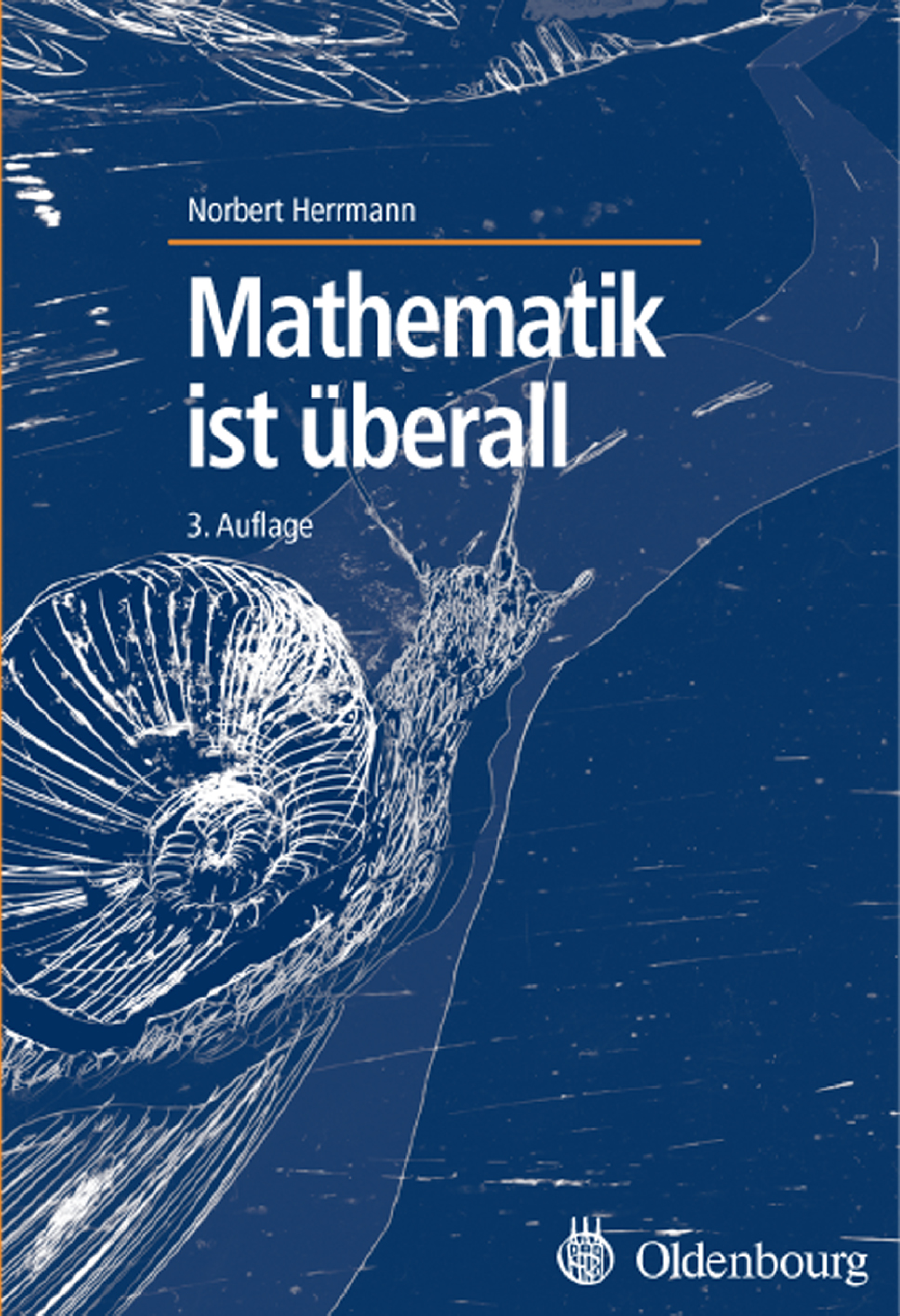

Norbert Herrmann

Mathematik ist überall

3. Auflage

Oldenbourg

Mathematatik ist überall

Dr. Dr. h.c. Norbert Herrmann lehrt an der Universität Hannover am Institut für Angewandte Mathematik.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
oldenbourg.de

Lektorat: Margit Roth
Herstellung: Anna Grosser
Cover Illustration: Anne Löper, Leipzig
Coverausführung: Gerbert-Satz, Grasbrunn
Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Druck: Grafik + Druck, München
Bindung: Thomas Buchbinderei GmbH, Augsburg

ISBN 978-3-486-58243-7

Vorwort

Es war einmal eine Gruppe von Abgeordneten im Bundesstaat Utah der Vereinigten Staaten von Amerika, so um das Jahr 1875 herum. Unter ihnen war James A. Garfield. Die saßen in einer Sitzungspause ihres Parlamentes wohl in der Kantine. Und um sich nicht zu langweilen, schlug einer der ihren, nämlich Herr Garfield, vor, sich doch mal den Pythagoras anzuschauen. Wenn dieser berühmte Satz schon vor 2000 Jahren betrachtet und bewiesen wurde, möchte er sich gerne einen neuen Beweis ausdenken. Zusammen mit seinen Kollegen arbeiteten sie ein Weilchen, und Garfield entdeckte folgende Konstruktion:

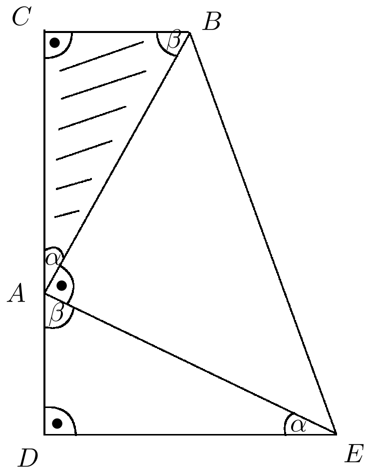

Abb. 1: *Skizze zum Beweis des Satzes des Pythagoras.*

Gegeben sei das schraffierte rechtwinklige Dreieck $\triangle ABC$. Wir zeichnen dieses Dreieck noch einmal etwas gedreht darunter, so dass die Seite $\overline{AD}$ genau in der Verlängerung der Seite $\overline{AC}$ liegt. Die Verbindungslinie $\overline{EB}$ vervollständigt dann die Figur zu einem Trapez; denn die untere Seite ist wegen der rechten Winkel parallel zur oberen Seite. Bei A stoßen die beiden Dreiecke mit ihren Winkeln α bzw. β zusammen. Wegen der Rechtwinkligkeit ergänzen sich diese beiden Winkel zu $90°$, woraus wir sofort schließen, dass der übrig bleibende Winkel bei A ebenfalls ein rechter ist. Schließlich sind die drei Winkel zusammen ja 180°.

Nun bleibt die kleine Aufgabe, den Flächeninhalt des Trapezes (Mittellinie mal Höhe, wobei Mittellinie gleich (Grundlinie + Oberlinie)/2) mit der Summe der Flächeninhalte der drei rechtwinkligen Dreiecke zu vergleichen.

$$\frac{a+b}{2} \cdot (b+a) = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + \frac{c^2}{2}.$$

Schlichte Auflösung ergibt die Formel des Herrn Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den beiden Katheten ist also gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse.

Diesen Beweis reichte Herr Garfield zur Veröffentlichung ein und tatsächlich wurde der Beweis in der Zeitschrift New England Journal of Education publiziert. Das alles wäre ja schon an sich der Erwähnung wert, dass da Abgeordnete waren, die sich in einer Sitzungspause mit Mathematik beschäftigten.

Aber jetzt kommt der noch erstaunlichere Punkt. Der Wortführer dieser Mathefreaks, nämlich James A. Garfield wurde wenig später Präsident der Vereinigten Staaten.

Das muss man auf der Zunge zergehen lassen. Da gab es mal vor urlanger Zeit, im vorvorigen Jahrhundert einen Präsidenten der USA, der einen neuen Beweis für den Pythagoras veröffentlicht hat. Er konnte diesen berühmten Satz also nicht nur hersagen, sondern hat ihn vollständig durchdrungen und dann sogar bewiesen.

Wir wagen ja nicht eine solch lästerliche Behauptung, dass heutige Politiker vielleicht den Satz des Pythagoras für eine neue Kollektion von Bettwäsche halten. Aber dass sich damals Abgeordnete in ihrer Freizeit mit mathematischen Problemen herumgeschlagen haben, stimmt doch erstaunlich. Heute dringt jedem Mathematiker, der sich durch Preisgabe seines Berufes fast outet, sofort die freudige Botschaft entgegen: In Mathe war ich immer schlecht.

Garfield blieb nur ein knappes Jahr Präsident, weil ihn dann ein wohl Verrückter im Bahnhof von Washington mit einer Pistole beschoss. Er überlebte diesen Angriff nicht lange. Ob das aber ein Grund ist, warum heutige Präsidenten, Könige, Kanzler etc. die Mathematik lieber meiden?

Wir hoffen inständig, dass dieses Büchlein einen kleinen Beitrag dazu liefert, die Schönheit der Mathematik einem breiteren Publikum nahe zu bringen.

Danken möchte ich meinem Kollegen PD Dr. Matthias Maischak, ohne den ich alle Bits und Bytes hätte persönlich nach München tragen müssen, wobei wohl viele auf der Strecke geblieben wären.

Ein großer Dank geht auch direkt an meine Lektorin, Frau Margit Roth. Ihre begeisterte Aufnahme meiner Idee zu diesem Buch war sehr hilfreich.

Nicht zuletzt danke ich meiner Frau, die sogar voller Verzweiflung meinen häuslichen Arbeitsplatz aufgeräumt hat, während ich an anderer Stelle Unordnung im Hause verbreitet habe.

Hannover Norbert Herrmann

Inhaltsverzeichnis

1 Das Bierdosen-Problem 1

1.1 Einleitung 1

1.2 Die Aufgabe 1

1.3 Schwerpunktsbestimmung 2

1.4 Tiefste Position des Schwerpunktes 5

1.5 Zweizügiges Trinken 8

1.6 Schwerpunkt einer üblichen Dose 10

1.7 Schlussbemerkung 11

2 Das Diskuswerfer-Problem 13

2.1 Einleitung 13

2.2 Die Aufgabe 13

2.3 Die „verschenkte“ Formel 14

2.4 Anwendung 17

3 Das Spiegel-Problem 19

3.1 Einleitung 19

3.2 Singlespiegel 19

3.3 Gruppenspiegel 21

3.4 Die Aufgabe 23

3.5 Das Spiegelproblem mathematisch 23

3.6 Ergebnis des Spiegelproblems 26

4 Das Bein-Problem 29
4.1 Einleitung 29
4.2 Problemstellung 29
4.3 Das Physikalische Modell 29
4.4 Analytische Lösung 31
4.5 Zeichnerische Lösung 32
4.6 Anwendungen und Ausblick 34
4.7 Eselsbrücke für $\boldsymbol{\pi}$ 35
4.8 Bemerkungen zur Zahl $\boldsymbol{\pi}$ 36

5 Das Skizzen-Problem 37
5.1 Einleitung 37
5.2 Die Aufgabe 37
5.3 Der „Beweis“ 38
5.4 Ein erster Verdacht 40
5.5 Die volle Wahrheit 41
5.6 Die Moral 43

6 Das Parallelpark-Problem 45
6.1 Einleitung 45
6.2 Die Aufgabe 45
6.3 Die Formeln von Rebecca Hoyle 47
6.4 Kritik an Rebeccas Formeln 48
6.5 Neue Formeln zum Parallelparken 51
6.6 Die Formeln für ein 45^o-Manöver 52
6.7 Die optimalen Formeln 53
6.8 Zusammenfassung 54
6.9 Werte für einige Autos 55
6.10 Kleine Denksportaufgabe 56

7 Das Parkhaus-Problem 57

7.1 Einleitung ... 57
7.2 Die Aufgabe ... 57
7.3 Das Vorwärtseinparken ... 58
7.4 Das Rückwärtseinparken ... 61

8 Das Glatteis-/Brotschneideproblem 63

8.1 Einleitung ... 63
8.2 Die Aufgabe ... 63
8.3 Physikalischer Hintergrund ... 64
8.4 Das mathematische Modell ... 65
8.5 Die Lösung ... 67
8.5.1 Das Ergebnis ... 70
8.6 Deutung des Ergebnisses ... 71
8.7 Ausblick ... 71
8.8 Kleine Denksportaufgabe ... 73

9 Das Schnecke-Rennpferd-Problem 75

9.1 Einleitung ... 75
9.2 Die Aufgabe ... 75
9.3 Mathematische Formulierung ... 76
9.4 Lösung der Differentialgleichung ... 77
9.5 Berechnung der Treffzeit ... 78
9.6 Auswertung des Beispiels ... 79

10 Das Anstoß-Problem 81

10.1 Einleitung ... 81
10.2 Die Aufgabe ... 81
10.3 Vollständige Induktion ... 84
10.4 Anwendung ... 87

10.5 Verwandte Probleme 88

11 Das Bierdeckel-Problem 91

11.1 Einleitung 91
11.2 Die Aufgabe 91
11.3 Physikalischer Hintergrund 91
11.4 Mathematische Beschreibung 92
11.5 Die Lösung 94
11.6 Anwendung auf das Bierdeckelproblem 98
11.7 Schlussbemerkung 100

12 Das Wahl-Problem 103

12.1 Einleitung 103
12.2 Das Problem 103
12.3 Das Verfahren von d'Hondt 104
12.4 Das Verfahren von Hare-Niemeyer 105
12.5 Anwendung auf die Bundestagswahl im Jahre 2002 107

13 Das Herz-Problem 111

13.1 Einleitung 111
13.2 Das Problem 111
13.3 Erste Lösung 111
13.4 Weitere Lösungen 113

Literaturverzeichnis 117

Index 119

1 Das Bierdosen-Problem

1.1 Einleitung

Um es gleich vorweg zu sagen: Der Autor mag keine Dosen, gleich welchen Inhalts. Der Energieverbrauch bei der Herstellung und beim Recycling ist viel zu hoch. Aber unser Problem ist für eine Dose sehr viel einfacher zu lösen wegen der guten Symmetrie. Als Mathematiker kann man die Dose wie einen Zylinder ansehen. Eine Flasche hat diesen komisch geformten Hals, der bei einer exakten Beschreibung ziemlich Kopfschmerzen bereiten dürfte. Also beschränken wir uns zunächst auf eine Dose. Später werden wir einige Bemerkungen zur Übertragung auf Flaschen anfügen.

1.2 Die Aufgabe

Eine Gruppe von jungen Leuten hat sich zum Picknick ins Freie begeben und sitzt nun irgendwo in der Natur im Gras, kämpft mit den Fliegen und – eben der Dose Bier. Denn dieses dumme Gefäß will nicht im Gras stehen bleiben, sondern umkippen und das schöne Bier den Ameisen opfern. Das ist die Aufgabe, wo Physiker und Mathematiker gemeinsam in die Hände spucken.

Zunächst kommt der Physiker zu Wort:

> Wir idealisieren zuerst die Dose als einen vollkommen gleichmäßigen Zylinder, vergessen also den Nippel zum Öffnen an der Oberseite und die Einbuchtung an der Unterseite, lassen auch außer Acht, dass die Farbe nicht gleichmäßig auf der Oberfläche verteilt ist wegen der Beschriftung, und sehen auch über kleine Ungenauigkeiten in der Form großzügig hinweg. Es sei eine ideale zylindrische Dose.
>
> Wenn diese Dose nun noch ganz voll ist, liegt ihr Schwerpunkt aus eben diesen geforderten Symmetriegründen genau in der Mitte, klaro.
>
> Jetzt aufpassen: Wenn die Dose ganz leer ist, wo liegt dann der Schwerpunkt? Richtig, wieder genau in der Mitte.