



Die phantastische Geschichte der Analysis

Ihre Probleme und Methoden seit Demokrit und
Archimedes. Dazu die Grundbegriffe von heute.

von
Prof. Dr. Hans-Heinrich Körle

Oldenbourg Verlag München

Hans-Heinrich Körle ist – nach akademischen Lehr- und Wanderjahren in den USA und seiner Habilitation für Mathematik an der Universität Marburg – seit Anfang der siebziger Jahre Professor am dortigen Fachbereich Mathematik und Informatik. Wo er sein Wissen ausbreitet, zeigt sich sein Sinn für Didaktik und Sprachwitz. Beides hilft ihm, die Faszination zu vermitteln, die von der Mathematik ausgeht.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

© 2009 Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH
Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
oldenbourg.de

Das Werk einschließlich aller Abbildungen ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen.

Lektorat: Kathrin Mönch
Herstellung: Anna Grosser
Coverentwurf: Kochan & Partner, München
Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Druck: Grafik + Druck, München
Bindung: Thomas Buchbinderei GmbH, Augsburg

ISBN 978-3-486-58825-5

Den beiden Bürschen

JAKOB und MORITZ

Einladung

Die spinnen, die Griechen. Sagten die Römer und schüttelten die Köpfe über das, was ihre Nachbarn umgetrieben hatte zu der Zeit, „*Als die Götter lachen lernten*“. So der Titel zu Harro Heusers^{1a} Defilee der „*griechischen Denker, die die Welt verändern*“.

Es begann damit, dass Leute wie Thales und Pythagoras Figuren in den Sand ritzten. Inspiriert von Göttern, die sich später daran ergötzten, wie man in diesem seltsamen Völkchen vergebens und verbissen suchte, etwa aus dem Kreis ein Quadrat zu machen.

Worüber die Alten Griechen grübelten, daraus sollte nicht bloß Geometrie und Mathematik, sondern Wissenschaft schlechthin erwachsen. Sie schufen geistige Unruhe, Philosophie genannt, sowie etwas scheinbar Weltfremdes, die *Theoria*. Und da nichts praktischer ist als die Theorie, steht selbst die heutige technische Welt in der Erbfolge ihres zweckfreien Denkens.

Es gründet in ihrer *eigenartigen* Mathematik. Sie fand den Weg in unsere Schulen, von ihr kam ungewollt der Anstoß zur „Infinitesimalrechnung“. Unerhörtes birgt dieses Wort: das Monster mit Namen Unendlich. Eine Frechheit des Homo sapiens, sich mit ihm gemessen zu haben! Er machte seine Bekanntschaft, als des Doppelns und Halbierens in der Phantasie kein Ende war. Gegenständlich ein Ding der Unmöglichkeit, drängte es sich auf, unabweisbar und unausweichlich.^{2a} Man hatte sich damit auseinander zu setzen, vor allem in seiner scheinbar harmloseren Kleinausgabe: mit den infinitesimal kleinen Größen, den „*Infinitesimalen*“.

Unendlich klein oder groß, eine unbehagliche Vorstellung, unvorstellbar allemal. Beliebig klein und doch nicht nichts? Oder extrem klein und damit unteilbar? Das hieße Atome. Aus solchen Körnchen dachte sich der Philosoph Demokrit die Welt. Etwa auch die Gebilde, die nicht von dieser Welt sind, die Kopfgeburten der Geometrie? Sollten Atome das Finite ins Spiel bringen? Es gelang erst Eudoxos, dem Schöpfer unserer *mathematischen Klassik*. Wenn sein Gefolgsmann Archimedes die Körper in unendlich viele unendlich dünne Scheiben zerlegte – als Mathematiker tat er es nur hinter vorgehaltener Hand. Warnte noch ein Aristoteles^{3a} die Mathematiker vor dem Unendlich, so spricht ein Altmeister der Neuzeit, Hermann Weyl^{2b 4}, mit dem Mut zu pointierender Verkürzung: „Mathematik *ist* die Wissenschaft des Infiniten.“ Die Mathematik der Antike war es nicht.

Die Zwischenzeit lebte von der Wortschöpfung. Aus den Unteilbaren wurden infinitesimale Indivisible, gerade so, wie man sie jeweils brauchte. Für die Dienste dieser Wichtel war man nur allzu bereit, mit der Preisgabe des klassischen Ideals zu zahlen. Ermutigt durch Infinitesimalen-Geometrie, scheute man nicht vor einer Infinitesimalen-Rechnung. Je Zweck

waren die kleinen Größen mal null, mal wieder nicht. Sperrige Widersprüche, die nicht unter *einen* Hut passten und dennoch im selben Kopfe Platz hatten. Doch was da mit Pseudogleichungen, mit Phantomen der Gattung „ dx “ erreicht wurde, es war in der Tat verblüffend. Et was musste am Unbegriff des Infiniten dran sein!

Erst zwei Jahrhunderte nach Fermat, Newton und Leibniz kann das Ungreifbare in Begriffen gebändigt gelten, noch lange hielt sich in der Analysis der Dunst von Alchimie und Hexenküche. Anfangs des 19. Jahrhunderts verkündete ein „erfolgreiches“ Lehrbuch: „*Solche Spitzfindigkeiten, mit denen sich die Griechen abquälten, brauchen wir nicht mehr.*“^{1b 3b} Abermals hieß es: „Die spinnen, die Griechen.“

*

Eine Einstellung, die andererseits unabdingbar war für den Fortschritt. Konsolidiert wurde der, als man sich auf die klassische Strenge besann, verwegene Ideen „dialektisch“ umdachte und den Bau auf eine tragfähige Grundlage stellte. In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts entstand eine schlüssige Theorie, aus Historischem umgemünzt wurde sie *Analysis* getauft. In deren Namen konnte sich nun ein jeder guten Gewissens einer Infinitesimalrechnung bedienen. An diesem Punkt endet unsere Geschichte, Vorgeschichte eines derweil immens angewachsenen Überbaus.

Nicht zu vergessen der Unterbau! Namentlich die Analysis musste sich nämlich ins Gewissen reden lassen ob der sicheren Grundlage. Als man diese gefestigt glaubte, brachte logische Skepsis sie ins Wanken.^{2c 3c} So leicht würde man mit dem Unendlich nicht fertig werden. Im neuen Jahrhundert riefen denn ernst zu nehmende Fundamentalisten nach radikaler Revision, wollten die Analysis in ihren Schlussweisen drastisch beschneiden. Die jedoch hatte sich unumkehrbar Bahn gebrochen und wird stets auf irgendeine Weise „existieren“.

Aus Naturwissenschaft und Technik sind ihre Werkzeuge ohnehin nicht wegzudenken und finden zusehends auch andersorts Verwendung. Wenngleich verschiedenen Wesens, standen und stehen Physik und Mathematik in denkbar enger Beziehung, bewegten sich insbesondere Mechanik und Analysis lange Zeit nur im Tandem vorwärts, mit wechselnden Plätzen. Das war segensreich für beide, wiewohl noch von einem Friedrich Hegel verteufelt.^{1c} In einer Entstehungsgeschichte der Analysis dürfen der Physiker Newton und seine Wegbereiter nicht fehlen.

Ein Nachhilfeschüler erinnert sich des jungen Einstein: „Jetzt rechnet man mit Unendlichkeiten.“ Ja, für Kinder leicht ist heute manches Problem, das einst die Größten herausforderte. Solange es noch keine Methoden gab, brauchte ein jeder Fall einen Einfall. Geniestreiche ließen sich auf einmal „kalkulieren“. Die *calculi*, das waren die Kalksteinchen auf dem römischen Rechenschieber. Ein würdigeres Andenken als in den *calculs rénaux*, den französischen Nierensteinen, fanden die Murmeln im „*Calculus*“ der Newton und Leibniz. Ein Markenzeichen für ihre Erfindungen, das mit deren spielerischer Handhabung warb. Der Kalkül selbst ist genial und schafft seinerseits Freiraum für Geniales. Dennoch kam das Wort vom gedankenlosen Denker auf. Arthur Schopenhauer^{1d} sah in mathematischem Tun, oder dem was er dafür hielt, die niedrigste aller Geistestätigkeiten. Auch in unserer Zeit gefällt

sich manch anders Gebildeter darin, eine Arroganz des vermeintlich Alleingeistigen zu pflegen.

* * *

Wir beschränken uns auf die von griechischem Boden ausgehende Analysis. Auch in anderen Kulturkreisen zeigen sich frühe Ansätze von Infinitesimal-Mathematik, so in China, vor allem in Indien und den Ländern des Islam.^{5} Manche Errungenschaften des Abendlands hatten dort lange zuvor ihr Debüt.

Die Ideengeschichte unserer Analysis soll an typischen Beiträgen der Pioniere festgemacht werden. Ihrer Zeit voraus, waren doch auch sie deren Kinder, hineingeboren in eine Tradition von Wert und Gültigkeit. Die Entwicklung vollzog sich im Auf und Ab und Auf methodischer Strenge, in Stil-Epochen sozusagen. Deren Zeitgeist braucht es zu kennen, will man die großen Geister verstehen und würdigen.

Zwei weitgehend getrennt lesbare Texte wollen dem gerecht werden. Ein kultur- und fachhistorischer Abriss setzt den Rahmen (vgl. {1e}), in den sich die Blütenlese des zweiten Abschnitts einordnet. Dort findet Vertiefung statt, doch bedarf auch der erste Teil mehr als der Worte, will er Wesentliches vermitteln. Ich hoffe, mit der Auswahl der Zeitzeugnisse und ihrer Wiedergabe sind mir annehmbare Kompromisse geglückt zwischen Bedeutsamkeit und Aufwand, zwischen Authentizität und Zugänglichkeit. Nicht mehr als nötig wird gerechnet, doch die Argumente müssen deutlich werden. Ganz ohne Mühe gibt es sie nicht, die Freude am Erkennen und Entdecken!

*

Die Hochschulpraxis verstellt leider oft den Blick auf das, was hinter all den Begriffen, Methoden und glatten Lehrsätzen steht. Rück-Sicht auf deren Vorgeschichte – ein Luxus? Macht man sie gelegentlich lebendig, kommt das sicher der Motivation zugute, deren besonders jene bedürfen, die selbst einmal Schüler begeistern sollen.

Nicht wenige Studierende interessieren sich für die Entstehung und Entwicklung ihres Fachs, aber nur vereinzelt nehmen sich gestandene Mathematiker der Quellen an und schreiben darüber. Was Not täte.^{6a} Da gibt es mancherlei Dissens unter solchen und solchen Fachleuten. Bei dem einen Autor heißt es „*die Differential- und Integralrechnung von Newton*“^{7a}, während ein anderer^{7b} lapidar verkündet, die Erfindung des Calculus sei „*das ausschließliche Verdienst von Leibniz*“. Gauß^{1f} nennt Newton „*summus*“, für van der Waerden^{7a} ist er „*der wichtigste Mann des 17. Jahrhunderts*“. Bourbaki indes, eine Gruppe französischer Mathematiker unserer Tage, lässt dahingestellt, ob des Engländers Werk zu den Gedanken seines Jahrhunderts „*etwas beigetragen*“ habe; ein „*ganz kurzer Abriß seiner Fluxionen*“ bedeute „*wenig*“.^{8a}

Anfänger sind überfordert, das Angebot wertend zu sichten. Es umfasst Geschichte, Geschichten und Geschichtchen, reicht von skelettierender Sachlichkeit^{8b} bis zu einer Mitteilbarkeit, die einen darüber belehrt, der große X habe die Nichte Y seines Großonkels Z ge-

ehelicht. (Meine gelegentlich überbordenden Verweise sollen die Chancen des Suchenden erhöhen. Meine vermutlichen Versehen wolle er mir bitte nachsehen.)

Noch etwas zu den Sachbüchern. Für den Laien haben sie den Wahrheitsbonus auf Hochglanz gedruckter Bilanzen. Außer dem spukhaften Fehlerteufel genießen leibhaftige die Unschuldsvormutung mit weit ärgeren Folgen, wie wenn Newtons Fludenten sich zu Flugenten mauserten. (Ein Beispiel peinlicher Inkompetenz gibt {9}.) Mit Standesdünkel allein ist nicht abzutun, dass Mathematiker zu Vorsicht neigen, wenn Philosophen und Historiker, die nicht aus der Mathematik kommen, sich ihrer bemächtigen.

Ein wichtiges Anliegen des Buches ist der aktuelle Bezug. Zu erleben, wie eine Infinitesimal-Mathematik auf die Welt und dann zu erster Reife gebracht wurde, hilft die Grundbegriffe (Stichwort „gleichmäßig“) verarbeiten, die dem Studienanfänger zu schaffen machen und deren volles Verständnis sich gemeinhin erst im Laufe des Studiums entfaltet. Bekanntlich kommt bei Mathe das dicke Ende am Anfang.

Das meiste liegt in Reichweite von Schülern (siehe auch {10.1e.6b}). Ein gemeinsamer Grundstock von Vorkenntnissen ist nicht zu erwarten, weshalb sich hier manches findet, was den Kenner entbehrlich anmutet. Der kann ja wegschauen – sofern er es nicht selbst didaktisch verwerten will. Vielleicht trägt dieses Lernbuch in seiner Art dazu bei, die Stolperschwelle des ersten Studienjahres zu senken. Mag sein sogar, dass jemand Mathe neu zu sehen lernt, dass sich die Augen öffnen lässt, wem sie nie geöffnet wurden oder der sie entsetzt wieder verschloss ...

Schön, wenn ich Neugier auf das Alte wecken könnte, Begeisterung für die großartige Analysis, Bewunderung von Genie und Phantasie derer, die sie schufen oder entdeckten!

- {1} HEUSER: {1a} [4].— [2]: {1b} 689. {1c} 559. {1d} 701. {1e} 634–700. {1f} 658 unten.
- {2} DAVIS;HERSH: {2a} [1] 152 ff., [2] 155 ff. {2b} [1] 108, [2] 110. {2c} [1] chap.7, [2] Kap.7.
- {3} KLINE: {3a} [1] 175. {3b} [2] 166. {3c} [2] 258 ff.
- {4} THIELE 39 f.
- {5} JUSCHKEWITSCH Kap. I–III.
- {6} SONAR: {6a} [2] 106 (Schluss). {6b} [3].
- {7} {7a} VAN DER WAERDEN [2] 14 (vgl. 356).— {7b} HOFMANN [2] 250; [4] 62.
- {8} BOURBAKI [5]: {8a} [5] 228. {8b} [5] 9–275.
- {9} FRÖBA; WASSERMANN.
- {10} POPP.— KROLL; VAUPEL („Historische Anmerkungen“).

Danke!

Ich weiß nicht recht, ob leider. Jedenfalls bin ich kein Computerfreak und widme mich weit lieber meinem Text, als dessen EDV zu kultivieren. Das konnte nur gut gehen, weil sich meiner Unbedarftheit viele verständnisvoll annahmen: Kollegen, Fachbereich und Verlag.

Soft and hard, mit Rat und Tat griffen mir die Herren Dr. Meinhard Sponheimer und Dr. Werner Liese unter die Arme. Zur unschätzbaren Hilfe wurde mir LiTeX, eine durch Herrn Liese blindengerecht entwickelte Version von LaTeX, die mir ermöglichte, alle meine Formeln aus dem Stand punktgenau zu setzen. Der Fachbereich stellte mir unbefristet ein E-Altenteil zur Verfügung und Herrn Dipl.-Ing. Burkhardt Fischer zur Seite. Kryptische Literatur spürte Frau Dipl.-Bibliothekarin Christa Seip auf, nicht unbehelligt blieb auch Frau Monika Teubner. Sie alle unterstützten mich in zuvorkommender Weise.

Besonders verpflichtet fühle ich mich dem Oldenbourg-Verlag. Der akzeptierte den Entwurf ohne Zögern und übernahm die drucktaugliche Umsetzung meiner hausbackenen PAINTings. Hierbei und bei allem Weiteren hat Frau Kathrin Mönch als Lektorin das Projekt mit sicherem Urteil, viel Geduld und einer Hingabe betreut, die ich schwerlich in Worte zu fassen vermag – ganz herzlichen Dank!

Philipps-Universität in Marburg an der Lahn,
FB Mathematik u. Informatik auf den Lahnbergen.
Noch im Jahr der Mathematik und des Oldenbourg-Jubiläums.

Hans-Heinrich Körle

Inhalt

Teil I: Zeiten und Zeitgeister	1
I.A Das klassische Zeitalter abendländischer Mathematik	3
I.A.1 Der Geist der Wissenschaft erscheint.....	3
I.A.2 Geometrische Größen, im Vergleich und in Verhältnissen	5
I.A.3 Demokrits geometrischer Atomismus: ein zählebiger Widerspruch.....	12
I.A.4 Quadratur und Exhaustion.....	15
I.A.5 Archimedes: der leibhaftige Herkules	17
I.B Eiszeit – Auszeit.....	19
I.C Neuere Zeit.....	22
I.C.1 Nach der Wende, vor der Wende: die Scholastik	22
I.C.2 Der Geist der Naturwissenschaft erscheint.....	30
I.C.3 Fünfzig Jahre Vorabend des Calculus	35
I.C.4 Zwei Väter, ein Calculus: Newton und Leibniz	44
I.C.5 Leibniz' Erben.....	57
I.D 19. Jahrhundert: goldenes und kritisches der Analysis	63
I.D.1 Rückbesinnung auf klassische Strenge.....	64
I.D.2 Für Überraschungen gut: die „unberechenbaren“ trigonometrischen Reihen.....	71
I.D.3 Der Grundstein, der ein Schlussstein war.....	73
I.E Nach-Lese	82
I.E.1 Vom Sinneswandel der Analysis.....	82
I.E.2 Zur „Lehre von den Größen“	83
I.E.3 Nach-Denkliches: die Analysis in der Lehre.....	85
Zeittafel der Personen	87
Teil II: Aus Schatztruhe und Trickkiste	91
II.A Demokrit: Wie viel Raum ist in den Pyramiden?	93
II.B Eudoxos schafft geordnete Verhältnisse.....	96
II.C Die krummen Sachen des Hippokrates und des Eudoxos.....	99
II.D Archimedes' berühmte Parabel-Quadratur	102
II.E Archimedes und der Kreis.....	106

II.F	Das sogenannte Lemma des Archimedes	111
II.G	Der Zauberer mit dem Zuckerhut im Zylinder	112
II.H	Archimedes beim Differenzieren erwischt?	117
II.I	Des Pappos' „Satz von Guldin“	122
II.J	Oresmus: Summierung einer nicht-geometrischen Progression	123
II.K	Kepler: Per aspera ad astra	125
II.L	Das cavalierische Prinzip in der Hand von Roberval	127
II.M	Cavalieris Prinzip und Torricellis Trompete	131
II.N	Cavalieri, Pascal, Wallis, Fermat: Quadratur von Potenzfunktionen	135
II.O	Hyperbelquadratur und Logarithmus	143
II.P	Die Tangente bei Roberval und bei Descartes	149
II.Q	Neil, Barrow: Vorboten des Hauptsatzes	153
II.R	Leibniz' Spielerei mit Folgen	157
II.S	Newton und Leibniz zum Hauptsatz	161
II.T	Newton und Leibniz: zweimal Calculus mit Physik	165
II.U	Huygens' Uhr aus Zykloiden	169
II.V	Leibniz, Johann Bernoulli: partielles Differenzieren, Enveloppen	173
II.W	Euler: $0 = 1 + e^{i\pi}$	179
II.X	Cauchy und die Integrale	181
II.Y	Riemanns Integrierbarkeit	190
II.Z	Weierstraß: Grenzwerte von Grenzwerten	195
Literaturverzeichnis		201
Index		211

Teil I: Zeiten und Zeitgeister

Die Geschichte der Analysis zeitigte Epochen aller Art Auseinandersetzung mit „unendlich kleinen Größen“. Man mochte ihnen ausweichen, ihrer Herr zu werden gelang der Spezies Mathematiker nicht in zwei Jahrtausenden. So lange spukte es von Atomen und Phantomen, bis man wirklich rechnen konnte mit ihnen. Besser gesagt ohne sie. Allenfalls in ihrem Namen: Als Paten der Infinitesimalrechnung, einem erschreckenden wie schrecklichen Wort, erlangten sie Unsterblichkeit.

I.A Das klassische Zeitalter abendländischer Mathematik

Weder ist gänzlich unmusikalisch, wer alle Gene beisammen hat, noch kann der sich rühmen, das Mathematische fehle ihm. Daher finden wir die Mathematik wenigstens ansatzweise in allen Kulturen. Bei deren einer gedieh der Ansatz zur mathematischen Klassik schlechthin.

I.A.1 Der Geist der Wissenschaft erscheint

Thales. Euklid.

Unser Baum der Erkenntnis wuchs im alten Hellas, doch wurzelte er unterm Zaun hindurch. Fruchtbare Boden fand sich am Nil und zwischen Euphrat und Tigris. Inspiriert wurden die jungen alten Griechen zunächst geometrisch durch die Ägypter, mehr algebraisch dann durch die – rückwirkend so genannten – Babylonier. Zu etwa gleichen Teilen betraf dies die Zeitspanne von –3000 bis –300, die griechische Klassik dauerte von –600 bis –200.^{1a}

Nicht nur Moses' Wiege stand am Nil. Das war im Schilf. Glaubt man Herodot^{2a}, so kam mit den Überschwemmungen auch die Geo-Metrie, nämlich die Landvermessung zwecks aktueller Grundsteuerbescheide. Sei dies nun Historie^{3a 4a} oder Folklore^{4b}, zumindest beim Pyramidenbau war sie unverzichtbar, *diese* Geometrie. Griechischen Müßiggängern blieb vorbehalten, sehr weit hinauszugehen über derlei Nützlichkeit. Auf Grundformen zu reduzieren ist praktisch, auf die Spitze getrieben wurde es zur Theorie. Man abstrahierte und idealisierte, *dachte* die „Dinge“, die in Beziehung gesetzt und Operationen unterworfen wurden. In dieser Konsequenz war weltweit neu, was die Griechen da anrichteten.

Die Griechen? Nun, es klang schon an, dass Muße dazugehörte; auf jeden Bürger sollen mehr als zwanzig Sklaven gekommen sein. Dennoch höchst bemerkenswert, wenn es nicht eine kleine Kaste abseitiger Eggheads war, unter denen sich dieser Geist ausbreitete.

Vor gut zweieinhalb Jahrtausenden begann es mit dem Ionier Thales aus Milet, der Stadt der Freidenker.^{5a} Eine schillernde Persönlichkeit, skeptisch^{6a 7a} wie auch durchaus anders^{2b 5b} angesehen. Kam aus Ägypten und Babylon unterschiedliche Kunde zum Inhalt der Kreisfläche, suchte Thales der Sache auf den wahren Grund zu gehen. Mochten hinter solch frühen Befunden gelegentlich schon Überlegungen grundsätzlicher Art gestanden haben, bei den Griechen traten sie von Beginn an in den Vordergrund. Die wollten Prinzip und System. Grundbegriffe schälten sich heraus, wurden zu Grundsätzen verbunden, aus denen sich *folgen* ließ. Der Beweis und das Verlangen danach verdrängten Unverständnis und Selbstverständnis.^{8} Die Deduktion wurde zur Domäne der Griechen.

Unlängst geriet ich wieder in zeitraubende Korrespondenz mit einem jener Amateurmathematiker, welche die Fachwelt belächelt und fürchtet. Menschlich ist, nicht nur ideell motiviert zu sein, und nach meiner Erfahrung wünschen diese Leute weit weniger belehrt als bestätigt zu werden. Dennoch nehme ich sie ernst, verrät ihr meist hoffnungslos vergebliches und darum anrührendes Bemühen doch auch, von der Sache selbst in einem Maße besessen zu sein, wie man es manchem Profi wünschte. Als ich nicht abließ, meinen Partner von der Unzulänglichkeit einer Argumentation überzeugen zu wollen, riss es ihn hin, die Mathematiker der „Beweis-Neurose“ zu bezichtigen. Diese Diagnose erwarb sich auch Thales, als er darüber sinnierte, dass der Durchmesser den Kreis halbiert.^{1b 2c 9}

Was die Römer am Halbkreis interessieren sollte, das waren die Bögen, mit denen sie Aquädukte und ein Kolosseum bauen konnten. Mussten Ihre Baumeister in Thales nicht den Spinner sehen? Jedenfalls missversteht ihn gründlich, wer da annimmt, er sei ob jener Tatsache vom Zweifel zerfressen gewesen. Er suchte sie einzuordnen, betrachtete Sehnen und Segmente und begriff die Sonderstellung der längsten Sehne.^{6b} Sollte dies Legende sein, beschreibt sie doch trefflich, was die Griechen umtrieb und zu Schöpfern unserer Wissenschaft werden ließ.

Dennoch ein kritisches Wort zur Legendenbildung. Spärliche Überlieferung lässt oft viel Luft zum Heraus- und Hineinlesen. Der Mathematiker und Mathematikhistoriker Hermann Hankel^{3b} hegt im Falle Thales den Verdacht, dass seine Nachfahren ihn auf ihren eigenen Standpunkt hieften. Wie sich überlieferte Schriften Kopierfehler und irrige Zufügungen gefallen lassen müssen, so gibt es auch die wohlmeinende Verfälschung durch rückwärtige Projektion.

*

Warum nahm die griechische Erfindung einer zweckfreien „Gründlichkeit“ ihren Anfang bei der Geometrie? Und zwar einer Geometrie, in der das Metrische nur mehr *ein* und keinesfalls ein vornehmlicher Aspekt war. Zum einen, weil sich seinerzeit nichts besser für ihre ureigensten Errungenschaften eignete, die Deduktion, das dialektische Beweisen durch Widerspruch. Doch erklärt es nicht allein ihre an Besessenheit grenzende Vorliebe. Man war der schlichten Anmut geometrischer Figuren verfallen, in deren Vollkommenheit die Ordnung des Kosmos sich zu spiegeln schien – so etwa hätte Platons Credo lauten können. Sein Gott trieb Geometrie. Hort ihrer Ideen und Off Limits für geometrische Ignoranten war Platons Akademie zu Athen. Geometrische Exerzitien galten als Paradigma für Geisteszucht, sie mussten auch die Seele läutern können. Den pädagogischen Auftrag übernahm sein Schüler Aristoteles, selber Hauslehrer bei Alexander dem sogenannten Großen und in dieser Rolle ähnlich erfolgreich wie Seneca bei Nero.

Zwar selbst nicht schöpferisch in Sachen Geometrie, initiierten Platon und Aristoteles mit diesem Pflichtfach ihrer Schulen unser Konzept von Wissenschaft schlechthin. Für einen anderen Start fehlten die substanziellen Voraussetzungen. (Hierzu siehe {10a} samt {10b} bezüglich der oben angesprochenen „Legendenbildung“.) Die Geometrie umging die physische Realität, ging aus von einer idealen. So konnte sie zum „Modell Wissenschaft“ werden, so wurde sie zu deren Markenzeichen. In neuerer Zeit würde eine Argumentation daran gemessen werden, ob sie „*more geometrico*“ geführt war, nach alter Väter strenger Sitte.

Diese geometrischen Sitten wurden den meisten von uns Frühgeborenen zwar nur ansatzweise, gleichwohl ausgiebig zur Schulzeit beigebracht. Getreu einem 13-bändigen Bestseller des Altertums, in dem ein didaktisch versierter Buchhalter den Stand der griechischen Mathematik zur Zeit Platons resümiert hatte: Eukleides, sprich Euklid. „*Die Elemente*“ betitelt und vornehmlich der Geometrie gewidmet, galt sein Werk noch nach gut zwei Jahrtausenden als mustergültig und hat damit eine nicht nur nach Ansicht Bertrand Russells^{7b} unverdient starke Glorifizierung erfahren. Euklid beginnt mit saloppen „Definitionen“ und primären „Aussagen“, *Axiome* genannt, von ihm unmittelbar einsichtig und daher als Grundlage tauglich befunden. Was sonst hätte er tun können? (Kant sollte es nicht viel anders treiben; heutige Axiome sind weniger vermessen.) Die „euklidische Geometrie“ ist das erste formalisierte Deduktionssystem auf Erden. Ungezählte Schülergenerationen wurden durch dieses Lehrgebäude gelotst und getrieben, machten Bekanntschaft mit einer anderen Welt. In England hieß das Schulfach Mathematik schlicht „Euclid“. Für mich Zehnjährigen, vom Regeldrill einer „Algebra“ abgestoßen, wurden die mir zwingend erscheinenden Beweisführungen und raffinierten Konstruktionen zum prägenden Erlebnis. Zumindest temporär fand diese Lehrtradition ihr Ende mit einer Modeerscheinung, dem Missverständnis namens „New Math“, deren Herolde uns wissen ließen: „*Euclid must go!*“

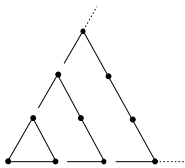
- {1} DAVIS;HERSH: {1a} [1] 9; [2] 6. {1b}: [1] 147; [2] 150 (vgl. {9}, Fußn. a).
- {2} VAN DER WAERDEN [2]: {2a} 23 ff. {2b} 140–148. {2c} 143.
- {3} HANKEL: {3a} 77. {3b} 91.
- {4} {4a} PEIFFER; DAHAN-DALMEDICO 121. {4b} FOWLER 285.
- {5} HEUSER [4]: {5a} 43, 53–74. {5b} 43–74.
- {6} BOYER [2]: {6a} 51 f. {6b} 48 (Zitat Aristoteles).
- {7} KLINE [1]: {7a} 28. {7b} 1005.
- {8} HILDEBRANDT; TROMBA 51 f.
- {9} GREEK MATHEM. WORKS /Thomas [1] 164 f.
- {10} {10a} RUSSO. {10b} SCHAPPACHER 85–90 (Rezension zu {10a}).

I.A.2 Geometrische Größen, im Vergleich und in Verhältnissen

*Zur „Bestimmung“ geometrischer Größen. Geometrie und Zahl:
Die pythagoreische Katastrophe der inkommensurablen Strecken.
Eudoxos' Triumph übers Irrationale.*

Im vorherigen Abschnitt stand Thales stellvertretend für die Griechen, die den Geist der Wissenschaft beschworen. Noch stärkeres Echo fand sein jüngerer Zeitgenosse Pythagoras. Wenn auch nicht als Urheber des „Satzes“, den besaßen die Babylonier ein Dutzend Jahrhunderte zuvor, Ägypter und Chinesen hantierten damit.^{1a 2a 3}

Einen Pythagoras und die auf ihn eingeschworenen Schüler fesselte die Zahl, das heißt der Begriff, den sie sich von ihr machten. Gemeint waren ausschließlich die von uns „natürlich“ genannten Zahlen, mit Ausnahme der Einheit^{2b}, welche, der omnipotenten Bienenkönigin gleich, alle anderen erzeugte. Man sah in ihnen keine Maßzahlen, nicht einmal das Zählen stand im Vordergrund. Schafe und Schweine zählen wohl binär, den Menschen geht das Dezimalsystem von der Hand. Dem Völkchen der Pythagoreer fiel an der Zehn nur auf, dass sie sich unter den „Dreieckszahlen“ $1 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n+1) = 1, 3, 6, 10, 15, \dots (n \geq 1)$ als diejenige auszeichnet, welche die Summe ihrer Vorgängerinnen ist: $10 = 1 + 3 + 6$ (Abb.



I.1). Sie suchten in Zahlen das Geheimnis, *Zahlenmystik* war ihre Domäne. (By the way: „Pythagoräer“ wäre doch reformkonform, nicht nur in Österreich, oder?)

Abb. I.1 Dreieckszahlen.

*

Eine *Größe* nannten die Griechen *das*, bei dem sich etwas zufügen oder wegnehmen lässt.^{4a 5a 6a} Damals wie heute hat das Wort wechselnde Bedeutung: eine Quantität oder aber deren gegenwärtige Ausprägung. (Nach Carl Friedrich v. Weizsäcker^{7} ist Größe eines „Systems“ eine Klasse formal-möglicher Eigenschaften, die man ihre Werte nennt.) Welche, das hat jeweils der Kontext herzugeben, da *ist* oder *hat* eine Strecke eine Größe. Gleichartige Werte A, B erkennt man an ihrer Vergleichbarkeit, an der dreifältigen Alternative $A < B$, $A = B$, $A > B$, der „Trichotomie“.

Mit Maßnahmen begann die Geometrie, bei den Ägyptern. Den Griechen ging es nicht ums Praktische, nicht einmal theoretisch hatten sie vorerst sonderliches Interesse am Quantum ihrer geometrischen Objekte. Es ist kein Zufall, dass man bei Euklid vergeblich nach der Standardformel für den Dreiecksinhalt sucht.^{1b} Erst im letzten Teil der hellenistischen Epoche kam der metrische Aspekt zum Zuge, schlug sich nieder in dem gewaltigen mathematischen Werk des Archimedes, nachdem sein Vorgänger Eudoxos dem Bedürfnis nach begrifflicher Klarheit nachgekommen war.

Wir sind geneigt zu fragen, wie man die Größe von Flächen und Körpern damals „berechnete“ – von dieser unserer Vokabel müssen wir uns freimachen. Inhaltsbestimmungen sind stets Vergleiche, unser Zahlenapparat erlaubt, sich dabei auf Standards zu beziehen. Wir vergleichen die Fläche des Kreises vom Radius „1“ mit der Fläche des Quadrats von der Seitenlänge „1“, wir „messen“ die Kreisfläche an diesem *Flächen*-Normal „1“, das heißt fragen, wie viel *mal* der Einheitskreis größer ist als das Einheitsquadrat. Der Faktor heißt Verhältnis- oder *Maßzahl*, für uns. Die Alten hatten kein π . Sie waren darauf angewiesen, den *direkten* Vergleich zu suchen.

Somit galt der Inhalt einer ebenen Figur als bestimmt, wenn er nachweislich dem eines „bestimmten“, d.h. konkreten Quadrates gleichkam. Quadratur hieß der Nachweis. Das Vergleichen von Ungleichen wird die Griechen besonders beschäftigen. Da wird es, zunehmend fundiert, um *Größenverhältnisse* gehen wie das von Pyramide und umbeschriebenem Qua-

der, von Kegel und umbeschriebenem Zylinder, die beide 1:3 lauten (II.A). Beim Beweisen kam die Geometrie an ihre Grenze – *so begann „Analysis“!*

Am Beginn all dessen stand eine bis dahin wohl einzigartige Mentalität, die sich von dem als mystisch empfundenen Bezug zwischen Geometrie und Zahl nährte. Griechen fühlten sich aufgerufen, Welträtsel zu lösen. Es musste sie schwer treffen, von ihrer Wissenschaft enttäuscht zu werden. Davon im Folgenden.

* *

*

Auf einem Strahl (s. Abb. I.2) ließen sich die griechischen Zahlen 1, 2, 3, ... als Vielfache einer willkürlichen Streckeneinheit modellieren. Mit Bezug auf dieselbe Einheit ließen sich Strecken in jedwedem Längenverhältnis konstruieren. Wie jedoch verhielten sich willkürlich gewählte Strecken zueinander? Ließen sie sich, prinzipiell, wie oben nachkonstruieren, konnten Streckenpaare in diesem Sinne als der Inbegriff von Verhältnis gelten? Keine Frage für die ganz alten Griechen, sie glaubten an ihre Zahlen.

Die oben angesprochenen Verhältnisse von Rauminhalten waren insofern einfach, als man hier sagen kann, *wie oft* (lat. *quotiens*) die eine Größe B in einer Größe A enthalten ist. Dann nämlich lässt sich A an B messen, ist B ein Maß für A . Das schreibt sich $A = q B$ mit dem *Quotienten* q . Falls nun unter zwei vergleichbaren Größen A, B keine in der anderen „aufgeht“, so musste nach Pythagoras' Überzeugung ein Mittler existieren, ein beiden *gemeinsames Maß* (hier als „Einheit“ E bezeichnet). Wie folgt auszudrücken: Zahlen m, n existieren mit der Eigenschaft:

$$\text{„Es gibt } E \text{ der Art, dass } A = m E, B = n E \text{ gilt.“} \quad (1)$$

Den Darstellungen entnimmt man $n A = n (m E) = m (n E) = m B$ mit der Konsequenz

$$\text{„Es gilt } n A = m B \text{.“} \quad (2)$$

Letzteres setzt A und B in unmittelbare Beziehung. Der Schluss von (1) auf (2) besagt: Haben A, B einen gemeinsamen Teiler, so auch ein *gemeinsames Vielfaches*. Geometrisch beliebig teilbare Größen wie Strecken (Abb. I.2) gestatten den Umkehrschluss, denn in diesem Falle schließt man von (2) auf

$$E := A/m = n A / (n m) = m B / (m n) = B/n$$

(betreffs Teilung siehe Abb. I.2).

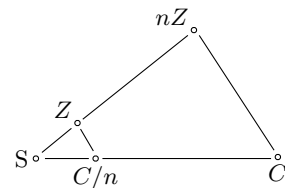


Abb. I.2 Streckenteilung.

Über Strecken lassen sich z.B. auch Rechtecksflächen konstruktiv teilen, mit Winkeln ist das anders (I.A.4). Mit (1) besteht natürlicher Anlass zu sagen, A und B verhalten sich zueinander wie m zu n , geschrieben $A : B = m : n$. Jedoch wird (2) als Definition dieser Pro-

portion zugelassen (vgl. {8}), auch schon von Eudoxos bei seiner Verallgemeinerung (s. II.B).

Mochten auch die verifizierenden Faktoren m, n in (1), (2) nicht einfach beschaffen oder praktisch gar nicht zu beschaffen sein – ihre Existenz, und nur darum ging es, schien angesichts des unerschöpflichen Vorrats an Zahlen eine Selbstverständlichkeit. Pythagoras' Offenbarung und der Pythagoreer Credo lautete: Jedes Paar gleichartiger Größen steht im Verhältnis ganzer Zahlen.

Eine glänzende Bestätigung hätte dieser Glaubenssatz auch in jenem Vermächtnis des Archimedes gefunden, an das sein Grabstein mit einer Kugel im Zylinder^{1c 9a} erinnert: Volumen^{2c 11a,g} wie auch Oberflächen^{11b} von Zylinder und Kugel stehen im Verhältnis 3:2. Eine Tatsache, über die der Mystiker Pythagoras umso mehr begeistert gewesen wäre, als er die Saite seines Monochords in eben diesem Zahlenverhältnis teilte, um die Quinte zum Grundton zu erhalten, der nächsten Verwandten zur Oktave mit 2:1. Harmonisch ging's zu in seiner Welt. Sein Kosmos tanzte nach „Sphärenklängen“, nach der Melodie *alles ist Zahl*: 7 Intervalle hat die Oktave, ergo hat der Himmel 7 Planeten, und deren Sphären sind aufeinander abgestimmt wie Saiten.^{1d} Für die Pythagoreer waren die Zahlen zuerst auf dem Plan und wurden von der Natur imitiert. Eine in jeder Hinsicht eigene Weltsicht.^{1d 12}

* *

*

Es war die erste Grundlagenkrise der Mathematik, als man in jener Gemeinde darauf stieß, dass ihr Meister geirrt hatte.^{4b 13a} Ein Kulturschock, etwa um die Zeit, als Philosophen im süditalienischen Elea begannen, eine Atmosphäre intellektueller Unruhe zu verbreiten, wie sie wohl bei keinem anderen Volk hätte entstehen können. Die „pythagoreische Katastrophe“ trug einen Keim, von dem die mathematische Welt sich im besten Sinne nie erholen sollte. Der Anlass rechtfertigt die Mühe, dem auf den Grund zu gehen.

Bekanntester, jedoch sicherlich nicht erster Beleg für den Irrtum^{14a 15a}: Mit der Seitenlänge eines Quadrates und der Länge seiner Diagonale lässt sich nicht (2) und somit auch nicht (1) erfüllen. (Zum „dilemma $\sqrt{2}$ “ siehe nicht {6c}: Es sei die Nichtganzzahligkeit der Wurzel ...) Die Begründung, die Euklid^{16} dafür anführt, ist so pfiffig und einfach, dass kaum eines unserer einschlägigen Lehrbücher daran vorbeikommt (z.B. {2d.4b.10a.11b}).

Allerdings gibt zu denken, dass Euklids Trick am Ende von Buch X als Mauerblümchen kümmert; mit gerade und ungerade wird da nicht gerade zünftig griechisch argumentiert. Man nimmt an, dass es für den ersten Unmöglichkeitsbeweis unserer Mathematik spätestens um -450 ein geometrisches Sujet gab.^{15b} Wie dies bei Diagonale und Seite des Quadrats auszusehen hätte, wird in {10b} vorgeführt (s. auch {5b.17a}). Vielleicht wurde das Entsprechende, weil einfacher, am regelmäßigen Fünfeck exerziert^{15c 17b}, vielleicht schon deshalb, weil Pentagone das Dodekaeder bilden, den 12-flächigen unter den fünf platonischen Körpern, die in ihrer Regelmäßigkeit einzigartigen.

Diese geometrische Beweise stützen sich auf ein fundamentales Rekursionsprinzip der Griechen, den *euklidischen Algorithmus*. Für den vorliegenden Zweck genügt er in seiner

einfachsten Version, der 1-fachen „Wechselwegnahme“^{2e 18a}. Beim Pentagon in Abb. I.3 sieht das wie folgt aus.^{18b}

Die Diagonalen schneiden aus dem Innern wieder ein Pentagon aus, dessen Diagonalen tun das Gleiche, und so fort.^{14b 15d 17c} Jedes Pentagon P_i ($i = 0, 1, \dots$) stiftet eine d_i lange Diagonale und eine s_i lange Seite für die nicht-abbrechende Rekursion

$$\begin{aligned} d_0 &= s_0 + d_1, & s_0 &> d_1 & \text{(also } d_1 < \tfrac{1}{2} d_0), \\ s_0 &= d_1 + s_1, & d_1 &> s_1 & \text{(also } s_1 < \tfrac{1}{2} s_0), \\ d_1 &= s_1 + d_2, & s_1 &> d_2 & \text{(also } d_2 < \tfrac{1}{2} d_1) \quad \dots \end{aligned} \quad \{15e\}$$

wobei sich die Größen d_i, s_i ($i = 1, 2, \dots$) aus gleichschenkeligen Dreiecken auf stets gleiche Weise rekursiv definieren.

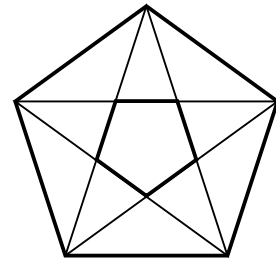


Abb. I.3 Die ersten drei in der geschachtelten Abfolge Pentagon–Pentagramm–Pentagon–...

Angenommen nun, eine Strecke der Länge t ginge in Diagonale und Seite von P_0 auf. Dann ist am Schema abzulesen: Aus $t|d_0, t|s_0$ folgt $t|d_1$, aus $t|s_0, t|d_1$ folgt $t|s_1$, und so weiter. Somit müsste t alle d_i, s_i teilen, was angesichts beliebig kleiner s_i nicht möglich ist.

*

Strecken können sich demnach einem Längenverhältnis aus natürlichen Zahlen verweigern. Hermann Hankel brachte es so auf den Punkt: Strecken können sich außer in der Quantität auch in der Qualität unterscheiden, einer „unsichtbaren“^{1e 19a} Paare von Größen mit einem gemäß (1) gemeinsamen Maß verdienen mithin ausgezeichnet zu werden. Die Griechen nannten sie „symmetrisch“, latinisiert ist das „kommensurabel“. Im 6. Jahrhundert nannte jemand das Verhältnis unserer Quadratstücke „irrational“^{1f}; danach stünden kommensurable Größen in rationalem Verhältnis zueinander.

Zwei Beispiele dazu, wie Seite und Diagonale eines Quadrates gegen das pythagoreische Gebot verstoßen. Nach Fehlanzeige zu (2) ist mit den Schrittweiten dieser Strecken nie ein Gleichstand zu erreichen. Und zu (1): Bestehen die Seiten eines Rechtecks aus m und n Längeneinheiten, so setzt sich seine Fläche aus m Kolonnen zu je n Flächeneinheiten zusammen, insgesamt $m \cdot n$ vielen. Diese kombinatorische Auslegung der „Inhaltsformel“ versagt beim Rechteck aus Seite und Diagonale eines Quadrats: Es kann nicht mit einem Quadratmuster, welches kleiner Zellen auch immer parkettiert werden.

Ein Rechteck eben dieser Form schreibt die Deutsche Industrie-Norm dem Schreibpapier vor. Das DIN A0-Blatt ist ein Rechteck von 1 qm mit dem Seitenverhältnis $1:\sqrt{2}$. Ein Mal an seiner kurzen Mittelparallele gefaltet ergibt es DIN A1-Blätter *derselben Form und so weiter*. Schön praktisch finden wir das, was den theoretisch empfindsamen Griechen ein Horror sein musste. Besser gesagt sollte. Denn selbst Platon hatte erst im Alter von besagtem Schönheitsfehler des Quadrates erfahren und habe sich, wie er schreibt, dieser Unwissenheit zugleich für alle Hellenen geschämt. Sie liege auf dem Niveau von Schweinen.^{5c 10c}

* *

*

Nach der Pythagoreer herben Erfahrung besteht beim Quadrat kein rationales Verhältnis zwischen dem Umfang und dem Durchmesser, sprich der Diagonale als der größten Binnenstrecke. Da war für den Kreis nichts Besseres zu erwarten. In unseren Augen liegt hier ein noch ärgeres „Missverhältnis“ vor, ein noch größerer Qualitätsunterschied à la Hankel, denn Umfang u und Durchmesser d eines Quadrates genügen der *algebraischen* Gleichung $u^2 = 8 d^2$, während für Umfang und Durchmesser eines Kreises nichts Entsprechendes gilt. (In unseren Zeichen: $u = (2\sqrt{2}) d$ beim Quadrat, $u = \pi d$ beim Kreis.) Machen wir den Kreisdurchmesser zur Einheit, so bemisst sich das Drumherum, das Perímetron (περίμετρον), zum „Werte“ π . Für die Griechen ein leeres Zeichen. Einer „Zahl π “ ließ sich bis weit ins 19. Jahrhundert kein vernünftiger Sinn beilegen. (Ratio war auch nicht im Spiel, als ein US-Bundesstaat – Indiana, einem Ondit nach – dieses π per Gesetz als rationale Zahl definierte ...)

* * *

Mit einem intuitiven Empfinden für „Verhältnis“ wird man bei einem bestimmten Kreis den Umfang in einem „bestimmten“ Verhältnis zum Durchmesser sehen und überzeugt sein, dass dieses Verhältnis bei allen Kreisen dasselbe ist. Ließ sich dem zu Archimedes Zeit ein Sinn beilegen? Zum Teil ja, nämlich was die Gleichheit von Verhältnissen anlangt. Sogar solchen zwischen z.B. Flächen auf der einen, Strecken auf der anderen Seite.

Einen ersten Schritt in den Nebel tat noch zu Platons Zeit einer, dessen Name hinter die der großen Klassiker zurücktritt, obwohl er ihrem größten Theoretiker gehört: Eudoxos von Knidos,^{2f} angeblich^{20} Lehrer Platons. Als Urheber einer durch Euklid überlieferten Proportionenlehre^{11d} versuchte er sich nicht an einem selbständigen Begriff „Verhältnis“, er beschied sich damit festzulegen, wann ein Größenverhältnis als gleich oder aber kleiner einem anderen gelten solle. Über eine Beziehung zwischen Verhältnissen zu befinden, ohne diese selbst zu „kennen“, das mag paradox klingen, ist es indes nicht.

Verglichen werden dabei Paare *jeweils* gleichartiger Größen. Solche, auch vergleichbar genannte Größen sind dadurch definiert, dass man jeden Partner außer sich selbst auch dem anderen zufügen kann und dass sich jeder mit einem Vielfachen des anderen übertreffen lässt (s. Zitat Archimedes in II.F).^{ 2g 11e 13c} Über die Partner heißt es bei Euklid, „sie haben ein Verhältnis zueinander“, sagen wir „*sie stehen in einem Verhältnis*“. Eine tückische Sprechweise. (Vgl. Hankels^{19b} Kommentar zu Euklids Buch V.)