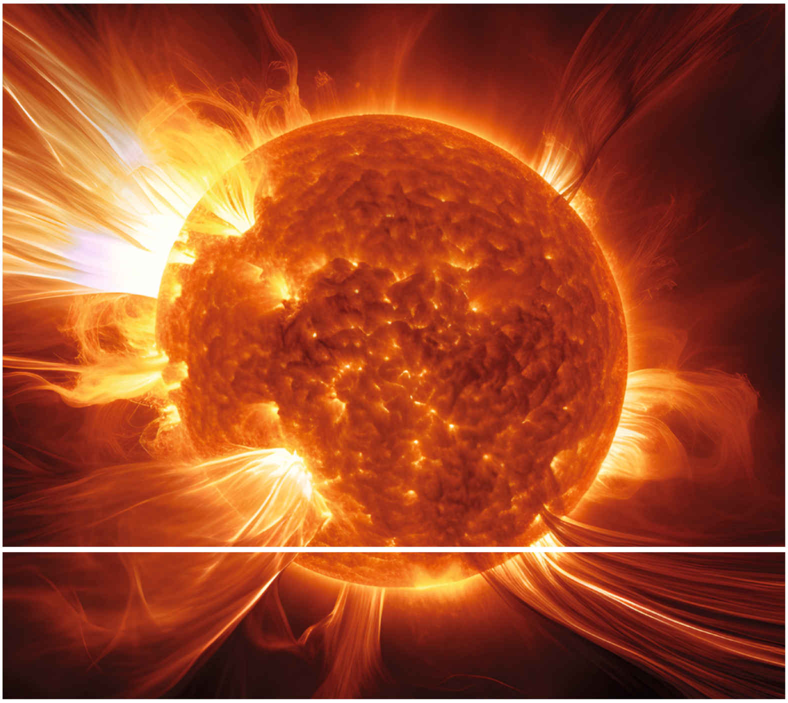
Wolfgang H. Müller
Elena N. Vilchevskaya

Kontinuumsphysik

Die klassischen Feldtheorien in moderner Darstellung



HANSER

Müller / Vilchevskaya

Kontinuumsphysik

Wolfgang H. Müller
Elena N. Vilchevskaya

Kontinuumsphysik

Die klassischen Feldtheorien
in moderner Darstellung

HANSER

Über die Autor:innen:
Prof. Dr. rer. nat. habil. Wolfgang H. Müller, Technische Universität Berlin, Deutschland
Ass. Prof. Dr. Sc. mult. Elena N. Vilchevskaya, Schweden

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C083411

Print-ISBN: 978-3-446-47342-3
E-Book-ISBN: 978-3-446-47933-3

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter http://dnb.d-nb.de abrufbar.

www.hanser-fachbuch.de
Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg
Herstellung: Frauke Schafft
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Titelmotiv: © stock.adobe.com/Anastasiya
Satz: Wolfgang H. Müller
Druck: CPI Books GmbH, Leck
Printed in Germany

Vorwort

Es ist offensichtlich, dass alles Kontinuierliche teilbar sein muss in Teilbares, das unendlich teilbar ist. Wenn es nämlich in Unteilbares teilbar wäre, so hätten wir ein Unteilbares in Kontakt mit einem Unteilbarem, weil die Ränder der Dinge, die kontinuierlich miteinander sind, eins sind und in Kontakt.
Aristoteles, Physik Buch VI

Die Frage, ob die Welt in ihrer Natur diskret oder kontinuierlich ist, wurde spätestens von den griechischen Philosophen des Altertums gestellt. Beantwortet ist sie bis heute nicht. Eines ist jedoch sicher: Die kontinuumstheoretische Sichtweise in der Physik hat einen klaren mathematischen Vorteil, da man von mächtigen mathematischen Werkzeugen wie der Tensoranalysis und der Theorie partieller Differentialgleichungen Gebrauch machen kann. Typischerweise hören Studierende der (theoretischen) Physik von kontinuierlichen Feldern zum ersten Mal in einem Kurs zur Elektrodynamik. Ingenieurstudenten des Maschinenbaus und der Physikalischen Ingenieurwissenschaften hingegen begegnen diesem Konzept in Vorlesungen zur Fluidmechanik oder (allgemeiner) in der Kontinuumsmechanik. Letztere umfasst alle Aggregatzustände der Materie, fest, flüssig und gasförmig. Die Studierenden lernen hier zwischen Bilanzen der Erhaltungsgrößen wie Masse, Impuls, Drehimpuls und Energie auf der einen und den Material- bzw. Stoffgleichungen auf der anderen Seite zu unterscheiden. Erstere haben Allgemeingültigkeit, letztere können, wie der Name andeutet, nur zur Beschreibung des Verhaltens bestimmter Materialien verwendet werden. In der Tat komplettieren sie die Bilanzen der Erhaltungsgrößen, und man gelangt letztendlich zu einem System partieller Differentialgleichungen, das man (im schlimmsten Fall numerisch) unter Verwendung von Anfangs- und Randbedingungen löst. Um die Vielfalt bei Materialgleichungen zu reduzieren, verwendet man sog. Prinzipe, wie z. B. das Entropie- oder Isotropieprinzip.

In diesem Buch werden wir diesen Weg gehen: Von der Mechanik über die Thermodynamik bis hin zur Elektrodynamik soll diese Modellierungsmethode vorgestellt werden, um zu zeigen, dass sie in allen Bereichen der Physik anwendbar ist und in gleicher Weise vorgeht. Natürlich kann man hier nur einen ersten Eindruck gewinnen. Studierende sollten danach jedoch in der Lage sein, die einschlägigen Fachbücher zu lesen. Deshalb finden sich in diesem Buch auch zahlreiche Literaturhinweise und eine umfangreiche Diskussion bzw. Vergleich verschiedener Zugänge und Meinungen. Diese grau unterlegten Stellen kann man beim ersten Lesen übergehen.

Ein paar zusätzliche Bemerkungen zu den einzelnen Kapiteln. Kapitel 1 über Tensorrechnung ist so geschrieben, dass es für sich gelesen werden kann und eine erste Einführung in die Thematik bildet, auch wenn man nicht speziell Kontinuumstheorien studieren will. Die Kapitel 4 und 5 über Thermodynamik sowie Elektrodynamik sind im Geiste kontinuumsphysikalischer Begriffsbildungen verfasst. Das ist bei beiden Fächern ungewöhnlich, insbesondere wenn man vom Ingenieurwesen her kommt und Technische Thermodynamik und Theoretische Elektrotechnik gehört hat. Vorgebildete wird dieser Zugang erstaunen, und dennoch ist es nur fair, dass in diesem Buch versucht wird, an vielen Stellen eine Brücke zu von anderswo her bekannten Modellvorstellungen zu schlagen. Insbesondere bei der Elektrodynamik haben wir uns entschieden, explizit Vergleiche mit der gängigen Physikliteratur zu ziehen und darüber hinaus den historischen Kontext herausgearbeitet. Im übrigen ist es stets unser Ziel, die Lesenden an wissenschaftliche Arbeitsweisen zu gewöhnen. So werden z. B. Formeln referenziert, auf konsistente Schreibweise geachtet, und es wird erwartet, dass man auch die in diversen Sprachen verfasste, zitierte Literatur im Original konsultiert.

Viele interessante Themen werden in der Kontinuumsliteratur nur sehr stiefmütterlich behandelt. Wir haben uns daher dazu entschlossen, auch für sie hier in diesem Buch eine Lanze zu brechen und diese – natürlich immer aus unserer Sichtweise – etwas ausführlicher behandelt. Das erste Thema sind Spiegelungen und die zu ihrer Beschreibung nötigen Transformationen. Das hier präsentierte Wissen kann man dann z. B. in der Kristallphysik gebrauchen. Zweitens der Unterschied zwischen Beobachterwechsel und Koordinatentransformation, was in vielen Büchern als gleichwertig abgetan wird. In diesem Zusammenhang schlagen wir dann auch die Brücke zur d'Alembert'schen Methode des Freischnittes mit Scheinkräften. Außerdem findet sich hier ein Zugang in die Wissenschaftsphilosophie in Gestalt des Begriffes und der Existenz des Inertialsystems der Mechanik. Drittens geben wir eine unserer Meinung nach logische Einführung in die Notwendigkeit der Einführung von *zwei* Paaren für die elektromagnetischen Feldgrößen und erläutern ihren Zusammenhang. Auch hier taucht der Begriff des Inertialsystems wieder auf, jedoch in über die Mechanik hinausgehender Form in Gestalt der sogenannten Maxwell-Lorentz-Äther-Relationen.

Das Buch ist mit zahlreichen Übungsaufgaben durchsetzt. Die Endlösungen oder Hinweise zur Lösung aus der Literatur sind angegeben aber der detaillierte Lösungsweg nicht. Nur selber lösen macht schlau. Den besten Lernerfolg wird man erzielen, wenn man alle Aufgaben bearbeitet. Aber um schneller voranzukommen, genügt es in einem ersten Schritt, sich wenigstens den Sinn des Gesagten klarzumachen.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass wenn jemand schon „offensichtlich“ sagt, und sei es Aristoteles persönlich, man davon ausgehen kann, dass es nicht offensichtlich ist. Genauso verhält es sich mit dem Begriff „Kontinuum“ in der Physik und eine der ersten Aufgaben wird es sein zu klären, was man sich unter diesem Kontinuum vorzustellen hat und wo mögliche Grenzen dieser Vorstellung liegen.

Und nicht zu vergessen, wollen wir Frau Ana Stanković und Herrn Jonas Eckardt für das Schreibfehlerfinden danken.

Berlin und Göteborg im Januar 2024

Wolfgang H. Müller und Elena N. Vilchevskaya

Internetseite der Verfasser:
https://www.tu.berlin/lkm

Internetseite der Verfasser zum Grundkurs der Mechanik:
https://https://www.tu.berlin/lkm/studium-lehre/lehrveranstaltungen

Inhalt

1 Tensorrechnung

1.1 Historie und Literaturhinweise

Die historischen Vorläufer der Tensoren waren Spalten- und Zeilenvektoren, Matrizen und Systeme der linearen Algebra mit Indizes, die in Algebra, Geometrie, Oberflächentheorie, Mechanik und anderen Wissenschaftsgebieten verwendet wurden. Die zugehörigen Operationen waren sehr umständlich und erforderten schließlich die Entwicklung eines neuen abstrakten mathematischen Apparats. So präsentierte Mitte des 19. Jahrhunderts der Amerikaner Josiah Willard Gibbs eine Vektoralgebra mit Additionsoperationen, Skalar- und Vektormultiplikation und Vektoranalysis eine Theorie der Differentialrechnung mit Vektorfeldern [Gi1901]. Ungefähr zur gleichen Zeit erschien das Buch von Heaviside [He1893], in dem der Differentialoperator Nabla zum ersten Mal auftritt und wo für die abstrakte Notation ebenfalls eine Lanze gebrochen wird. Bald darauf verallgemeinerte der Italiener Gregorio Ricci-Curbastro und sein Student, der später berühmte Mathematiker Tullio Levi-Civitá, die Vektorrechnung auf Systeme mit beliebig vielen Indizes. Mitte des 20. Jahrhunderts hatte sich die Tensorrechnung zu einem effektiven mathematischen Apparat entwickelt, der in verschiedenen Bereichen der Wissenschaft weit verbreitet war: in der Mechanik, der Differentialgeometrie, der Elektrodynamik, der Relativitätstheorie und vielen anderen. Eine ausführlichere Beschreibung der Entwicklungsgeschichte des Tensorkalküls findet sich beispielsweise in den modernen Lehrbüchern [Di2013], [Zh2001].

Derzeit gibt es zwei Hauptansätze für die Darstellung der Tensortheorie: der koordinatenbasierte und der abstrakte Zugang, manchmal auch „direkte Notation“ genannt. Im Koordinatenansatz ist ein Tensor eine Matrix, deren Komponenten beim Übergang von einer Koordinatenbasis zu einer anderen nach bestimmten Formeln transformiert werden (siehe z. B. [Ra1964], [Ko1965], [Di2013], [Er2018]). Beim abstrakten Ansatz wird der Tensor als ein Element eines linearen Raums behandelt, das man durch eine spezielle Multiplikation von Vektorräumen erhält. In diesem Fall sind keine Koordinatensysteme beteiligt und die Tensoren selbst hängen nicht von der Wahl des Koordinatensystems ab.

Von der direkten Notation eines Tensors ist es einfach, zu seiner Koordinatendarstellung überzugehen, indem man eine Basis im Tensorraum einführt. Aus rein mathematischer Sicht sind also beide Ansätze gleichwertig. Dennoch ist es die Sprache der direkten Tensorrechnung, die das Wesen der grundlegenden Konzepte und Ideen der Kontinuumstheorie am besten widerspiegelt und sich daher gut für die Probleme der Elastizitätstheorie, der Dynamik starrer Körper, der Hydrodynamik, der Theorie der Plastizität, der Thermodynamik und der Elektrodynamik eignet.

Eine große Anzahl grundlegender Monographien und Lehrbücher ist der Theorie der Tensoren gewidmet (siehe z. B. [Ve1978], [Di2013], [So1951]). Ohne einen detaillierten Literaturüberblick geben zu wollen, erwähnen wir hier für Studierende die Bücher von [Po1986], [Re2008], [Zu2006], die Anfänger in die Grundlagen der Tensorrechnung einführen, das Buch von McConnell ([Mc2014]) für Anwendungen von Tensormethoden in der analytischen und der Differentialgeometrie, das aber auch für die Festkörperdynamik, die Strömungsdynamik und die elektromagnetischen Feldtheorie gut ist. Die Werke von Eremeyev und Koautoren [Le2010], [Er2018]) behandeln Tensoranwendungen in der Elastizitätstheorie und der Platten- und Schalentheorie. Besondere Erwähnung verdienen die Bücher von Lurie ([Lu2010], [Lu2012], wo in der Sprache der direkten Tensorrechnung grundlegende Definitionen und Formeln zur Tensoralgebra und der Tensoranalysis zu finden sind, die man für das Studium der Elastizitätstheorie benötigt. Das Buch von Zhilin [Zh2001] enthält eine Darstellung der Vektor- und Tensorrechnung mit Anwendungen zur Beschreibung von Körperbewegungen, der Symmetrie von Tensoren, Tensorfunktionen, der Einführung von axialen Objekten und vieles mehr. Schließlich sei noch das Buch von Palmov erwähnt [Pa2008], in dem die Grundlagen der Tensoralgebra und der Tensoranalysis in zugänglicher Form einfach und verständlich dargestellt werden. Die Zweckmäßigkeit und Kompaktheit der mithilfe der direkten Tensorkalkulation abgeleiteten Gleichungen der Mechanik werden dort demonstriert und die Invarianz der Tensorbeziehungen diskutiert.

Die Ausführungen in unserem Lehrbuch stützen sich in erster Linie auf [Lu2012], [Lu2012], [Zu2006], [Zh2001], [Pa2008]. Es werden nachfolgend die wichtigsten Aussagen der Tensoralgebra, die Theorie der Tensorfunktionen und der Tensoranalysis behandelt sowie die Theorie der Symmetrie von Tensoren und Tensorfunktionen vorgestellt. Der größte Teil des Materials in unserem Lehrbuch wird vom Standpunkt der direkten Tensorrechnung aus präsentiert, wodurch es möglich wird, die Koordinatennotation bei der Ableitung und Analyse der wichtigsten Gleichungen der Kontinuumstheorie zu vermeiden, was die Formeln in Multi-Index-Notation oft umständlich erscheinen lässt, die das Verständnis der betreffenden Phänomene erschwert. Dennoch ist die Koordinatenschreibweise manchmal bequemer, um Zwischenableitungen beim Nachweis von Tensorrelationen vorzunehmen. In diesem Fall ist es sinnvoll, das einfache kartesische Koordinatensystem zu verwenden und nach Erhalt des Endergebnisses zur invarianten Schreibweise zurückzukehren. In der letzten Phase der Problemstellung werden auch Koordinaten eingeführt, wobei die Wahl des Koordinatensystems durch die Besonderheiten eines bestimmten Problems bestimmt wird.

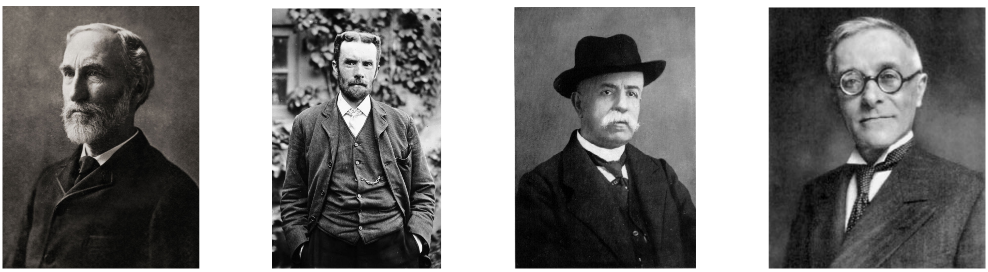


Bild 1.1 Pioniere der Vektor- und Tensorrechnung: Josiah Willard Gibbs (1839–1903), Oliver Heaviside (1850–1925), Gregorio Ricci-Curbastro (1853–1925), Tullio Levi-Civitá (1873–1941)

Die meisten klassischen Arbeiten zur Kontinuumsmechanik verwenden „materielle“ Koordinaten, die im Körper „eingefroren“ sind, so dass man die Änderung der inneren Geometrie des Körpers auf natürliche Weise mit seiner Verformung in Verbindung bringen kann (siehe [Er1980], [Ma1970], [Tr2004]). Diese Koordinaten führen zu einer nicht-orthogonalen Basis, die wiederum die Einführung einer reziproken Basis, kovarianter und kontravarianter Komponenten, Christoffel-Symbole usw. nach sich zieht. Die grundlegenden Konzepte und Operationen der Tensoralgebra und der Tensoranalysis in einer solchen nicht-orthogonalen Basis werden im letzten Abschnitt dieses Kapitels behandelt.

1.2 Tensoralgebra

1.2.1 Vektoren und Tensoren im dreidimensionalen Raum

1.2.1.1 Bezugsrahmen und Koordinatensysteme, polare und axiale Objekte

In der Begriffswelt der direkten Tensorrechnung ist der Begriff des Vektors und des Tensors einer beliebigen Stufe außerhalb eines *Bezugsrahmens* oder *Bezugssystems* bedeutungslos (vgl. auch Abschnitt 2.3). Dabei ist der Bezugsrahmen eher ein philosophisches Konzept, dessen Existenz nicht bewiesen, sondern nur postuliert werden kann. Einen Bezugsrahmen zu definieren, bedeutet insbesondere, ein Modell des absoluten Raums zu konstruieren, bei dem alle Punkte durch die Einführung von drei unabhängigen Richtungen und einer Längenskala im gegebenen Bezugsrahmen parametrisiert sind.

Die klassische Mechanik postuliert die Existenz einer unendlichen Anzahl gleicher Bezugsrahmen, und alle physikalischen Gesetze müssen diesbezüglich invariant sein, d. h. ihre Form bleibt beim Übergang von einem Rahmen zum anderen erhalten. Man spricht von *Forminvarianz* oder manchmal auch vom *Kovarianzprinzip*. Außerdem kann die Position eines beliebigen Punktes in einem bestimmten Bezugssystem durch ein Zahlentripel angegeben werden. Die Art und Weise, wie jeder Punkt in einem Bezugssystem in eine Eins-zu-Eins-Korrespondenz mit einem Zahlentripel gebracht wird, wird als Wahl des Koordinatensystems bezeichnet. In einem Bezugsrahmen können viele verschiedene Koordinatensystemen eingerichtet werden, die alle gleichwertig sind. Der Unterschied zwischen einem Bezugsrahmen und einem Koordinatensystem muss klar verstanden werden. Insbesondere hängen viele physikalische Größen (Geschwindigkeit, Beschleunigung, kinetische Energie usw.) von der Wahl des Bezugssystems ab, aber keine physikalische Größe hängt von der Wahl des Koordinatensystems in einem bestimmten Bezugssystem ab.

In dem gewählten Bezugssystem muss eine zusätzliche Vereinbarung darüber getroffen werden, welche Drehungen als positiv zu betrachten sind, d. h. es muss die Ausrichtung des Raums gewählt werden. Ein Bezugssystem wird *rechtsorientiert* genannt, wenn eine Drehung *gegen den Uhrzeigersinn* als positiv, und *linksorientiert*, wenn eine *Drehung im Uhrzeigersinn* als positiv angesehen wird.

Alle physischen Objekte werden hinsichtlich der Wahl der Orientierung im Bezugssystem in zwei Typen unterteilt (siehe auch Abschnitt 3.6.2). Objekte, die nicht von der Ausrichtung des Bezugssystems abhängen, werden als *polar* bezeichnet. Objekte, die mit dem Faktor -1 multipliziert werden, wenn die Ausrichtung des Bezugssystems umgekehrt wird, werden als *axial* bezeichnet. Zum Beispiel sind Temperatur, Verschiebung und Translationsgeschwindigkeit polare Objekte. Axiale Objekte beziehen sich in der Regel auf die Ausrichtung von Körpern im Raum. Typische Beispiele für axiale Objekte sind das Drehmoment, der Rotationsvektor, die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung.

Es ist zu beachten, dass die Ausrichtung des Bezugsrahmens erfolgt, bevor irgendwelche Operationen an Objekten im Rahmen durchgeführt werden, und dass keine weiteren Operationen an Objekten die ursprünglich gewählte Ausrichtung ändern. Insbesondere bleibt die Orientierung des Raums bei Spiegelungen erhalten.

1.2.1.2 Skalare oder Tensoren nullter Stufe

Definition: Ein Skalar oder Tensor nullter Stufe ist eine physikalische Größe, die von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig ist und durch eine einzige reelle Zahl definiert wird.

Beispiele für Skalare in der Physik sind physikalische Größen wie Temperatur, Dichte, Energie, Ladung, usw. Nicht alle Zahlen können als Skalare bezeichnet werden. So sind beispielsweise Vektorkoordinaten keine Skalare, da sie von der Wahl des Koordinatensystems abhängen. Es ist zu beachten, dass skalare Größen oft gleich bleiben aber sich manchmal auch ändern können, wenn man das Bezugssystem ändert. So ändern sich Temperatur, Dichte und innere Energie nicht, wenn man in einen anderen Bezugsrahmen wechselt, während die kinetische Energie von der Wahl des Bezugsrahmens abhängt, weil sich dieser gegenüber dem ursprünglichen Rahmen mit einer anderen Geschwindigkeit bewegen kann. Skalare können Funktionen von Raumpunkten in einem Bezugssystem sein, z. B. die Temperaturverteilung in einem Körper. In diesem Fall handelt es sich um ein skalares *Feld*.

Betrachten wir die Menge der Skalare als Elemente der Menge der reellen Zahlen, also $\mathscr{T}_0 \equiv \mathbb{R}$,[*] auf denen die Operationen der Addition, Multiplikation und Division nach den Regeln der elementaren Arithmetik eingeführt werden. Als physikalische Größen haben Skalare Dimensionen. Nur skalare Größen desselben Typs, die dieselben Dimensionen und Einheiten haben, können direkt addiert und subtrahiert werden. Andererseits können Skalare verschiedener Dimensionen geteilt und multipliziert werden.

1.2.1.3 Der Vektorraum oder Tensoren erster Stufe

Das Grundelement des Vektorraums ist ein Vektor oder Tensor erster Stufe, der als „gerichteter Pfeil“ verstanden und durch seine Länge und Richtung definiert wird. Ein Beispiel für solche Vektorgrößen in der Mechanik sind Verschiebung, Translations- und Winkelgeschwindigkeit sowie der Rotationsvektor. Wir nennen einen Nullvektor einen Vektor, dessen Länge gleich Null ist. Die Richtung des Nullvektors spielt natürlich keine Rolle.

Folgende vier Regeln werden auf der Menge der Vektoren erklärt:

1. **Vektoradditionsregel**: Sie setzt in eindeutiger Weise zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ desselben Typs mit einem dritten Vektor $\boldsymbol{c}$ desselben Typs gemäß der Parallelogramm- oder Dreiecksregel in Verbindung. Die folgenden Eigenschaften der Additionsoperation gilt es festzuhalten:

[*] Das Symbol $\mathscr{T}$ weißt auf Tensorraum hin, der nachfolgende Index kennzeichnet die Stufe.

- Kommutativität: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,
- Assoziativität: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,
- Existenz eines Nullvektors: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$,
- Existenz des Gegenvektors: $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

2. Die Regel der **Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar**: Jedem Vektor $\boldsymbol{a}$ und Skalar α kann eindeutig ein Vektor $\boldsymbol{b}=\alpha\,\boldsymbol{a}$ zugeordnet werden, der die Länge $|\alpha||\boldsymbol{a}|$ und die Richtung hat, die mit der Richtung von $\boldsymbol{a}$ übereinstimmt, wenn $\alpha>0$ und entgegengesetzt ist, wenn $\alpha<0$. Diese Vorschrift hat folgende Eigenschaften:

$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=\alpha\,\boldsymbol{a}+\beta\,\boldsymbol{a}\,,\quad \alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\,\boldsymbol{a}+\beta\,\boldsymbol{a}\,,\quad \alpha(\beta\,\boldsymbol{a})=(\alpha\,\beta)\boldsymbol{a}\,. \tag{1.1}$$

Der Vektortyp bleibt bei der Multiplikation mit einem polaren Skalar erhalten und wird bei der Multiplikation mit einem axialen Skalar umgekehrt.

Die Menge der Vektoren, für welche die beiden oben genannten Bildungsgesetze gelten, heißt *linearer Vektorraum*.

3. **Skalarmultiplikation von Vektoren**: Die Skalarmultiplikation setzt jedes Paar von Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ zu einem Skalar $\alpha=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ in Beziehung und hat die folgenden Eigenschaften:

- Kommutativität: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$,
- Distributivität: $(\alpha\,\boldsymbol{a}+\beta\,\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\alpha(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+\beta(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$,
- Positivdefinitheit: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\geq 0\,,\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

Das Ergebnis der Skalarmultiplikation ist ein polarer Skalar, wenn die beteiligten Vektoren den gleichen Typ haben, und ein axialer Skalar, wenn die Vektortypen unterschiedlich sind.

Die **Norm eines Vektors** ist seine Länge:

$$|\boldsymbol{a}|=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})^{1/2}\,. \tag{1.2}$$

Die Menge der Vektoren, für welche die drei oben genannten Kompositionsgesetze gelten, heißt *linear normierter Raum* oder *euklidischer Raum*.

Zwei Vektoren, die nicht Null sind, werden *orthogonal* genannt, wenn ihr Skalarprodukt Null ist.

Der *Einheitsvektor* eines Vektors $\boldsymbol{a}$ zeigt dessen Richtung an und hat die Länge 1:

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\,,\ |\boldsymbol{a}|\neq 0\,. \tag{1.3}$$

Die *Projektion* eines Vektors $\boldsymbol{a}$ auf die Richtung von $\boldsymbol{b}$ ist der Vektor

$$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{b}}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{e}_b\,. \tag{1.4}$$

Oft hat die Projektion eines Vektors $\boldsymbol{a}$ auf einen Vektor $\boldsymbol{b}$ die Länge

$$|\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{b}}|=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_b)\,. \tag{1.5}$$

4. **Vektorielle Multiplikation oder Kreuzprodukt** von Vektoren. Im Gegensatz zu den vorangegangenen Gesetzen ist dieses Bildungsgesetz nur in einem orientierten Bezugsrahmen sinnvoll. Das Vektorprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ist ein Vektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, dessen Länge gegeben ist durch $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ und dessen Richtung orthogonal zu der über die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannten Ebene ist. Vom Ende des Vektors $\boldsymbol{c}$ aus betrachtet, entsteht dieser im rechtsorientierten Bezugssystem durch kürzeste Drehung vom ersten auf den zweiten Vektor gegen den Uhrzeigersinn, im linksorientierten Bezugssystem im Uhrzeigersinn. Der Typ des Vektors $\boldsymbol{c}$ hängt vom Typ der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ab. Wenn beide Quellvektoren vom gleichen Typ sind, dann ist $\boldsymbol{c}$ ein Axialvektor. Wenn einer der Vektoren polar und der andere axial ist, dann ist der Vektor $\boldsymbol{c}$ polar.

   Eigenschaften des Vektorprodukts sind:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}\,, \quad (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}\,. \tag{1.6}$$

Folgende Produkte dreier Vektoren werden häufig verwendet, das sog. *gemischte* (oder *Spatprodukt*), $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$, und das *doppelte Vektorprodukt*, $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$. Der Betrag des gemischten Produkts ist gleich dem Volumen des Parallelepipeds, das aus den gegebenen Vektoren gebildet wird. Man beachte, dass ein gemischtes Produkt ein Axialskalar ist, wenn alle Vektoren, die es enthält, vom gleichen Typ sind oder zwei von ihnen axial sind.

Erinnert sei in diesem Zusammenhang an die folgenden Identitäten:

Spat- und **doppeltes Kreuzprodukt**:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})\,; \tag{1.7}$$

dies ist sogenannte *Spatproduktsregel*, da diese Größe das Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Volumens bestimmt.

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,; \tag{1.8}$$

dies ist die sogenannte *bakzap-Regel*, wobei sich der Name aus den Buchstaben der gewählten Vektoren erklärt.

Die eingeführte Menge gerichteter Segmente mit den obigen Bildungsgesetzen ist ein vektororientierter Raum $\mathscr{T}_1$. Schließlich ist zu beachten, dass die Divisionsoperation nicht auf einer Vektormenge definiert ist, da sie nur auf Mengen definiert werden kann, in denen es ein einziges Einheitselement gibt. Beim Vektorraum ist das nicht der Fall, da er eine unendliche Anzahl von Einheitsvektoren unterschiedlicher Richtung enthält.

Übungsaufgabe *Kreuzprodukt*

1. Zeige, dass $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$.
2. Beweise, dass $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$.

1.2.1.4 Der Tensorraum oder Tensoren beliebiger Stufe

Skalare und Vektoren sind nur ein Teil der ganzen Vielfalt an Größen und Begriffen, welche die moderne Naturwissenschaft benötigt. Tensoren höherer Stufe entstehen in der Mechanik als Verallgemeinerung von Vektorräumen. Betrachten wir als Beispiel ein System, das aus drei Federn mit unterschiedlichen Federsteifigkeiten k_i besteht (Bild 1.2). Geben wir dem Mittelpunkt der Federbindung eine Verschiebung $\Delta\boldsymbol{r}$. Es liegt auf der Hand, dass die Rückstellkraft die Summe der in den Federn erzeugten elastischen Kräfte ist, $\boldsymbol{F} = F_1\boldsymbol{e}_1 + F_2\boldsymbol{e}_2 + F_3\boldsymbol{e}_3$, wobei $\boldsymbol{e}_i$ ein Einheitsvektor ist, der entlang der i-ten Feder zeigt, und die Größe der Kraft F_i proportional zur Projektion des Kopplungsmittelpunktes auf die entsprechende Einheitsrichtung ist, $F_i = -k_i\boldsymbol{e}_i \cdot \Delta\boldsymbol{r}$. Wir haben also $\boldsymbol{F} = -(k_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + k_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3)\cdot\Delta\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{K}\cdot\Delta\boldsymbol{r}$, wobei der Tensor $\boldsymbol{K}$, der sich aus der Summe von drei Paaren von Vektoren multipliziert mit den entsprechenden Federsteifigkeiten ergibt, als Tensorsteifigkeit des Federsystems interpretiert werden kann. Man beachte, dass in diesem Fall die soeben verwendeten Vektorpaare $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i$, $i = 1,2,3$ als Ganzes wirken, wobei der erste Vektor dieses Paares die Richtung der Feder und der zweite Vektor die Richtung der Kraft angibt, die beide in diesem Problem zusammenfallen. Um diesen Unterschied zu verdeutlichen, untersuchen wir, wie der Spannungszustand in einem verformbaren Körper beschrieben wird.

Bild 1.2 Steifigkeitstensor eines Federsystems

Schneiden wir den Körper gedanklich durch die Fläche ΔS in zwei Teile und betrachten einen der Teile. Bezeichnen wir mit $\boldsymbol{n}$ die äußere Normale zur Oberfläche. Auf die Fläche $\Delta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n})$ wirkt von der Seite des deformierten Teils eine Kraft ΔS, die von der Ausrichtung der Fläche abhängt (Bild 1.3). Der *Spannungsvektor* in einem Punkt M, der auf ein infinitesimales Flächenelement ΔS wirkt, ist der Grenzwert des Verhältnisses

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \lim_{d\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{f}}{\Delta S}\,, \tag{1.9}$$

wobei d der größte Durchmesser des Bereichs ist.

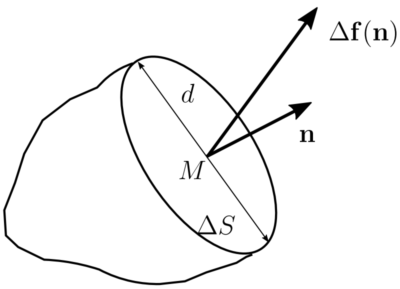


Bild 1.3 Zum Spannungstensor

Um die Spannung im Punkt M zu bestimmen, ist es also notwendig, eine orientierte Fläche zu definieren, die durch die Normale $\boldsymbol{n}$ und den auf diese Fläche wirkenden Spannungsvektor definiert ist. Der *Spannungstensor* ist also ein geordnetes Paar von Vektoren $\boldsymbol{n}$ und $\boldsymbol{t}$, von denen der erste die Fläche und der zweite die auf diese Fläche wirkende Kraft definiert. Die Reihenfolge der Faktoren ist dabei von grundlegender Bedeutung und darf – einmal festgelegt – nicht geändert werden. Man beachte in diesem Zusammenhang, dass die Paare $\boldsymbol{nt}$ und $\boldsymbol{tn}$ unterschiedlich sind. Um den Spannungszustand im Punkt M vollständig zu beschreiben, müssen die Spannungsvektoren in allen Ebenen, die durch M verlaufen, angegeben werden. Es gibt eine unendliche Anzahl solcher Ebenen. Mit einer Standardargumentation, siehe z. B. [Pa2008], kann gezeigt werden, dass der Spannungszustand an einem Punkt vollständig definiert ist, wenn eine ungeordnete Menge von drei geordneten Vektorpaaren gegeben ist.

Das formale Produkt zweier Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$, die zu der Menge $\mathscr{T}_1$ gehören, heißt *Tensormultiplikation* oder *dyadisches Produkt*. Es sei erwähnt, dass in der Literatur häufig ein spezielles Zeichen für diese Tensormultiplikation, nämlich $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$, verwendet wird, das auch in diesem Lehrbuch gelegentlich zum Einsatz kommt. Der Begriff Tensormultiplikation zeigt an, dass diese Operation einige Eigenschaften einer gewöhnlichen Multiplikationsoperation hat.

Man betrachte die endliche Summe der Dyaden:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{cd} + \boldsymbol{ef} + \cdots . \tag{1.10}$$

Die Elemente von $\boldsymbol{A}$ werden als Tensoren zweiter Stufe bezeichnet, wenn folgende Äquivalenzbedingungen erfüllt sind (α ist ein Skalar):

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{cd} = \boldsymbol{cd} + \boldsymbol{ab}\,, \quad \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}\,, \\ &(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}\,, \quad (\alpha\,\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}(\alpha\,\boldsymbol{b})\,. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Ein Tensor zweiter Stufe ist also eine ungeordnete Menge von geordneten Dyaden.

Bezeichnen wir die Menge der Tensoren zweiter Stufe, die man durch Tensorprodukt dreidimensionaler linearer Räume $\mathscr{T}_1\mathscr{T}_1$ erhält, mit $\mathscr{T}_2$. Wir führen auf der Menge $\mathscr{T}_2$ die Operationen der Addition und Multiplikation mit einer Zahl ein, so dass die Grenzen der Menge nicht überschritten werden:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A} = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{cd}\,, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{de} + \boldsymbol{gh}\,, \\ &\boldsymbol{S} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{cd} + \boldsymbol{de} + \boldsymbol{gh}\,, \\ &\alpha\,\boldsymbol{A} = (\alpha\,\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} + (\alpha\,\boldsymbol{c})\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}(\alpha\,\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}(\alpha\,\boldsymbol{d})\,. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Eine wichtige Eigenschaft des linearen Raums ist das Vorhandensein eines Null- und eines Gegentensors:

Der *Nulltensor* der Stufe 2 ist der Tensor $\mathbf{0} = \mathbf{oo}$, der über eine Dyade zweier Nullvektoren (hier zur Unterscheidung mit $\mathbf{o}$ bezeichnet) entsteht. Wenn wir den Nullvektor in der Form $\mathbf{o} = 0\boldsymbol{a}$ darstellen, erhalten wir eine alternative Darstellung des Nulltensors:

$$\mathbf{0} = \mathbf{o}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\mathbf{o}\,. \tag{1.13}$$

Der *Gegentensor* ist derjenige Tensor, der bei Summation zu einem Nulltensor führt.

$$\mathbf{\Pi} = (-1)\boldsymbol{A}\,. \tag{1.14}$$

Tensoren noch höherer Stufe werden auf die gleiche Weise eingeführt. Wir definieren das Tensorprodukt von k Vektorräumen: $\mathcal{T}_k = \underbrace{\mathcal{T}_1\mathcal{T}_1\ldots\mathcal{T}_1}_{k}$. Wir nennen die geordnete Menge aufsteigender Tensoren k-ter Stufe auch: $\boldsymbol{ab}$-Dyade, $\boldsymbol{abc}$-Triade und $\boldsymbol{abcd}$-Tetrade.

Die Elemente der Menge $\mathcal{T}_k$, für die die entsprechenden Äquivalenzbeziehungen erfüllt sind, heißen Tensoren k-ter Stufe und werden, wenn es nicht aus dem Kontext hervorgeht, in dem Symbol ${}^k\boldsymbol{A}$ erfasst. Somit bezeichnet z. B. ${}^2\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{A}$ einen Tensor zweiter Stufe.

Da der Raum der Tensoren k-ter Stufe $\mathcal{T}_k$ ein linearer Raum ist, definiert man Additions- und Multiplikationsoperationen mit einer Zahl wie folgt:

$$\alpha\left({}^k\boldsymbol{A} + {}^k\boldsymbol{B}\right) = \alpha\,{}^k\boldsymbol{A} + \alpha\,{}^k\boldsymbol{B}\,. \tag{1.15}$$

Man beachte, dass die Summe von Tensoren nur für Tensoren gleichen Ranges definiert ist.

1.2.1.5 Vektor- und Tensorbasen sowie Tensor-Koordinaten

Die Dreidimensionalität des Bezugssystems bedeutet, dass es im eingeführten Raum $\mathcal{T}_1$ Dreiergruppen linear unabhängiger Vektoren gibt, aber vier (und mehr) beliebige Vektoren erweisen sich als linear abhängig.

Definition: Jedes Triplett linear unabhängiger Vektoren wird als **Basis** bezeichnet.

Man beachte, dass alle Operationen mit Tensoren invariant sind und nicht von der gewählten Basis abhängen. Der Einfachheit halber wählen wir daher drei beliebig orientierte orthogonale Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$:*

$$\boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}_n = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n\,; \\ 0, & m \neq n\,, \end{cases} \tag{1.16}$$

wobei δ_{mn} das sogenannte *Kroneckersymbol* ist. Eine Basis, welche die Gleichung (1.16) erfüllt, heißt *orthonormal*.

Für jeden Vektor $\boldsymbol{a}$ gibt es eine einzige Menge von Zahlen a_1, a_2, $a_3 \in \mathcal{T}_0$, die man Koordinaten des Vektors in der gewählten Basis nennt:

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 = a_i\boldsymbol{e}_i\,, \quad a_i = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i\,. \tag{1.17}$$

Hier und im Folgenden wird nach der *Einstein'schen Summenkonvention* vorgegangen, d. h. bei zweimal wiederholten Indizes** wird automatisch von 1 bis 3 summiert.

Die skalare Multiplikation der Vektoren $\boldsymbol{a} = a_m\boldsymbol{e}_m$ und $\boldsymbol{b} = b_n\boldsymbol{e}_n$ in Koordinatenschreibweise hat die Form:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_m b_n \delta_{mn} = a_n b_n\,. \tag{1.18}$$

Wir ordnen nun die Basisvektoren so an, dass sie das rechte Tripel der Vektoren $(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2)\cdot\boldsymbol{e}_3 = 1$ bilden und betrachten das Vektorprodukt zwischen $\boldsymbol{e}_i$ und $\boldsymbol{e}_j$,

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \equiv \epsilon_{kij}\boldsymbol{e}_k\,, \tag{1.19}$$

* Die nicht-orthogonale Basis wird in Abschnitt 1.5 betrachtet.

** Für eine nicht-orthogonale Basis wird diese Regel modifiziert (siehe Abschnitt 1.5).

wobei ϵ_{ijk} das sog. *Levi-Civitá-Symbol* bezeichnet. Die Werte von ϵ_{ijk} sind gleich Null, wenn es sich wiederholende Indizes ijk gibt, gleich 1 für die Sequenz der Indizes 123 und Sequenzen, die durch zyklische Permutation daraus erhalten werden, und schließlich gleich -1, wenn diese Ordnung gebrochen ist, d. h. für Sequenzen 132, 213 und 321. Diese Regeln haben wir im letzten Schritt in Gleichung (1.19) bereits angewandt.

Multipliziert man Gleichung (1.19) skalar mit $\boldsymbol{e}_n$, erhält man eine nützliche Formel zur Bestimmung der Komponenten des Levi-Civitá-Tensors,

$$\epsilon_{ijk} = (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_k\,. \tag{1.20}$$

Betrachten wir nun die Tensormultiplikation von Vektoren. Jede Dyade $\boldsymbol{ab}$ kann in folgender Form dargestellt werden:

$$\boldsymbol{ab} = (a_m \boldsymbol{e}_m)(b_n \boldsymbol{e}_n) = a_m b_n \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{e}_n\,. \tag{1.21}$$

Stellt man in ähnlicher Form alle im Tensorausdruck enthaltenen Dyaden dar, so erhält man, dass jeder Tensor zweiter Stufe durch folgende Erweiterung dargestellt werden kann:

$$\boldsymbol{A} = A_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j\,, \;\; A_{mn} = \boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_n\,. \tag{1.22}$$

Die Kombinationen $\boldsymbol{e}_m \boldsymbol{e}_n$ werden als Elemente der Tensorbasis bezeichnet, und Werte von A_{mn} sind die Tensorkoordinaten in Bezug auf die eingeführte Tensorbasis. Der Tensor des zweiten Ranges kann also als Summe von neun Dyaden dargestellt werden.

Satz: Die Dimensionalität des Raumes $\mathcal{T}_2$ ist 9, d. h. die Elemente der Tensorbasis $\boldsymbol{e}_m \boldsymbol{e}_n$ sind linear unabhängig.

Beweis: Lineare Unabhängigkeit der Tensorbasiselemente bedeutet, dass

$$\alpha_{mn}\, \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0} \tag{1.23}$$

dann und nur dann möglich ist, wenn $\alpha_{mn} = 0$ gilt. Durch skalare Multiplikation der Gleichung (1.23) mit $\boldsymbol{e}_k$ erhalten wir: $\alpha_{mn}\, \boldsymbol{e}_m \delta_{nk} = \alpha_{mk}\, \boldsymbol{e}_m = \boldsymbol{0},\; k = 1, 2, 3$. Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Vektorbasiselemente ergibt sich also, dass $\alpha_{mn} = 0$. In einer festen Basis ist ein Tensor zweiter Stufe also vollständig durch seine Koordinatenmatrix der Ordnung 3×3 definiert. □

Behauptung: Jeder Tensor zweiter Stufe kann als Summe von drei Dyaden dargestellt werden.

Beweis durch Konstruktion: Wenn man die Ausdrücke in der Gleichung (1.22) zusammenfasst, erhält man

$$\boldsymbol{A} = (A_{m1} \boldsymbol{e}_m)\boldsymbol{e}_1 + (A_{m2} \boldsymbol{e}_m)\boldsymbol{e}_2 + (A_{m3} \boldsymbol{e}_m)\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{a}_3 \boldsymbol{e}_3\,. \;\square \tag{1.24}$$

Man beachte, dass, obwohl jede Dyade ein Tensor zweiter Stufe ist, ein beliebiger Tensor zweiter Stufe nur in Ausnahmefällen auf eine einzelne Dyade reduziert werden kann.

Ein Tensor zweiten Ranges kann in invarianter Form, als ein Element des Tensorraums: $\boldsymbol{A} \in \mathscr{T}_2$, in dyadischer Form als Summe von Dyaden, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_m \boldsymbol{b}_m$, und in Koordinatenform durch Zerlegung über Elemente der Tensorbasis, $\boldsymbol{A} = A_{mn} \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{e}_n$, dargestellt werden.

In Analogie zur Gleichung (1.21) kann jeder Tensor k-ter Stufe wie folgt dargestellt werden:

$$ {}^k\boldsymbol{A} = A_{n_1 n_2 \dots n_k} \boldsymbol{e}_{n_1} \boldsymbol{e}_{n_2} \dots \boldsymbol{e}_{n_k} \,. \tag{1.25}$$

Die Elemente $\boldsymbol{e}_{n_1} \boldsymbol{e}_{n_2} \dots \boldsymbol{e}_{n_k}$ bilden eine Polybasis im Raum $\mathscr{T}_k$, und die Zahlen $A_{n_i n_2 \dots n_k}$ sind die Tensorkoordinaten k-ter Stufe in dieser Polybasis. Die Reihenfolge der Indizes der Koordinaten entspricht der Reihenfolge der Indizes der Basisvektoren in der Polybasis.

Es ist einsichtig, dass die Dimension des Raumes $\mathscr{T}_k$ zu 3^k gegeben ist. Durch Gruppierung der Terme in der Gleichung (1.25) kann gezeigt werden, dass ein Tensor k-ter Stufe als eine Summe von 3^{k-1} Dyaden k-ter Stufe dargestellt werden kann: der Tensor dritten Ranges ist eine Menge von neun Triaden, der Tensor vierten Ranges ist eine Menge von siebenundzwanzig Tetraden, usw.:

$$ {}^k\boldsymbol{A} = \sum_{n=1}^{3^{k-1}} \boldsymbol{a}_{n_1} \boldsymbol{a}_{n_2} \dots \boldsymbol{a}_{n_k} \,. \tag{1.26}$$

Abschließend stellen wir fest, dass ein Tensor beliebiger Stufe zwar vollständig durch seine Koordinaten in der gewählten Basis bestimmt ist, man den Tensor aber nicht mit seinen Koordinaten identifizieren sollte. Der Tensor ist ein unveränderliches Objekt, das nicht an die Wahl der Basis gebunden ist, während seine Koordinaten von der Wahl der Basis abhängen.

Übungsaufgabe *Tensoroperationen*

1. Vereinfache $A_{ij}\delta_{ik}$.
2. Zeige, dass
   (a) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$,
   (b) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$,
   (c) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{jli} A_{mk} = 2A_{ml}$.

1.2.2 Operationen für Tensoren zweiter Stufe

1.2.2.1 Symmetrische und antisymmetrische Tensoren

Definition *Transponierter Tensor*: Das Symbol $\boldsymbol{A}^\top$ bezeichnet denjenigen Tensor zweiter Stufe, bei dem die Reihenfolge der Faktoren in allen Dyaden vertauscht wurde:*

$$ \boldsymbol{A}^\top = (\boldsymbol{a}_m \boldsymbol{b}_m)^\top = \boldsymbol{b}_m \boldsymbol{a}_m \quad \Leftrightarrow \quad A^\top_{ij} = A_{ji} \,. \tag{1.27}$$

Offensichtlich ist $(\boldsymbol{A}^\top)^\top = \boldsymbol{A}$ für jeden Tensor zweiter Stufe.

* Für die Freunde der Indexschreibweise zeigen wir nachfolgend neben der direkten Notation auch oft den entsprechenden Indexausdruck.

Ein Tensor zweiten Ranges wird *symmetrisch* genannt, wenn $\boldsymbol{A}^\mathsf{T} = \boldsymbol{A}$ gilt und *antisymmetrisch*, wenn $\boldsymbol{A}^\mathsf{T} = -\boldsymbol{A}$ erfüllt ist.

Ein beliebiger Tensor zweiten Ranges $\boldsymbol{A}$ kann mit folgender Regel eindeutig auf einen symmetrischen Tensor $\boldsymbol{A}^\mathrm{S}$ abgebildet werden:

$$\boldsymbol{A}^\mathrm{S} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\mathsf{T}\right) . \tag{1.28}$$

Der Tensor $\boldsymbol{A}^\mathrm{S}$ heißt der symmetrische Teil von $\boldsymbol{A}$, und die Gleichung (1.28) wird als Symmetrisierung des Tensors $\boldsymbol{A}$ bezeichnet.

In ähnlicher Weise kann ein beliebiger Tensor $\boldsymbol{A}$ eindeutig auf einen antisymmetrischen Tensor $\boldsymbol{A}^\mathrm{A}$ abgebildet werden:

$$\boldsymbol{A}^\mathrm{A} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^\mathsf{T}\right) . \tag{1.29}$$

Folglich lässt jeder Tensor zweiter Stufe $\boldsymbol{A}$ eine eindeutige Darstellung als Summe seiner symmetrischen $\boldsymbol{A}^\mathrm{S}$ und antisymmetrischen $\boldsymbol{A}^\mathrm{A}$ Teile zu:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\mathrm{S} + \boldsymbol{A}^\mathrm{A} . \tag{1.30}$$

Übungsaufgabe *Zerlegung in symmetrischen und antisymmetrischen Teil*

Berechne den symmetrischen und den antisymmetrischen Anteil des Tensors

$$\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 . \tag{1.31}$$

1.2.2.2 Tensormultiplikation

Stellen wir zunächst die Tensoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ in der Form $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_m$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{d}_n\boldsymbol{f}_n$ dar. Diverse Operationen werden so verständlich. Im Einzelnen:

(A) Skalarmultiplikationen eines Tensors mit einem Vektor

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}_m\left(\boldsymbol{b}_m\cdot\boldsymbol{c}\right) , \ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}_m\right)\boldsymbol{b}_m \quad \Leftrightarrow \quad \left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{c}\right)_i = A_{ij}c_j . \tag{1.32}$$

Das Ergebnis dieser Multiplikation ist ein Vektor.

Es sei betont, dass die Multiplikation eines Tensors mit einem Vektor auf der linken und auf der rechten Seite im Allgemeinen zu unterschiedlichen Vektoren führt. Die folgende Beziehung ist gültig:

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}_m)\boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{b}_m(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}_m) = (\boldsymbol{b}_m\,\boldsymbol{a}_m)\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{A}^\mathsf{T}\cdot\boldsymbol{c} \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{A}) = c_jA_{ji} \equiv A^\mathsf{T}_{ij}c_j . \tag{1.33}$$

Daraus ergeben sich weitere Aussagen zu symmetrischen und antisymmetrischen Tensoren, nämlich:

Ein Tensor zweiter Stufe ist symmetrisch, wenn für jeden Vektor $\boldsymbol{x}$ die Gleichung $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}$, gilt und antisymmetrisch, wenn für jeden Vektor $\boldsymbol{x}$ die Gleichung $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}$ erfüllt ist. Wenn wir diese Beziehung skalar mit $\boldsymbol{x}$ multiplizieren, erhalten wir eine wichtige Eigenschaft des antisymmetrischen Tensors: $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = 0$.

(B) Vektormultiplikationen eines Tensors mit einem Vektor

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}_m(\boldsymbol{b}_m\times\boldsymbol{c})\ ,\ \ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}_m)\,\boldsymbol{b}_m \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{c})_{ij} = \epsilon_{jkl}A_{ik}c_l\,. \tag{1.34}$$

Das Ergebnis dieser Multiplikation ist ein Tensor zweiter Stufe.

Die folgende Beziehung gilt:

$$(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{A})^{\mathsf{T}} = -\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\times\boldsymbol{c}\,. \tag{1.35}$$

Zum Beweis berechnen wir den linken und den rechten Teil der Gleichung getrennt:

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{A})^{\mathsf{T}} = ((\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}_m)\boldsymbol{b}_m)^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{b}_m(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}_m)\,,\\ &-\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\times\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{b}_m(\boldsymbol{a}_m\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}_m(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}_m)\,.\end{aligned} \tag{1.36}$$

(C) Tensormultiplikationen eines Tensors mit einem Vektor

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_m\boldsymbol{c}\ ,\ \ \boldsymbol{c}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_m \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{c})_{ijk} = A_{ij}c_k\ ,\ \ (\boldsymbol{c}\boldsymbol{A})_{ijk} = c_iA_{jk}\,. \tag{1.37}$$

Das Ergebnis dieser Multiplikation sind Tensoren dritter Stufe.

(D) Innere Tensormultiplikation

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_m)\cdot\left(\boldsymbol{d}_n\boldsymbol{f}_n\right) = (\boldsymbol{b}_m\cdot\boldsymbol{d}_n)\boldsymbol{a}_m\boldsymbol{f}_n \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})_{ij} = A_{ik}B_{kj}\,. \tag{1.38}$$

Das Ergebnis dieser Multiplikation ist ein Tensor zweiter Stufe.

Man beachte: Im Gegensatz zur skalaren Multiplikation von Vektoren ist die innere Multiplikation von Tensoren nicht kommutativ, d. h. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$, da:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_m\cdot\boldsymbol{d}_n)\boldsymbol{a}_m\boldsymbol{f}_n\ ,\ \ \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{f}_n\cdot\boldsymbol{a}_m)\boldsymbol{d}_n\boldsymbol{b}_m\,. \tag{1.39}$$

Transposition bei innerer Multiplikation von Tensoren liefert:

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}\cdot\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\,,\\ &(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^{\mathsf{T}} = \left(\boldsymbol{a}_m(\boldsymbol{b}_m\cdot\boldsymbol{d}_n)\boldsymbol{f}_n\right)^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{d}_n\cdot\boldsymbol{b}_m)\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}\cdot\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\,.\end{aligned} \tag{1.40}$$

(E) Vektorielle Tensormultiplikation

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_m)\times\left(\boldsymbol{d}_n\boldsymbol{f}_n\right) = \boldsymbol{a}_m(\boldsymbol{b}_m\times\boldsymbol{d}_n)\boldsymbol{f}_n \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_{ijk} = A_{il}\epsilon_{jlm}B_{mk}\,. \tag{1.41}$$

Das Ergebnis dieser Multiplikation ist ein Tensor dritter Stufe.

(F) Tensormultiplikation eines Tensors mit einem Tensor

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{a}_m \boldsymbol{b}_m \boldsymbol{d}_n \boldsymbol{f}_n \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{AB})_{ijkl} = A_{ij} B_{kl} \,. \tag{1.42}$$

Das Ergebnis dieser Multiplikation ist ein Tensor vierter Stufe.

(G) Inneres Skalarprodukt von Tensoren

$$\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{a}_m \boldsymbol{b}_m) \odot \left(\boldsymbol{d}_n \boldsymbol{f}_n\right) = (\boldsymbol{a}_m \cdot \boldsymbol{d}_n)(\boldsymbol{b}_m \cdot \boldsymbol{f}_n) \equiv \boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} \,. \tag{1.43}$$

Das Ergebnis der Multiplikation ist ein Skalar. Wie gezeigt, wird das Skalarprodukt von Tensoren häufig auch durch zwei senkrechte Punkte $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B}$ bezeichnet.

Übungsaufgabe *Inneres Skalarprodukt von Tensoren indizistisch*

Erinnere, dass man kartesisch schreiben darf $\boldsymbol{A} = A_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j$ und $\boldsymbol{B} = B_{kl} \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_l$. Zeige damit, dass gilt:

$$\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = A_{ij} B_{ij} \,. \tag{1.44}$$

Man dabei spricht dabei von einem *inneren* (Doppel-) Skalarprodukt zwischen zwei Tensoren zweiter Stufe.

Das Skalarprodukt von Tensoren ist kommutativ:

$$\boldsymbol{B} \odot \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{d}_n \cdot \boldsymbol{a}_m)(\boldsymbol{f}_n \cdot \boldsymbol{b}_m) = (\boldsymbol{a}_m \cdot \boldsymbol{d}_n)(\boldsymbol{b}_m \cdot \boldsymbol{f}_n) = \boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{B} \tag{1.45}$$

und ist positiv definit. Die positive Definitheit eines Skalarprodukts von Tensoren lässt sich am einfachsten am Beispiel einer Dyade zeigen:

$$\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{ab}) \odot (\boldsymbol{ab}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}) \,. \tag{1.46}$$

Dieser Ausdruck ist nur dann Null, wenn einer der Dyadenvektoren Null ist. In diesem Fall fällt die Dyade mit einem Nullelement des Tensorraums zusammen.

(H) Äußeres Skalarprodukt von Tensoren

$$\boldsymbol{A} \cdot\cdot\, \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{a}_m \boldsymbol{b}_m) \cdot\cdot \left(\boldsymbol{d}_n \boldsymbol{f}_n\right) = (\boldsymbol{b}_m \cdot \boldsymbol{d}_n)(\boldsymbol{a}_m \cdot \boldsymbol{f}_n) = A_{ij} B_{ji} \,. \tag{1.47}$$

Das Ergebnis dieser Multiplikation ist ein Skalar. Hierbei spricht man vom äußeren (Doppel-) Skalarprodukt zweier Tensoren zweiter Stufe.

Die doppelte äußere Multiplikation ist kommutativ: $\boldsymbol{A} \cdot\cdot\, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot\cdot\, \boldsymbol{A}$, was aus der Kommutativität der Skalarmultiplikation von Vektoren folgt. Aber anders als beim inneren Skalarprodukt von Tensoren kann $\boldsymbol{A} \cdot\cdot\, \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$ gleich Null sein kann, wenn die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ orthogonal sind.

Übungsaufgabe *Äußeres Skalarprodukt von Tensoren indizistisch*

Erinnere, dass man kartesisch schreiben darf $\boldsymbol{A} = A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ und $\boldsymbol{B} = B_{kl}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l$. Zeige damit, dass gilt:

$$\boldsymbol{A} \cdot\cdot\, \boldsymbol{B} = A_{ij}B_{ji}\,.$$

Erläutere mögliche Gründe für die Wortwahl, also warum man von einem *äußeren* Skalarprodukt spricht.

Die doppelte innere Multiplikation von Tensoren ist mit der äußeren Multiplikation durch die folgenden Beziehungen verbunden:

$$\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cdot\cdot\, \boldsymbol{B}^\top = \boldsymbol{A}^\top \cdot\cdot\, \boldsymbol{B} \quad \Leftrightarrow \quad A_{ij}B_{ij} = A_{ij}B^\top_{ji} = A^\top_{ji}B_{ij}\,. \tag{1.48}$$

Es ist leicht gezeigt, dass

$$\boldsymbol{A} \cdot\cdot\, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^\top \cdot\cdot\, \boldsymbol{B}^\top = \boldsymbol{B}^\top \cdot\cdot\, \boldsymbol{A}^\top\,. \tag{1.49}$$

Betrachten wir nun die doppelte innere Multiplikation des symmetrischen $\boldsymbol{S}$ und des antisymmetrischen $\boldsymbol{A}$ Tensors:

$$\boldsymbol{A} \cdot\cdot\, \boldsymbol{S} = \boldsymbol{A}^\top \cdot\cdot\, \boldsymbol{S}^\top = -\boldsymbol{A} \cdot\cdot\, \boldsymbol{S}\,. \tag{1.50}$$

Da eine Zahl nur dann gleich ihrer Gegenzahl sein kann, wenn sie Null ist, ergibt sich die Identität

$$\boldsymbol{A} \cdot\cdot\, \boldsymbol{S} = 0\,. \tag{1.51}$$

Daraus folgt, dass die Tensoren in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil zerlegt werden müssen:

$$\boldsymbol{A} \cdot\cdot\, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^\mathrm{S} \cdot\cdot\, \boldsymbol{B}^\mathrm{S} + \boldsymbol{A}^\mathrm{A} \cdot\cdot\, \boldsymbol{B}^\mathrm{A}\,. \tag{1.52}$$

Einer der Tensoren in der äußeren Multiplikation sei das Ergebnis der inneren Multiplikation der beiden anderen Tensoren. Durch direkte Überprüfung können wir beweisen, dass die folgende Kette von Gleichungen stimmt:

$$\boldsymbol{A} \cdot\cdot\, (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot\cdot\, \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A}) \cdot\cdot\, \boldsymbol{B}\,. \tag{1.53}$$

Die inneren und äußeren Tensormultiplikationen können auch als alternative Schreibweise für skalare Tensormultiplikationen mit Vektoren links und rechts verwendet werden:

$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{d} = \boldsymbol{A} \cdot\cdot (\boldsymbol{d}\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{A} \odot (\boldsymbol{c}\boldsymbol{d})\,. \tag{1.54}$$

(I) Tensormultiplikation mit doppeltem Vektorprodukt

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A} \times\times\, \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_m) \times\times \left(\boldsymbol{d}_n\boldsymbol{f}_n\right) = (\boldsymbol{b}_m \times \boldsymbol{d}_n)(\boldsymbol{a}_m \times \boldsymbol{f}_n) \\ \Leftrightarrow \quad &(\boldsymbol{A} \times\times\, \boldsymbol{B})_{ij} = \epsilon_{iml}\epsilon_{jnk}A_{mn}B_{kl}\,. \end{aligned} \tag{1.55}$$

Das Ergebnis dieser Multiplikation ist ein Tensor zweiter Stufe. Man würde hier von einem *doppelten äußeren Vektorprodukt* sprechen.

Man beachte, dass in diesen Notationen das Ergebnis der Vektormultiplikation der nächstgelegenen Vektoren an erster Stelle steht und die entfernten Vektoren an zweiter Stelle. Die Operation der *doppelten inneren Vektormultiplikation* kann auf entsprechende Weise eingeführt werden. Wir können zum Beispiel davon ausgehen, dass sich das erste Zeichen, ähnlich wie beim inneren Skalarprodukt von Tensoren, auf die ersten Vektoren in Dyaden bezieht und das zweite auf die zweiten Vektoren:

$$\boldsymbol{A} \overset{\times}{\times} \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{a}_m \times \boldsymbol{d}_n)(\boldsymbol{b}_m \times \boldsymbol{f}_n) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\boldsymbol{A} \overset{\times}{\times} \boldsymbol{B}\right)_{ij} = \epsilon_{imk}\epsilon_{jnl} A_{mn} B_{kl}\,. \tag{1.56}$$

Folgende Beziehung ist leicht zu überprüfen:

$$\boldsymbol{A} \overset{\times}{\times} \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} \times\times \boldsymbol{B}\,. \tag{1.57}$$

Ähnlich wie die doppelte innere Tensormultiplikation gibt es bei der doppelten inneren Vektormultiplikation eine alternative Form, die Multiplikation des Tensors mit einem Vektor von rechts und links zu schreiben:

$$\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{d} = -(\boldsymbol{d}\boldsymbol{c}) \times\times \boldsymbol{A}\,. \tag{1.58}$$

Das Minuszeichen, das hier erscheint, ist auf eine Permutation der Multiplikatoren bei der Vektormultiplikation von Vektoren zurückzuführen.

Man beachte auch, dass eine ähnliche Formel wie Gleichung (1.8) gültig ist:

$$\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{d} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{A}\,. \tag{1.59}$$

Bei einer anderen Multiplikationsfolge ist das Ergebnis jedoch ein anderes:

$$(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) \times \boldsymbol{A} = \big(-\boldsymbol{a}_m \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})\big)\boldsymbol{b}_m = \big(-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{a}_m) + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a}_m)\big)\boldsymbol{b}_m = (\boldsymbol{d}\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}\boldsymbol{d}) \cdot \boldsymbol{A} = -2(\boldsymbol{c}\boldsymbol{d})^{\mathrm{A}} \cdot \boldsymbol{A}. \tag{1.60}$$

✓ **(J) Gemischte Tensormultiplikation**:

Es gibt zwei Arten der gemischten Tensormultiplikation, die skalar-vektorartige:

$$\boldsymbol{A} \cdot\times \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{a}_m \boldsymbol{b}_m) \cdot\times \left(\boldsymbol{d}_n \boldsymbol{f}_n\right) = (\boldsymbol{b}_m \cdot \boldsymbol{d}_n)(\boldsymbol{a}_m \times \boldsymbol{f}_n) \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{A} \cdot\times \boldsymbol{B})_i = \epsilon_{ils} A_{lm} B_{ms} \tag{1.61}$$

und die vektor-skalarartige Form:

$$\boldsymbol{A} \times\cdot \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{a}_m \boldsymbol{b}_m) \times\cdot \left(\boldsymbol{d}_n \boldsymbol{f}_n\right) = (\boldsymbol{a}_m \cdot \boldsymbol{f}_n)(\boldsymbol{b}_m \times \boldsymbol{d}_n) \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{A} \times\cdot \boldsymbol{B})_i = \epsilon_{ils} A_{ml} B_{sm}. \tag{1.62}$$

In beiden Fällen ist das Ergebnis der Multiplikation ein Vektor.

Es ist einfach, Verbindungen zwischen diesen Arten von Multiplikationen herzustellen:

$$\boldsymbol{A} \cdot\times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} \times\cdot \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}\,, \quad \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} \cdot\times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \times\cdot \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}\,, \quad \boldsymbol{A} \cdot\times \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} \times\cdot \boldsymbol{B}\,. \tag{1.63}$$

Folgende Beziehungen gilt es zu merken:

$$\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{d} = -\boldsymbol{A} \cdot\times (\boldsymbol{d}\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{d}\boldsymbol{c}) \times\cdot \boldsymbol{A}\,, \quad \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{d} = \boldsymbol{A} \times\cdot (\boldsymbol{d}\boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{d}\boldsymbol{c}) \cdot\times \boldsymbol{A}\,. \tag{1.64}$$

Wie bei der dualen Skalar- und Vektormultiplikation können auch hier alternative Regeln für die gemischte Tensormultiplikation eingeführt werden:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \overset{\times}{\cdot} \boldsymbol{B} &= (\boldsymbol{a}_m \boldsymbol{b}_m) \overset{\times}{\cdot} \left(\boldsymbol{d}_n \boldsymbol{f}_n\right) = (\boldsymbol{b}_m \cdot \boldsymbol{f}_n)(\boldsymbol{a}_m \times \boldsymbol{d}_n) = \boldsymbol{A} \cdot\!\times \boldsymbol{B}^\top , \\ \boldsymbol{A} \overset{\cdot}{\times} \boldsymbol{B} &= (\boldsymbol{a}_m \boldsymbol{b}_m) \overset{\cdot}{\times} \left(\boldsymbol{d}_n \boldsymbol{f}_n\right) = (\boldsymbol{a}_m \cdot \boldsymbol{d}_n)(\boldsymbol{b}_m \times \boldsymbol{f}_n) = \boldsymbol{A} \times\!\cdot \boldsymbol{B}^\top . \end{aligned} \tag{1.65}$$

Übungsaufgabe *Diverse Probleme zur Tensoralgebra*

1. Schreibe $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}^\top \cdot \boldsymbol{a}$ in Koordinatenform.
2. Schreibe $A_{ij} B_{ki} a_k b_j$ in absoluter Notation.
3. Sei $\boldsymbol{S}$ symmetrisch und $\boldsymbol{A}$ antisymmetrisch. Zeige, dass dann (a) $\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{S}$ und (b) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a}$ antisymmetrisch sind.
4. Zeige, dass sich die quadratische Form $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{c}$ nicht ändert, wenn $\boldsymbol{A}$ mit seinem symmetrischen Anteil ersetzt wird.
5. Zeige, dass falls $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ beide symmetrisch oder antisymmetrisch sind, der Tensor $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ antisymmetrisch ist.
6. Sei $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_3$ und $\boldsymbol{B} = 3\boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_1$. Finde damit (a) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$; (b) $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$; (c) $\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{B}$; (d) $\boldsymbol{A} \cdot\cdot\, \boldsymbol{B}$; (e) $\boldsymbol{A} \times\times \boldsymbol{B}$; (f) $\boldsymbol{A} \overset{\times}{\times} \boldsymbol{B}$; (g) $\boldsymbol{A} \cdot\!\times \boldsymbol{B}$; (h) $\boldsymbol{A} \times\!\cdot \boldsymbol{B}$.

1.2.2.3 Der Einheitstensor und der Levi-Civitá-Tensor

Definition: Derjenige Tensor zweiter Stufe, der einer Identitätstransformation in einem euklidischen Vektorraum entspricht, heißt *Einheitstensor*.

Das bedeutet, dass für jeden Vektor $\boldsymbol{x}$ folgende Gleichung zutrifft:

$$\mathbf{1} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{1} = \boldsymbol{x} . \tag{1.66}$$

In einer orthonormalen Basis gilt

$$\boldsymbol{x} = x_n \boldsymbol{e}_n = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_n) \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{e}_n \boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{1} \tag{1.67}$$

und daher

$$\mathbf{1} = \boldsymbol{e}_n \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_3 . \tag{1.68}$$

In ähnlicher Weise überprüft man, dass

$$\mathbf{1} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X} \cdot \mathbf{1} = \boldsymbol{X} \tag{1.69}$$

für jeden Tensor $\boldsymbol{X}$ gilt.

Nachstehend sind grundlegende Formeln für verschiedene Arten der Multiplikation mit dem Einheitstensor zusammengefasst.

(a) $\mathbf{1} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \times \mathbf{1}$.

Zum **Beweis** multipliziert man die Differenz zwischen dem linken und dem rechten Teil skalar mit einem beliebigen Vektor $\boldsymbol{x}$:

$$(\mathbf{1} \times \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c} \times \mathbf{1}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_k (\boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} \times \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{x} = \mathbf{0} . \tag{1.70}$$

Da diese Beziehung für jeden Vektor $\boldsymbol{x}$ gelten muss, sind die Vektor-Multiplikationsoperationen des Einheitstensors mit dem Vektor links und rechts kommutativ. □

(b) $(\boldsymbol{c} \times \mathbf{1})^{\mathsf{T}} = -\boldsymbol{c} \times \mathbf{1}$.

Beim **Beweis** verwenden wir die Gleichung (1.35):

$$(\boldsymbol{c} \times \mathbf{1})^{\mathsf{T}} = -\mathbf{1}^{\mathsf{T}} \times \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{c} \times \mathbf{1} . \tag{1.71}$$

Somit ist $\boldsymbol{c} \times \mathbf{1}$ ein antisymmetrischer Tensor. □

(c) $\boldsymbol{c} \times \mathbf{1} \times \boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{c})\mathbf{1}$.

Zum **Beweis** benötigen wir eine Formel, die bei der Vereinfachung von Ausdrücken im Zusammenhang mit dem doppelten Vektorprodukt nützlich ist:

$$\begin{aligned} &\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_k \cdot (\boldsymbol{e}_m \times \boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \cdot (\boldsymbol{e}_m \times \boldsymbol{e}_n) \\ &= \boldsymbol{e}_m \cdot \big(\boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j)\big) = \boldsymbol{e}_m \cdot \big(\boldsymbol{e}_i (\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}_j) - \boldsymbol{e}_j (\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}_i)\big) \\ &= \delta_{nj}\, \boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}_i - \delta_{ni}\, \boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{mi}\delta_{nj} - \delta_{in}\delta_{jm} . \end{aligned} \tag{1.72}$$

In den weiteren Berechnungen verwenden wir zunächst die Darstellung des Levi-Civitá-Symbols in Gleichung (1.20) und dann die Eigenschaften des gemischten und doppelten Vektorprodukts. Der Ausdruck $\boldsymbol{c} \times \mathbf{1} \times \boldsymbol{d}$ lautet in Koordinatenform:

$$\boldsymbol{c} \times \mathbf{1} \times \boldsymbol{d} = (c_j \boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k)(\boldsymbol{e}_k \times d_m \boldsymbol{e}_m) = c_j d_m \epsilon_{jki} \epsilon_{kmn}\, \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_n . \tag{1.73}$$

Wir nehmen zyklische Permutationen in den Levi-Civitá-Symbolen vor und verwenden die Gleichung (1.20):

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{c} \times \mathbf{1} \times \boldsymbol{d} = c_j d_m\, \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_n (\delta_{mi}\delta_{nj} - \delta_{in}\delta_{jm}) \\ &= d_m \boldsymbol{e}_m\, c_j \boldsymbol{e}_j - c_j d_j\, \boldsymbol{e}_n \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{d}\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{c})\mathbf{1} , \end{aligned} \tag{1.74}$$

was den Beweis beschließt. □

(d) $(\mathbf{1} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{A}$.

Zum **Beweis**:

$$(\mathbf{1} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{c} \times \mathbf{1}) \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{c} \times \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{A}. \square \tag{1.75}$$

(e) $\mathbf{1} \times\times \mathbf{1} = 2\mathbf{1}$.

Zum **Beweis**:

$$\begin{aligned}\mathbf{1} \times\times \mathbf{1} &= (\boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{e}_s)(\boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{e}_s) = -\boldsymbol{e}_k \times \mathbf{1} \times \mathbf{1} \times\times \mathbf{1} = (\boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{e}_s)(\boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{e}_s) \\ &= -\boldsymbol{e}_k \times \mathbf{1} \times \boldsymbol{e}_k = -\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k + \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_k\mathbf{1} = -\mathbf{1} + 3\mathbf{1} = 2\mathbf{1}. \square\end{aligned} \tag{1.76}$$

Übungsaufgabe *Diverse Probleme zur Tensoralgebra*

1. Zeige, dass $\mathbf{1} \cdot\cdot \mathbf{1} = 3$.
2. Beweise, dass $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \mathbf{1} = 2(\boldsymbol{ba})^{\mathrm{A}}$ und
3. $(\boldsymbol{a} \times \mathbf{1})^2 \cdot \boldsymbol{a} = 0$ gilt.

Der *Levi-Civitá-Tensor*, ein Tensor dritter Stufe, wird durch folgende Beziehung eingeführt:

$$^3\boldsymbol{\epsilon} = -\mathbf{1} \times \mathbf{1}\,. \tag{1.77}$$

Wir schreiben den Levi-Civitá-Tensor in einer Orthonormalbasis $\boldsymbol{e}_i$ auf:

$$^3\boldsymbol{\epsilon} = -\boldsymbol{e}_k(\boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{e}_s)\boldsymbol{e}_s = -\boldsymbol{e}_k(\epsilon_{ksm}\boldsymbol{e}_m)\boldsymbol{e}_s = \epsilon_{kms}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_s\,. \tag{1.78}$$

Die Komponenten dieses Tensors in der Basis $\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_s$ sind also Levi-Civitá-Symbole. Dieser Tensor erlaubt uns eine neue Sichtweise auf das Vektorprodukt:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{1}) \times (\mathbf{1} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot (\mathbf{1} \times \mathbf{1}) \cdot \boldsymbol{b}\,. \tag{1.79}$$

Daraus folgt, dass

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{a} \cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{b}\,. \tag{1.80}$$

Der Levi-Civitá-Tensor ermöglicht es uns also, die Vektor-Multiplikation durch zwei skalare Multiplikationen zu ersetzen. Die Gleichung (1.77) kann in einer anderen Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= a_k\boldsymbol{e}_k \times b_m\boldsymbol{e}_m = a_k b_m \epsilon_{kms}\boldsymbol{e}_s = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_k)(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{e}_m)\epsilon_{kms}\boldsymbol{e}_s \\ &= \boldsymbol{ba} \cdot\cdot \boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_s\epsilon_{kms} = \boldsymbol{ba} \cdot\cdot {}^3\boldsymbol{\epsilon}\end{aligned} \tag{1.81}$$

oder

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{ba} \cdot\cdot \boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_m)\boldsymbol{e}_s\epsilon_{kms} = \epsilon_{kms}\boldsymbol{e}_s(\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_m \cdot\cdot \boldsymbol{ba}) = \epsilon_{skm}\boldsymbol{e}_s\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_m \cdot\cdot \boldsymbol{ba} = {}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot\cdot \boldsymbol{ba}\,. \tag{1.82}$$

Ähnliche Kombinationen sind auch mit Tensoren möglich:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{B} = a_k B_{mn}\epsilon_{kms}\boldsymbol{e}_s\boldsymbol{e}_n = \epsilon_{kms}\boldsymbol{e}_s(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_k)(\boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{B}) = -\epsilon_{smk}\boldsymbol{e}_s\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_k \cdot\cdot \boldsymbol{aB} = -{}^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot\cdot \boldsymbol{aB}\,. \tag{1.83}$$

Übungsaufgabe *Diverse Probleme zur Tensoralgebra*

Zeige, dass

(a) $^3\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3$,

(b) $^3\boldsymbol{\epsilon} \cdot\cdot\cdot \boldsymbol{abc} = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$.

1.2.2.4 Die Spur eines Tensors zweiter Stufe

Definition: Die *Spur eines Tensors zweiter Stufe* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_m \boldsymbol{b}_m$, ist ein Skalar $\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{A}$, der nach der Regel berechnet wird:

$$\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_m \cdot \boldsymbol{b}_m \,. \tag{1.84}$$

Es gelten folgende Regeln:

$$\mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \mathrm{Sp}\,\boldsymbol{A} + \mathrm{Sp}\,\boldsymbol{B}\,, \qquad \mathrm{Sp}\,(\alpha\,\boldsymbol{A}) = \alpha\,\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{A}\,. \tag{1.85}$$

Die Tensorspur ist also eine lineare Operation, die den Raum $\mathcal{T}_2$ in $\mathcal{T}_0$ übersetzt. Sie kann auch in invarianter Form durch eine doppelte Überschiebung mit dem Einheitstensor geschrieben werden:

$$\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot\cdot\, \mathbf{1} = \boldsymbol{A} \odot \mathbf{1}\,. \tag{1.86}$$

In der Tat ist

$$\boldsymbol{A} \cdot\cdot\, \mathbf{1} = \boldsymbol{a}_k \cdot \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{b}_k\,. \tag{1.87}$$

Die Koordinatendarstellung lautet:

$$\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{A} = A_{mn}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n \cdot\cdot\, \boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k = A_{mn}\,\delta_{mk}\,\delta_{nk} = A_{kk}\,, \tag{1.88}$$

d. h. die Spur eines Tensors zweiter Stufe ist die Summe seiner Diagonalelemente.

Aus der Kommutativität des Skalarprodukts folgt, dass

$$\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{A} = \mathrm{Sp}\,\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\,,\ \ \mathrm{Sp}\,\boldsymbol{A}^{A} = 0\,. \tag{1.89}$$

Die folgenden Formeln für die Spur des Skalarprodukts von Tensoren sind ebenfalls gültig:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}) = \mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\cdot\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}) = \boldsymbol{A}\cdot\cdot\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}\,,\\ &\mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\cdot\cdot\,(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\cdot\,\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\cdot\cdot\,\boldsymbol{B}\,.\end{aligned} \tag{1.90}$$

Aus der Beziehung $\mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\cdot\cdot\,\boldsymbol{B}$ folgt, dass die Spur eines Produkts aus symmetrischem und antisymmetrischem Tensor Null ist.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einer Reihe von Formeln mit der Spur der Vektorprodukte von Tensor und Vektor.

Nützliche Formeln bei Spurbildungen:

(1) $\mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{c}) = \mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{A})$,
$\mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{c}) = \mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_m\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}_m\cdot(\boldsymbol{b}_m\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}_m\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}_m)$,
$\mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}_m)\cdot\boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{b}_m\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}_m)$.

(2) $\mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{a}\times\mathbf{1}\times\boldsymbol{b}) = \mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{b}\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\mathbf{1}) = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

(3) $\mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{C})) = \mathrm{Sp}\,(\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\,\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{C}$.

Übungsaufgabe *Diverse Aufgaben zur Tensoralgebra*

1. Schreibe Sp $(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})$ in Koordinatenform.
2. Berechne Sp $\boldsymbol{A}$, falls $\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + 4\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ gilt.
3. Zeige, dass Sp $(\boldsymbol{1}\times\times\boldsymbol{A}) = 2\text{Sp}\,\boldsymbol{A}$.

1.2.2.5 Vektorinvariante und assoziierter Vektor

Definition: Die *Vektorinvariante des Tensors* zweiter Stufe $\boldsymbol{A}$, manchmal auch das *Gibbs'sche Kreuz* genannt, ist der nach folgender Regel berechnete Vektor $\boldsymbol{A}_\times$:

$$\boldsymbol{A}_\times = \boldsymbol{a}_m \times \boldsymbol{b}_m \quad \text{wobei} \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_m \otimes \boldsymbol{b}_m\,. \tag{1.91}$$

Die Dyade $\otimes$ wird also sozusagen durch $\times$ ersetzt.

Die Vektorinvariante ist, wie die Spur, eine lineare Operation:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})_\times = \boldsymbol{A}_\times + \boldsymbol{B}_\times\,, \ (\alpha\,\boldsymbol{A})_\times = \alpha\,\boldsymbol{A}_\times\,. \tag{1.92}$$

Aus der Eigenschaft der Vektormultiplikation folgt, dass die Vektorinvariante des symmetrischen Tensors Null ist, d. h. $\boldsymbol{A}_\times = \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{A}}\right)_\times$.
Um eine invariante Form der Vektorinvariante zu erhalten, schreiben wir die folgende Gleichungskette (vgl. Gleichung (1.62)):

$$\boldsymbol{A}_\times = \boldsymbol{a}_m \times \boldsymbol{b}_m = (\boldsymbol{a}_m\cdot\boldsymbol{1})\times\boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{1}\times\cdot\,\boldsymbol{b}_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{1}\times\cdot\,\boldsymbol{A}^\top = -\boldsymbol{1}\times\cdot\,\boldsymbol{A}\,, \tag{1.93}$$

wobei $\boldsymbol{A}$ ein antisymmetrischer Tensor ist. In einer anderen Form gilt:

$$\boldsymbol{A}_\times = \boldsymbol{a}_m \times (\boldsymbol{1}\cdot\boldsymbol{b}_m) = \boldsymbol{b}_m\boldsymbol{a}_m \times\cdot\,\boldsymbol{1} = -\boldsymbol{A}\times\cdot\,\boldsymbol{1}\,. \tag{1.94}$$

Mithilfe der Gleichung (1.61) können wir andere Darstellungen der Vektorinvariante erhalten:

$$\boldsymbol{A}_\times = \boldsymbol{A}\cdot\times\boldsymbol{1} = \boldsymbol{1}\cdot\times\boldsymbol{A}\,. \tag{1.95}$$

Die Vektorinvariante kann auch mithilfe des Levi-Civitá-Tensors geschrieben werden (beachte die Wirkung von $\odot$ nach Gleichung (1.44)):

$$\boldsymbol{A}_\times = {}^3\boldsymbol{\epsilon}\odot\boldsymbol{A} \equiv {}^3\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{A} \tag{1.96}$$

oder schließlich auch in Indexschreibweise:

$$\boldsymbol{A}_\times = A_{mn}\boldsymbol{e}_m\times\boldsymbol{e}_n \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{A}_\times)_k = \epsilon_{kmn}A_{mn}\,. \tag{1.97}$$

Weitere häufig vorkommende Formeln für die Vektorinvariante des Vektortensors und der Vektormultiplikation lauten:

Nützliche Formeln für Ausdrücke unter Verwendung der Vektorinvariante:

(1) $(\boldsymbol{c}\times\mathbf{1})_\times = (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{e}_k)\times\boldsymbol{e}_k = -(\boldsymbol{c}\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{e}_k\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{e}_k) = -3\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c} = -2\boldsymbol{c}$,

(2) $(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{A})_\times = -\boldsymbol{b}_m\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}_m) = -\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}_m\cdot\boldsymbol{b}_m)+\boldsymbol{a}_m(\boldsymbol{b}_m\cdot\boldsymbol{c}) = -\boldsymbol{c}\,\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{c}$.

Satz: Für jeden *antisymmetrischen* Tensor $\boldsymbol{A}$ gibt es einen Vektor $\boldsymbol{\omega}$, so dass der Tensor $\boldsymbol{A}$ in folgender Form dargestellt werden kann

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{1} = \mathbf{1}\times\boldsymbol{\omega} \quad\Leftrightarrow\quad A_{ij} = -\epsilon_{ijk}\omega_k\,, \tag{1.98}$$

wobei der Vektor $\boldsymbol{\omega}$ der sogenannte *assoziierte Vektor des Tensors* $\boldsymbol{A}$ genannt wird. Assoziiert heißt er deshalb, weil er genauso viel Information enthält wie der Tensor. Indizistisch gesprochen hat nämlich ein Vektor im Raum drei Komponenten und eine antisymmetrische Matrix auch.

Beweis: Für einen beliebigen Vektor $\boldsymbol{x}$ und einen antisymmetrischen Tensor $\boldsymbol{A}$ gilt: $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = 0$. Bezeichnet man $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{y}$, so erhält man aus der Beziehung $\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x} = 0$, dass $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\omega}$ ist, wobei der Vektor $\boldsymbol{\omega}$ beliebig ist. Somit folgt: $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\omega}$.

Nimmt man für $\boldsymbol{x}$ die Basisvektoren und summiert die resultierenden Ausdrücke, so erhält man Gleichung (1.98). □

Um den assoziierten Vektor durch den Anfangstensor $\boldsymbol{A}$ zu finden, berechnen wir die Vektorinvarianten aus beiden Teilen der Gleichung (1.98)

$$\boldsymbol{A}_\times = (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{1})_\times = -2\boldsymbol{\omega}\,. \tag{1.99}$$

Daraus folgt, dass

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{A}_\times = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}\times\cdot\mathbf{1} = -\frac{1}{2}{}^3\boldsymbol{\epsilon}\odot\boldsymbol{A} \equiv -\frac{1}{2}{}^3\boldsymbol{\epsilon}:\boldsymbol{A} \quad\Leftrightarrow\quad \omega_m = -\frac{1}{2}\epsilon_{mkl}A_{kl}\,. \tag{1.100}$$

Oder:

$$(A_\times)_i = \epsilon_{ijk}A_{jk}\,. \tag{1.101}$$

Diese Formeln stellen Beziehungen zwischen der Vektorinvariante eines Tensors und seinem assoziierten Vektor dar. Wir fassen die beiden Ergebnisse gerne auch in direkter Notation so geschrieben zusammen:

$$\boldsymbol{A} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{A}_\times\times\mathbf{1} = -\frac{1}{2}\mathbf{1}\times\boldsymbol{A}_\times \quad . \tag{1.102}$$

Übungsaufgabe *Diverse Aufgaben zu Vektorinvarianten*

1. Berechne die Vektorinvariante
   (a) eines symmetrischen Tensors sowie von (b) $\boldsymbol{ab}-\boldsymbol{ba}$.
2. Berechne den assoziierten Vektor zu $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 - 3\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$.
3. Zeige, dass, falls $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ symmetrisch sind, gilt $(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})_\times + (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})_\times = \mathbf{0}$.

1.2.2.6 Lineare Zuordnungen

Die alternative Darstellung eines Tensors zweiten Ranges als ungeordnete Summe von Dyaden interpretiert den Tensor zweiter Stufe als linearen Operator im euklidischen Vektorraum.

Wir betrachten eine Vektorfunktion des Vektorarguments $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, die $\mathscr{T}_1 \rightarrow \mathscr{T}_1$ abbildet. Ein Ausdruck wird als linear bezeichnet, wenn

$$\boldsymbol{f}(\alpha\,\boldsymbol{x} + \beta\,\boldsymbol{y}) = \alpha\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \beta\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\,, \tag{1.103}$$

wobei α und β Zahlen bezeichnen.

Satz: Eine beliebige lineare Abbildung kann dargestellt werden als

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}\,, \tag{1.104}$$

wobei $\boldsymbol{A}$ ein Tensor zweiten Ranges ist, genannt *linearer Abbildungstensor*.

Beweis: Betrachten wir die lineare Abbildung $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ in der Basis $\boldsymbol{e}_k$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{f}(x_k \boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_k) x_k = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}\,, \\ \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned} \tag{1.105}$$

Da $\boldsymbol{A}$ die Summe von drei Dyaden ist, handelt es sich um einen Tensor zweiten Ranges. □

Der Tensor einer linearen Abbildung ist vollständig definiert, wenn seine Werte auf drei linear unabhängigen Vektoren, wie den Basisvektoren $\boldsymbol{e}_k$, gegeben sind: $\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_k$, $(k = 1, 2, 3)$. Multipliziert man beide Teile dieser Gleichheit tensoriell mit $\boldsymbol{e}_k$ und summiert alle drei resultierenden Beziehungen, so erhält man $\boldsymbol{y}_k \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{A}$.

Damit die lineare Abbildung in Gleichung (1.104) eindeutig umkehrbar ist, ist es notwendig und hinreichend, dass der Tensor der linearen Abbildung eindeutig definiert ist, d. h. die Vektoren $\boldsymbol{y}_k$ müssen linear unabhängig sein. Mit anderen Worten: Der lineare Operator $\boldsymbol{A}$ muss den Raum $\mathscr{T}_1$ in einen dreidimensionalen Vektorraum abbilden.

1.2.2.7 Determinante eines Tensors

Sei $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ ein linear unabhängiges Triplett von Vektoren. Wir bezeichnen die linearen Abbildungen der ursprünglichen Vektoren mit $\boldsymbol{a}'_k = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a}_k$.

Die lineare Unabhängigkeit der Ausgangsvektoren ist gleichbedeutend mit der Bedingung $(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{a}_3 \neq 0$.

Definition: Die *Determinante eines Tensors* ist gegeben durch

$$\det \boldsymbol{A} = \frac{(\boldsymbol{a}'_1 \times \boldsymbol{a}'_2) \cdot \boldsymbol{a}'_3}{(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{a}_3}\,. \tag{1.106}$$

Die Definition in Gleichung (1.106) hat eine einfache geometrische Bedeutung. Wenn man bedenkt, dass das gemischte Produkt mit genauem Vorzeichen dem aktuellen Volumen des Parallelepipeds V entspricht, das auf den multiplizierten Vektoren aufgebaut ist, schließt man, dass die Determinante des Tensors $\det \boldsymbol{A} = \pm V'/V$ das Verhältnis der Volumina des deformierten (V') und des ursprünglichen Parallelepipeds definiert.

Eine verschwindende Determinante bedeutet, dass der lineare Abbildungstensor $\boldsymbol{A}$ die Dimensionalität des Raumes $\mathscr{T}_1$ verringert, indem er sozusagen jeden Vektor von $\mathscr{T}_1$ auf eine Ebene oder eine Linie verschiebt.

Definition: Ein Tensor zweiten Ranges, dessen Determinante gleich Null ist, heißt *singulär* oder *entartet*.

Es ist wichtig zu realisieren, dass der Wert der Determinante nicht von der Wahl der Ausgangsvektoren abhängt. In der Tat, für beliebige linear unabhängige Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ gilt

$$(\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{b}') \cdot \boldsymbol{c}' = (A_{mn} a_n \boldsymbol{e}_m \times A_{kl} b_l \boldsymbol{e}_k) \cdot A_{pt} c_t \boldsymbol{e}_p = A_{mn} A_{kl} A_{pt} a_n b_l c_t \epsilon_{mkp} \,. \tag{1.107}$$

Sei

$$\begin{aligned} &A_{m1} A_{k2} A_{p3} \varepsilon_{mkp} = A_{11}(A_{22}A_{33} - A_{32}A_{23}) + A_{21}(A_{32}A_{13} - A_{12}A_{33}) + \\ &A_{31}(A_{12}A_{23} - A_{23}A_{13}) = \det(A_{ij}) \,, \\ &A_{mn} A_{kl} A_{pt} \epsilon_{mkp} = \det(A_{ij}) \epsilon_{nlt} \,. \end{aligned} \tag{1.108}$$

Daher folgt

$$\det \boldsymbol{A} = \frac{\det(A_{ij}) a_n b_l c_t \epsilon_{nlt}}{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}} = \det(A_{ij}) \,. \tag{1.109}$$

Die durch die Gleichung (1.106) eingeführte Tensordeterminante fällt also mit der Determinante der Tensorkoordinatenmatrix in einer orthonormierten Basis zusammen.

Übungsaufgabe *Determinante in Indexform*

Man zeige auf der Grundlage der Definition (1.106), dass man in Indexform schreiben kann:

$$\det \boldsymbol{A} = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} A_{il} A_{jm} A_{kn} \,. \tag{1.110}$$

Als **Eigenschaften der Determinante** seien notiert:

(1) $\det \mathbf{1} = 1$,

(2) $\det(\alpha \boldsymbol{A}) = \dfrac{\big(\alpha(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a}_1) \times \alpha(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a}_2)\big) \cdot \alpha(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a}_3)}{(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{a}_3} = \alpha^3 \det \boldsymbol{A}$,

(3) $\det \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} = \det \boldsymbol{A}$,

(4) $\det(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{B}) \det(\boldsymbol{A})$.

Beweis der letzten Aussage: Bezeichne $\boldsymbol{a}''_k = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{a}'_k = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a}_k$, dann ist

$$\det(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}) = \frac{\big(\boldsymbol{a}''_1 \times \boldsymbol{a}''_2\big) \cdot \boldsymbol{a}''_3}{(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{a}_3} \,.$$

Multiplizieren und dividieren wir dieses Verhältnis mit $\left(\boldsymbol{a}_1' \times \boldsymbol{a}_2'\right) \cdot \boldsymbol{a}_3'$, so ergibt sich:

$$\det(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}) = \frac{\left(\boldsymbol{a}_1'' \times \boldsymbol{a}_2''\right) \cdot \boldsymbol{a}_3''}{\left(\boldsymbol{a}_1' \times \boldsymbol{a}_2'\right) \cdot \boldsymbol{a}_3'} \cdot \frac{\left(\boldsymbol{a}_1' \times \boldsymbol{a}_2'\right) \cdot \boldsymbol{a}_3'}{(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{a}_3} = \det(\boldsymbol{B}) \det(\boldsymbol{A}). \square$$

Nachstehend sind ein paar andere nützliche Identitäten notiert, die mit der Determinante eines Tensors zusammenhängen:

Weitere Determinantenregeln:

(1) Durch Multiplikation von Gleichung (1.106) mit $(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{a}_3$ und unter Berücksichtigung der Beliebigkeit des Vektors $\boldsymbol{a}_3$ erhalten wir

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a}_1) \times (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a}_2) = (\det \boldsymbol{A}) \boldsymbol{A}^{-\mathsf{T}} \cdot (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2)\,. \tag{1.111}$$

(2) $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})_{\times} = (\det \boldsymbol{A}) \boldsymbol{A}^{-\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{B}_{\times}$.

Zum **Beweis** schreiben wir die linke Seite der Gleichung wie folgt um:

$$\begin{aligned}\left((\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{c}_k)(\boldsymbol{d}_k \cdot \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})\right)_{\times} &= ((\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{c}_k)(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{d}_k))_{\times} \\ &= (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{c}_k) \times (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{d}_k) = (\det \boldsymbol{A}) \boldsymbol{A}^{-\mathsf{T}} \cdot (\boldsymbol{c}_k \times \boldsymbol{d}_k) = (\det \boldsymbol{A}) \boldsymbol{A}^{-\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{B}_{\times}. \square\end{aligned}$$

Übungsaufgabe *Determinante*

Berechne $\det\left(\alpha \mathbf{1} + \beta \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2\right)$.

1.2.2.8 Inverser Tensor und Cayley-Hamilton-Theorem

Ist der Tensor $\boldsymbol{A}$ nicht-singulär, dann gibt es nur einen *inversen Tensor* $\boldsymbol{A}^{-1}$, der folgende Gleichung erfüllt

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \mathbf{1}\,. \tag{1.112}$$

Wir zeigen, dass der ursprüngliche und der inverse Tensor permutiert werden können, in dem Sinne, dass $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \mathbf{1}$. Dazu betrachtet man einen Tensor $\boldsymbol{B}$, so dass $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \mathbf{1}$. Multiplizieren wir diese Gleichung mit $\boldsymbol{A}^{-1}$ von rechts:

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{B} \cdot \mathbf{1} = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}\,. \tag{1.113}$$

Wenn man den inversen Tensor der linearen Abbildung kennt, ist es einfach, die inverse Abbildung zu finden:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{y}\,. \tag{1.114}$$

Eigenschaften des inversen Tensors sind:

(1) $\det \boldsymbol{A}^{-1} = 1/\det \boldsymbol{A}$.

Zum **Beweis** berechnen wir die Determinante von Gleichung (1.112):

$$\det \boldsymbol{A} \det(\boldsymbol{A}^{-1}) = 1. \square$$

(2) $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$.

Der **Beweis** wird durch direkte Überprüfung erbracht.

(3) $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} \cdot \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathsf{T}} = \left(\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}\right)^{\mathsf{T}} = \mathbf{1}$.

Übungsaufgabe *Inverse*

Vereinfache $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot\cdot\, \boldsymbol{A}^{-1}$.

Die Berechnung des inversen Tensors kann auf verschiedene Weise erfolgen. Eine davon basiert auf dem *Cayley-Hamilton-Theorem*, dessen Beweis in Matrixschreibweise z. B. in [Ga1959] angegeben ist, und das wir nachstehend diskutieren.

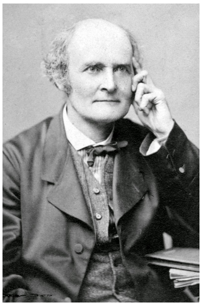


Bild 1.4 Pioniere der höheren linearen Algebra und Quaternionentheorie (ein Vorläufer moderner Tensorrechnung): Arthur Cayley (1821–1895) und William Rowan Hamilton (1805–1865)

Satz: *Cayley-Hamilton-Theorem*

Ein beliebiger Tensor $\boldsymbol{A}$ zweiter Stufe erfüllt die Gleichung

$$-\boldsymbol{A}^3 + I_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^2 - I_2(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A} + I_3(\boldsymbol{A})\mathbf{1} = \mathbf{0}\,, \tag{1.115}$$

wobei die Größe $\boldsymbol{A}^n$ definiert ist als n-fache Multiplikation des Tensors $\boldsymbol{A}$ mit sich selbst:

$$\boldsymbol{A}^n = \underbrace{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \dots \cdot \boldsymbol{A}}_{n}\,. \tag{1.116}$$

Ähnlich verhält es sich bei negativen Potenzen:

$$\boldsymbol{A}^{-n} = \underbrace{\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \dots \cdot \boldsymbol{A}^{-1}}_{n}\,. \tag{1.117}$$

Die Funktionen I_1, I_2 und I_3, die Teil der Beziehung Gleichung (1.115) sind, werden *Hauptinvarianten* des Tensors genannt und sind durch folgende Beziehungen definiert:

$$I_1(\boldsymbol{A}) = \operatorname{Sp} \boldsymbol{A}\,,\;\; I_2(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2}\left((\operatorname{Sp} \boldsymbol{A})^2 - \operatorname{Sp} \boldsymbol{A}^2\right)\,,\;\; I_3(\boldsymbol{A}) = \det \boldsymbol{A}\,. \tag{1.118}$$

Der inverse Tensor ergibt sich nun einfach aus der Multiplikation von Gleichung (1.115) mit $\boldsymbol{A}^{-1}$:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{I_3(\boldsymbol{A})}\left(\boldsymbol{A}^2 - I_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A} + I_2(\boldsymbol{A})\mathbf{1}\right). \tag{1.119}$$

Übungsaufgabe *Invariante*

Finde die Hauptinvarianten von $\boldsymbol{A}^{-1}$, wobei $\boldsymbol{A} = \alpha\mathbf{1} + \beta\boldsymbol{ee}$ und $\boldsymbol{e}$ ein Einheitsvektor ist. Zeige ferner, dass man in Index schreiben kann:

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)_{ij} = \frac{1}{2\det\boldsymbol{A}}\epsilon_{jlm}\epsilon_{ikn}A_{lk}A_{mn}. \tag{1.120}$$

Durch Berechnung der Spur dieses Ausdrucks erhält man die Beziehung zwischen der ersten Invariante des inversen Tensors und den Invarianten des ursprünglichen Tensors:

$$I_1(\boldsymbol{A}^{-1}) = \frac{1}{I_3(\boldsymbol{A})}\left(I_1(\boldsymbol{A}^2) - I_1^2(\boldsymbol{A}) + 3I_2(\boldsymbol{A})\right) = \frac{I_2(\boldsymbol{A})}{I_3(\boldsymbol{A})}. \tag{1.121}$$

Die Cayley-Hamilton-Identität kann auch verwendet werden, um die Determinante des Tensors zu bestimmen. Dazu berechnen wir die Spur des linken und rechten Teils der Gleichung (1.115):

$$\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{A}^3 = I_1\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{A}^2 - I_2\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{A} + 3I_3. \tag{1.122}$$

Angesichts der Beziehungen in Gleichung (1.118) erhalten wir den Ausdruck für die Determinante des Tensors:

$$\det\boldsymbol{A} = \frac{1}{6}\left(\mathrm{Sp}^3\boldsymbol{A} - 3\,\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{A}\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{A}^2 + 2\,\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{A}^3\right). \tag{1.123}$$

Mithilfe der Cayley-Hamilton-Formel kann jede natürliche Potenz eines Tensors zweiten Ranges als quadratisches Trinom eines Tensors mit Koeffizienten dargestellt werden, die Polynome von Hauptinvarianten sind. Die vierte Potenz des Tensors erhält man, indem man Gleichung (1.115) mit $\boldsymbol{A}$ multipliziert und dann die dritten Potenz des Tensors aus dem Ergebnis eliminiert:

$$\boldsymbol{A}^4 = (I_1^2 - I_2)\boldsymbol{A}^3 + (I_3 - I_1I_2)\boldsymbol{A} + I_1I_3\mathbf{1}. \tag{1.124}$$

Das gleiche Verfahren kann für jeden ganzzahligen Potenz des Tensors durchgeführt werden:

$$\boldsymbol{A}^n = \alpha_2\boldsymbol{A}^2 + \alpha_1\boldsymbol{A} + \alpha_0\mathbf{1}, \quad \alpha_i = \alpha_i(I_1, I_2, I_3). \tag{1.125}$$