonometrische Reihe, so erhält man die zu f gehörige Fourierreihe.

Fourierreihe:

Mit der folgenden Beziehung halten wir fest, dass f die Fourier-Koeffizienten c_j bzw. a_j , b_j besitzt:

$$f(t) \sim S_f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{i j \omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos(j \omega t) + b_j \sin(j \omega t)).$$

Die n -te Teilsumme der Fourierreihe können wir einer Funktion aber exakt zuordnen:

$$S_f(t, n) = \sum_{j=-n}^n c_j e^{i j \omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n (a_j \cos(j \omega t) + b_j \sin(j \omega t)).$$

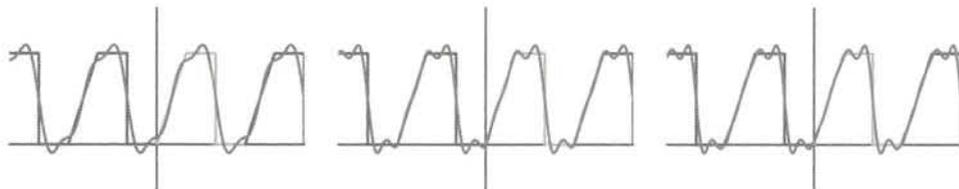


Bild 2.2: Teilsummen der Fourierreihe einer Impulsfunktion