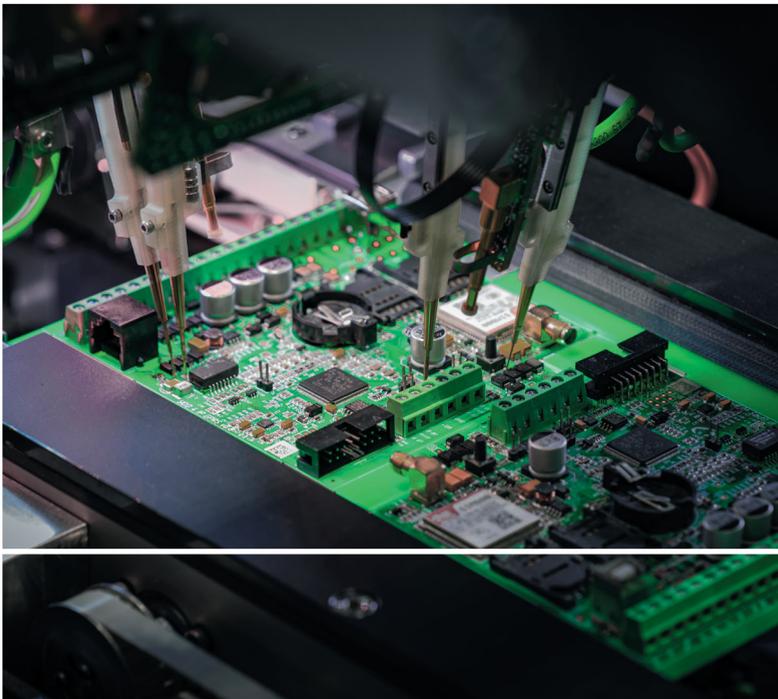


Elmar Schrüfer
Leonhard M. Reindl
Bernhard Zagar



Elektrische Messtechnik

Messung elektrischer und nichtelektrischer Größen



13., vollständig überarbeitete Auflage

HANSER



Ihr Plus – digitale Zusatzinhalte!

Auf unserem Download-Portal finden Sie zu diesem Titel kostenloses Zusatzmaterial. Geben Sie dazu einfach diesen Code ein:

plus-xkyam-3wt4x

plus.hanser-fachbuch.de



Bleiben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Elmar Schrüfer/Leonhard M. Reindl/Bernhard Zagar

Elektrische Messtechnik

Messung elektrischer und nichtelektrischer Größen

13., vollständig überarbeitete Auflage

Mit 347 Bildern, 42 Tabellen und 34 Beispielen

HANSER

Die Autoren:

Prof. em. Dr.rer.nat. Dr.h.c.mult. Elmar Schrüfer †
Lehrstuhl für Messsystem- und Sensortechnik, Technische Universität München

Prof. Dr. techn. Leonhard M. Reindl
Institut für Mikrosystemtechnik, Lehrstuhl für Elektrische Mess- und Prüfverfahren,
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. techn. Bernhard Zagar
Institut für Elektrische Messtechnik, Johannes Kepler Universität Linz



Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor(en, Herausgeber) und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht.

Ebenso wenig übernehmen Autor(en, Herausgeber) und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, sind vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2022 Carl Hanser Verlag München

Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg

Herstellung: Frauke Schafft

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München

Titelbild: shutterstock.com/SibFilm

Satz: Dr. Steffen Naake, Limbach-Oberfrohna

Druck und Bindung: Friedrich Pustet GmbH & Co. KG, Regensburg

Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-47164-1

E-Book-ISBN 978-3-446-47443-7

Vorwort zur 13. Auflage

Am 20. Mai 2019 gab es aus Sicht der Metrologie eine entscheidende Änderung bei der Festlegung der sieben SI-Basiseinheiten, die seitdem nicht mehr als Artefakte (das Urkilogramm), idealisierte Messvorschriften (das Ampere), Materialeigenschaften (das Kelvin, das Mol), festgelegte Faktoren (die Candela) oder Naturkonstanten (die Sekunde, der Meter), sondern über sogenannte definierende Konstanten festgelegt sind. Das erste Kapitel der vorliegenden Auflage wurde also gründlich überarbeitet um diese Neudefinition zu berücksichtigen.

Ebenso wurde das neunte Kapitel vollständig überarbeitet und an die moderne Messpraxis angepasst. Die Behandlung der Computer-Schnittstellen wurde gestrafft, dafür wurden Programmierbeispiele für Mikroprozessoren in eingebetteten Anwendungen zusätzlich aufgenommen.

Die Autoren bedanken sich bei den Studierenden für Hinweise auf die in der vorigen Auflage bedauerlicherweise immer noch vorhandene Unklarheiten, Fehler und teilweise auch falsche Referenzierungen, die korrigiert bzw. präzisiert wurden.

Wir würden uns freuen, wenn auch die aktualisierte 13. Auflage freundlich aufgenommen werden würde.

Übungsaufgaben mit Lösungen zu den Kapiteln aus dem Buch finden Sie als Zusatzmaterial auf www.plus.hanser-fachbuch.de. Auf den Webseiten www.schruefer-messtechnik.de und www.jku.at/emt sind weitere Informationen und Übungsaufgaben zur Elektrischen Messtechnik verfügbar.

Die Herstellung des Buches lag auf Seiten des Carl Hanser Verlags in den bewährten Händen von Frau Natalia Silakova. Die Autoren sind ihr zu großem Dank verpflichtet.

München, Freiburg, Linz, Mai 2022 Elmar Schrüfer†, Leonhard M. Reindl, Bernhard Zagar

Vorwort zur 12. Auflage

In der Neubearbeitung für die 12. Auflage wurden neben einige Korrekturen und Präzisierungen auch neue Inhalte aufgenommen wie zum Beispiel im Kapitel Messverstärker die Ableitung der Kennlinie einer Differenzeingangsstufe eines Operationsverstärkers oder die Darlegung der Kalibrierung bei einem Wechselstrom-Gleichstrom-Komparator. Die von der Generalkonferenz und des Internationalen Komitees für Maß und Gewicht vorgegebene Schreibweise der Einheiten, nach der bei der Angabe von Einheiten nur ein SI-Vorsatz für die Bildung von dezimalen Vielfachen verwendet werden soll, wurde durchgehend berücksichtigt, auch wenn dadurch an manchen Stellen die bei ungekürzter Schreibweise oft ersichtliche Information wegfällt (Beispiel Beweglichkeit von Ladungsträgern in m^2/Vs vs. $(\text{m/s})/(\text{V/m})$, also Geschwindigkeit bezogen auf die vorherrschende Feldstärke).

Die Autoren bedanken sich ferner bei den Studierenden für die zahlreichen Rückmeldungen zum Inhalt und für Hinweise auf typografische wie auch sonstige Fehler, die in der Neuauflage gerne berücksichtigt wurden.

Die Autoren würden sich freuen, wenn auch die aktualisierte 12. Auflage freundlich aufgenommen werden würde.

Hingewiesen sei neben der Hanser-Fachbuch-Homepage noch auf die folgenden Webseiten mit weiteren Informationen und Übungsaufgaben zur Elektrischen Messtechnik:

www.schruefer-messtechnik.de

www.jku.at/emt

Die Herstellung des Buches lag auf Seiten des Carl Hanser Verlags in den bewährten Händen von Frau Franziska Kaufmann und Herrn Manuel Leppert. Die Autoren sind ihnen zu großem Dank verpflichtet.

München, Freiburg, Linz, Mai 2018 Elmar Schrüfer, Leonhard M. Reindl, Bernhard Zagar

Inhalt

1	Grundlagen	15
1.1	Umfang und Bedeutung der elektrischen Messtechnik	15
1.2	Naturkonstanten und Maßeinheiten	17
1.2.1	Naturkonstanten	17
1.2.2	Internationales Einheitensystem, SI-Einheiten	18
1.2.3	Die neuen SI-Einheiten	20
1.2.4	Definition und Darstellung der Sekunde	21
1.2.5	Definition und Darstellung des Meters	23
1.2.6	Definition und Darstellung des Kilogramms	23
1.2.7	Definition und Darstellung der elektrischen Einheiten	25
1.2.8	Die SI-Einheiten der Temperatur, der Stoffmenge und der Lichtstärke	28
1.2.9	Größen- und Zahlenwertgleichungen	30
1.3	Statisches Verhalten der Messgeräte; Kennlinie und Empfindlichkeit	31
1.4	Messfehler und Messunsicherheiten	32
1.4.1	Bekannte Einflüsse; Korrektur des bekannten Messfehlers	33
1.4.2	Unbekannte, normalverteilte Unsicherheiten; eine einzige Messgröße X	35
1.4.3	Unbekannte, normalverteilte Unsicherheiten; verknüpfte Messgrößen $Y = f(X_i)$	39
1.4.4	Student'sche t -Verteilung	43
1.4.5	Unbekannte, systematische Unsicherheiten	43
1.4.6	Korrelierte Messgrößen	44
1.4.7	Zusammenfassung	48
1.5	Dynamisches Verhalten der Messgeräte	49
1.5.1	Verzögerungsglied 1. Ordnung	50
1.5.2	Verzögerungsglied 2. Ordnung	57
1.5.3	Weitere Beispiele für das Zeitverhalten	65
1.6	Dynamische Messfehler	67
1.6.1	Fehlermöglichkeiten	67
1.6.2	Korrektur des dynamischen Fehlers	69
1.7	Strukturen von Messeinrichtungen	71
1.7.1	Kettenstruktur	71
1.7.2	Parallelstruktur	72
1.7.3	Kreisstruktur	74
1.8	Die informationstragenden Parameter der Messsignale	75
1.9	Elektrisches Messen nichtelektrischer Größen	78
1.9.1	Physikalische Effekte zum elektrischen Messen nichtelektrischer Größen	78
1.9.2	Sensornahe Signalverarbeitung	78

Messung von Strom und Spannung;

spannungs- und stromliefernde Aufnehmer	81
2.1 Elektromechanische Messgeräte und ihre Anwendung	81
2.1.1 Messwerke	81
2.1.2 Messung von Gleichstrom und Gleichspannung	84
2.1.3 Messung von Wechselstrom und Wechselspannung	90
2.1.4 Messung der Leistung	95
2.1.5 Messung der elektrischen Arbeit	100
2.2 Elektronenstrahl-Oszilloskop	101
2.2.1 Elektronenstrahl-Röhre	101
2.2.2 Baugruppen	103
2.2.3 Betriebsarten des Elektronenstrahl-Oszilloskops	108
2.3 Messverstärker	109
2.3.1 Einführung	109
2.3.2 Nicht invertierender Spannungsverstärker	116
2.3.3 Invertierender Stromverstärker	122
2.3.4 Anwendungen des Spannungsverstärkers	127
2.3.5 Anwendungen des Stromverstärkers	129
2.3.6 Nullpunktfehler des realen Operationsverstärkers	134
2.4 Elektrodynamische spannungsliefernde Aufnehmer	139
2.4.1 Weg- und Winkelmessung	140
2.4.2 Drehzahlaufnehmer – Generatoren	141
2.4.3 Hall-Sonde	142
2.4.4 Induktions-Durchflussmesser	146
2.5 Thermische spannungsliefernde Aufnehmer	148
2.5.1 Thermoelement	148
2.5.2 Integrierter Sperrschicht-Temperatur-Sensor	155
2.6 Chemische spannungsliefernde Aufnehmer und Sensoren	156
2.6.1 Galvanisches Element	156
2.6.2 pH-Messkette mit Glaselektrode	156
2.6.3 Sauerstoffmessung mit Festkörper-Ionenleiter	159
2.7 Piezo- und pyroelektrische ladungsliefernde Aufnehmer	161
2.7.1 Wirkungsweise und Werkstoffe	161
2.7.2 Piezoelektrischer Kraftaufnehmer	164
2.7.3 Pyroelektrischer Infrarot-Sensor	167
2.8 Optische Aufnehmer und Sensoren	169
2.8.1 Fotoelement und Fotodiode	171
2.8.2 Fotosensoren für Positionsmessungen und zur Bilderzeugung ...	174
2.8.3 Fozelle	175
2.8.4 Fotovervielfacher und Mikrokanalplatte	176
2.9 Aufnehmer für ionisierende Strahlung	177
2.9.1 Ionisationskammer	177
2.9.2 Halbleiter-Strahlungsdetektor	179

Messung von ohmschen Widerständen;

Widerstandsaufnehmer	182
3.1 Strom- und Spannungsmessung	182
3.1.1 Gleichzeitige Messung von Spannung und Strom	182
3.1.2 Vergleich mit einem Referenzwiderstand	183
3.2 Anwendung einer Konstantstromquelle	184
3.3 Brückenschaltungen	186
3.3.1 Abgleich-Widerstandsmessbrücke	186
3.3.2 Ausschlag-Widerstandsmessbrücke	188
3.4 Verstärker für Brückenschaltungen	193
3.4.1 Subtrahierer mit invertierendem Verstärker	193
3.4.2 Subtrahierer mit Elektrometer-Verstärkern	194
3.4.3 Trägerfrequenz-Brücke und -Messverstärker	197
3.5 Widerstandsaufnehmer zur Längen- und Winkelmessung	200
3.6 Widerstandstemperaturfühler	201
3.6.1 Metall-Widerstandsthermometer	201
3.6.2 Heißeleiter	205
3.6.3 Kaltleiter	207
3.6.4 Silizium-Widerstandstemperatursensor	209
3.6.5 Fehlermöglichkeiten bei der Anwendung von elektrischen Berührungsthermometern	210
3.7 Ermittlung verfahrenstechnischer Größen durch Temperaturmessungen ..	211
3.7.1 Füllstandswächter	211
3.7.2 Thermischer Massenstrommesser	212
3.7.3 Messung der Luftfeuchte; Messung von Gaskonzentrationen	215
3.8 Gassensoren mit halbleitenden Metalloxiden	216
3.9 Lichtempfindlicher Widerstand	217
3.10 Magnetisch steuerbarer Widerstand	218
3.10.1 Feldplatte	218
3.10.2 Anisotroper magnetoresistiver Effekt (AMR)	219
3.10.3 Spinventil, Riesenmagnetowiderstand und kolossaler Magnetowiderstand	220
3.11 Dehnungsmessstreifen	220
3.11.1 Prinzip	220
3.11.2 Metall-Dehnungsmessstreifen	221
3.11.3 Störgrößen	223
3.11.4 Anwendung der DMS zur Spannungsanalyse	224
3.11.5 Halbleiter-Dehnungsmessstreifen	227
3.12 Linearisieren der Widerstandsaufnehmer-Kennlinien	228
3.12.1 Linearisieren durch einen Vor- und/oder Parallelwiderstand	229
3.12.2 Messung der Spannungsdifferenz bei Differenzial-Widerstands- aufnehmern	231
3.12.3 Differenzial-Widerstandsaufnehmer in einer Halbbrücke	232

4

**Messung von Blind- und Scheinwiderständen;
induktive und kapazitive Aufnehmer 233**

4.1	Strom- und Spannungsmessung	234
4.1.1	Messung der Effektivwerte	234
4.1.2	Vergleich mit Referenzelement	235
4.1.3	Getrennte Ermittlung des Blind- und Wirkwiderstandes	236
4.1.4	Messung eines Phasenwinkels	237
4.1.5	Strommessung in einem fremderregten Schwingkreis	239
4.2	Wechselstrom-Abgleichbrücke	240
4.2.1	Prinzip	240
4.2.2	Kapazität-Messbrücke nach Wien	241
4.2.3	Induktivitäts-Messbrücke nach Maxwell	242
4.2.4	Induktivitäts-Messbrücke nach Maxwell-Wien	242
4.2.5	Phasenschieber-Brücke	243
4.3	Wechselspannungs-Ausschlagbrücke	243
4.4	Induktive Aufnehmer	244
4.4.1	Tauchanker-Aufnehmer zur Längen- und Winkelmessung	245
4.4.2	Queranker-Aufnehmer zur Längen- und Winkelmessung	247
4.4.3	Kurzschlussring-Sensor	249
4.4.4	Anwendung der induktiven Längen- und Winkelgeber	249
4.4.5	Induktiver Schleifendetektor zur Erfassung von Fahrzeugen	250
4.4.6	Magnetoelastische Kraftmessdose	251
4.5	Kapazitive Aufnehmer	252
4.5.1	Änderung des Plattenabstands	252
4.5.2	Änderung der Plattenfläche	253
4.5.3	Geometrische Änderung des Dielektrikums	254
4.5.4	Änderung der Permittivitätszahl durch Feuchtigkeit oder Temperatur	256
4.6	Einsatz der induktiven und kapazitiven Abgriffe in Differenzdruck-Messumformern	256
4.7	Vergleich der induktiven und der kapazitiven Längenaufnehmer	258
4.7.1	Energie des magnetischen und des elektrischen Feldes	259
4.7.2	Größe der Brückenschaltung entnehmbare Leistung	260
4.7.3	Steuerleistung zum Verstellen der Aufnehmer	261

5

Digitale Grundschaltungen; Zeit- und Frequenzmesstechnik . 263

5.1	Darstellung, Anzeige und Ausgabe numerischer Messwerte	263
5.1.1	Duales Zahlensystem	263
5.1.2	Binärcodes für Dezimalzahlen	264
5.1.3	Ziffernanzeige; Vergleich mit Skalenanzeige	266
5.1.4	Umsetzung eines digitalen Signals in eine Spannung; Digital/Analog-Umsetzer; digital steuerbare Spannungsquelle . . .	266
5.2	Bistabile Kippstufen	268
5.2.1	Asynchrones RS-Speicherglied	268
5.2.2	Taktgesteuertes RS-Speicherglied	269
5.2.3	Taktflankengesteuertes D-Speicherglied	270

5.2.4	Taktflankengesteuertes JK -Speicherglied	271
5.2.5	Taktflankengesteuertes T -Speicherglied	271
5.3	Zähler	272
5.4	Register	273
5.4.1	Parallelregister	273
5.4.2	Schieberegister zur Parallel/Serien-Umsetzung	274
5.4.3	Schieberegister zur Serien/Parallel-Umsetzung	275
5.4.4	Multiplexer als Parallel/Serien-Umsetzer	276
5.5	Digitale Zeitmessung	277
5.5.1	Einführung	277
5.5.2	Digitale Messung eines Zeitintervalls	278
5.5.3	Messung einer Periodendauer	278
5.5.4	Messung eines Phasenwinkels	279
5.6	Digitale Frequenzmessung	280
5.6.1	Digitale Messung einer Frequenz oder einer Impulsrate	280
5.6.2	Messung des Verhältnisses zweier Frequenzen oder Drehzahlen ..	281
5.6.3	Messung der Differenz zweier Frequenzen oder Drehzahlen	281
5.6.4	Universalzähler	281
5.7	Analoge Messung eines Zeitintervalls oder einer Frequenz	283
5.7.1	Analoge Messung eines Zeitintervalls; t/u -Umformung	283
5.7.2	Analoge Messung einer Frequenz oder Impulsrate; f/u -Umformung	283

6

Analog/Digital-Umsetzer für elektrische und mechanische Größen	286	
6.1	Abtast- und Halteglied	286
6.2	Direkt vergleichende A/D-Umsetzer	288
6.2.1	Komparator	288
6.2.2	Komparator mit Hysterese	289
6.2.3	A/D-Umsetzer mit parallelen Komparatoren	290
6.2.4	Kaskaden-Parallel-Umsetzer	291
6.2.5	A/D-Umsetzer mit sukzessiver Annäherung an den Messwert	292
6.3	Spannung/Zeit- und Spannung/Frequenz-Umsetzer	294
6.3.1	u/t -Zweirampen-Umsetzer	294
6.3.2	u/f -Umsetzer nach dem Ladungsbilanzverfahren	296
6.3.3	Delta-Sigma-Umsetzer	298
6.4	Kenngrößen der Analog/Digital-Umsetzer	301
6.4.1	Kennlinie	301
6.4.2	Abtasttheorem	302
6.4.3	Umsetzrate und Auflösung	303
6.4.4	Quantisierungsrauschen, Zahl der effektiven Bit	304
6.5	Analog/Digital-Umsetzer in Messgeräten	306
6.5.1	Digital-Multimeter	306
6.5.2	Digitales Speicher-Oszilloskop	307
6.6	A/D-Umsetzer für mechanische Größen	310
6.6.1	Endlagenschalter	310
6.6.2	Codierte Längen- und Winkelgeber	311

6.6.3	Inkrementale Längen- und Winkelgeber	312
6.6.4	Vergleich der codierten und inkrementalen Längengeber	316

7 Schwingungsmessungen

7.1	Astabile Kippschaltungen als Frequenzumsetzer	317
7.1.1	Kippschaltung mit Verstärker und Komparator	317
7.1.2	Kippschaltung mit stabilisierten Hilfsspannungen	320
7.2	Harmonische Oszillatoren	322
7.2.1	Erzeugung ungedämpfter Schwingungen, Prinzip	322
7.2.2	LC-Oszillator	323
7.2.3	RC-Oszillator	326
7.3	Piezoelektrische Resonatoren	328
7.3.1	Volumenschwingende Quarze	328
7.3.2	Oberflächenwellen OFW in Quarzen	335
7.3.3	Funkabfragbare Sensoren	338
7.3.4	Ultraschall-Durchflussmesser	340
7.4	Mechanische Schwingungen	343
7.4.1	Charakteristische Größen	343
7.4.2	Relative Schwingungsmessung	344
7.4.3	Absolute Schwingungsmessung	346
7.4.4	Monolithisch integrierter Beschleunigungssensor	349
7.4.5	Stimmgabel-Frequenzumsetzer	350
7.4.6	Coriolis-Massendurchflussmesser	351

8 Spektralanalyse

8.1	Aufgabenstellung	354
8.2	FTC eines zeitkontinuierlichen Signals	354
8.3	FTD eines zeitdiskreten Signals	355
8.3.1	Übergang vom zeitkontinuierlichen zum zeitdiskreten Signal	355
8.3.2	Unterschiede bei der Transformation eines zeitkontinuierlichen und eines zeitdiskreten Signals	356
8.3.3	Abtasttheorem	357
8.4	DFT eines abgetasteten, zeitbegrenzten Signals	358
8.4.1	Datensatz mit endlich vielen Werten; diskrete Spektralfunktion ..	358
8.4.2	Zusammenhang zwischen FTD und DFT; Anhängen von Nullen ..	362
8.4.3	Wahl der Abtastfrequenz	365
8.4.4	Inverse Diskrete Fouriertransformation IDFT	366
8.5	DFT eines abgetasteten, nicht zeitbegrenzten Signals	368
8.5.1	Konstantes Signal	368
8.5.2	Periodisches Signal	371
8.5.3	Anhängen von Nullen, Abtastfrequenz und Messzeit	376
8.5.4	Inverse Diskrete Fouriertransformation IDFT	376
8.6	Fensterfunktionen	378
8.6.1	Kriterien zur Beurteilung	378
8.6.2	Fensterfunktionen und ihre Spektren	379
8.6.3	Fensterung bei transienten Signalen	386

8.7	Anwendungen der DFT	387
8.8	Leistungsmessung im Zeit- und Frequenzbereich	388
9	Rechnerunterstützte Messsysteme	393
9.1	Bussysteme	393
9.1.1	Kenngrößen von Bussystemen	393
9.1.2	Universal Serial Bus USB	395
9.2	Steuerung eines Messaufbaus	395
9.2.1	Gerätesteuerung	396
9.2.2	Aufgaben der Messprogramme	397
9.2.3	Ablauf eines rechnergestützten Messprozesses	398
9.2.4	Virtuelles Messgerät	404
9.2.5	Steuerung eines Messaufbaus mit LabVIEW	405
9.3	Eingebettetes System	410
9.3.1	Mikrocontroller	411
9.3.2	Programmierung von Mikrocontrollern	414
	Literatur	419
	Index	427

Übungsaufgaben mit Lösungen zu den Kapiteln aus dem Buch finden Sie als Zusatzmaterial auf plus.hanser-fachbuch.de.

1

Grundlagen

Das Messen ist das quantitative Erfassen einer Größe. Die Messgeräte erweitern dabei in einem fast unvorstellbaren Ausmaß die über unsere Sinne wahrnehmbare Umwelt. Sie erschließen uns Bereiche, in denen wir blind oder taub sind. So sieht unser Auge z. B. von den elektromagnetischen Schwingungen nur die Strahlung mit Wellenlängen zwischen 0,38 und 0,78 μm , während den Messgeräten ein Wellenlängenbereich von über 18 Zehnerpotenzen zugänglich ist. Gemessen und berechnet werden Größen, die weit außerhalb unserer direkten Erfahrung liegen, wie etwa der Durchmesser von Atomkernen oder die Ausdehnung des Weltalls.

Das objektive, quantitative Beobachten bildet zusammen mit dem logischen Denken die Quelle jeder naturwissenschaftlichen Erkenntnis¹⁾. Diese von Galilei konsequent angewandte Methode führte zur Entwicklung der Naturwissenschaften und diese wiederum bilden die Grundlage unserer durch die Technik geprägten Zivilisation. Hier ist das Messen wichtig für Forschung, Entwicklung, Fertigung, Produktion und Prüffeld in der Industrie, für den Austausch von Gütern im Handel und für die Zuverlässigkeit und Sicherheit der Transportsysteme. Darüber hinaus hilft die Messtechnik auf den Gebieten des Umweltschutzes und der Medizin unsere Lebensbedingungen zu verbessern. Aus diesem breiten Einsatz resultiert, dass nicht nur die mit Entwicklung, Fertigung und Vertrieb der Messgeräte befassten Ingenieure, sondern praktisch alle in der Naturwissenschaft oder Technik Tätigen als potenzielle Anwender der Messtechnik entsprechende Kenntnisse benötigen.

■ 1.1 Umfang und Bedeutung der elektrischen Messtechnik

Die elektrische Messtechnik befasst sich zunächst mit der Messung elektrischer Größen wie z. B.

- Spannung,
- Ladung, Strom,
- Widerstand, Induktivität, Kapazität,
- Phasenwinkel,
- Frequenz.

¹⁾ Plato (427–347 v. Chr.): „Das beste Mittel gegen Sinnestäuschungen ist das Messen, Zählen und Wägen. Dadurch wird die Herrschaft der Sinne über uns beseitigt. Wir richten uns nicht mehr nach dem sinnlichen Eindruck der Größe, der Zahl, des Gewichts der Gegenstände, sondern berechnen, messen und wägen sie. Und das ist Sache der Denkkraft, Sache des Geistes in uns.“ [Der Staat, Kröner Stuttgart 1973]

Dabei lässt sich die zu messende Größe nur selten direkt auf einem Instrument anzeigen. Oft müssen die Messsignale galvanisch getrennt, entkoppelt, übertragen und fast immer auch „verarbeitet“ werden, wie z. B. verstärkt, kompensiert, umgeformt, umgesetzt, gefiltert, gespeichert, umgerechnet, linearisiert, bevor das Messergebnis auf einer

- Skalen-, Ziffern- oder Bildschirmanzeige ausgegeben,
- auf Papier oder elektronischen Medien festgehalten und dokumentiert oder auch
- direkt zur Überwachung, Steuerung oder Regelung eines Prozesses benutzt werden kann.

Messgeräte sind die im Signalfluss liegenden Geräte einer Messeinrichtung, die die Qualität des Messergebnisses wie z. B. die Genauigkeit und die Anzeigegeschwindigkeit beeinflussen [1.1, 1.2, 1.4]. Sie müssen nicht wie in Bild 1.1 in Reihe geschaltet sein, sondern können auch andere **Strukturen** bilden. Die zwischen den Messgeräten ausgetauschten **Signale** enthalten die Information über die zu messende Größe. Diese Information kann z. B. in der Amplitude oder Frequenz einer elektrischen Größe stecken oder auch quantisiert in Form eines codierten Signals vorliegen.

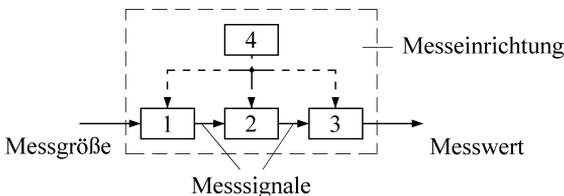


Bild 1.1 Messeinrichtung bestehend aus den Messgeräten 1, 2, 3 und einem die Hilfsenergie liefernden Hilfsgerät 4

Das elektrische Messen hat eine besondere Bedeutung dadurch gewonnen, dass über verschiedene physikalische Effekte nichtelektrische Größen in elektrische umgeformt werden können. Die dafür benötigten **Aufnehmer, Sensoren, Detektoren, Fühler** sind für sehr viele zu messende Größen verfügbar (Bild 1.2), so dass praktisch jede physikalische Größe als elektrisches Signal dargestellt und dann mit den Methoden der elektrischen Signalverarbeitung weiterbehandelt werden kann. Die Messtechnik wird insbesondere durch die Anwendung dieser physikalischen Effekte auf den unterschiedlichsten Gebieten der Technik zu einem sehr interessanten Fach.

Die elektrische Messtechnik ist somit die Disziplin, die sich befasst mit

- der Gewinnung des elektrischen Messsignals,
- der Struktur der Messeinrichtung,
- den Eigenschaften der Signalformen,
- der Übertragung und Verarbeitung der Messsignale und
- der Ausgabe und Darstellung der gewonnenen Information.

Für eine gegebene Messaufgabe sind jeweils der geeignete Aufnehmer auszuwählen, die Struktur zu entwerfen und die Signalform festzulegen, um die hinsichtlich der Genauigkeit, Störsicherheit und Kosten günstigste Kombination zu erhalten.

Die elektrische Messung ist dabei anderen Verfahren insbesondere überlegen durch

- das leistungsarme bis leistungslose Erfassen von Messwerten,
- das hohe Auflösungsvermögen,
- das gute dynamische Verhalten,
- die stete Messbereitschaft,

- die bequeme Übertragbarkeit über weite Entfernungen,
 - die leichte Verarbeitung der Messdaten
- und hat sich so weitgehend durchgesetzt.

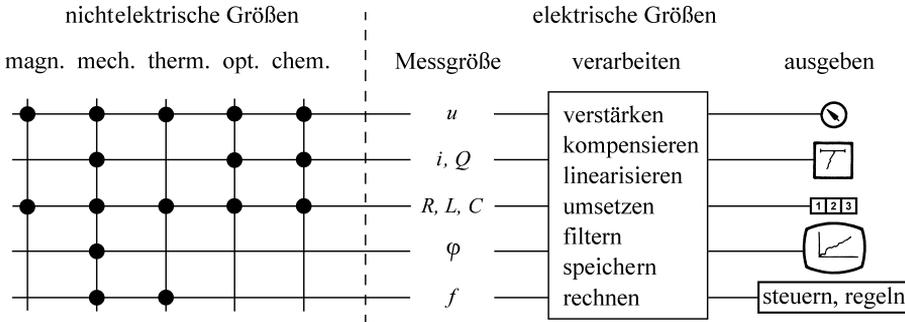


Bild 1.2 Mit Hilfe von Sensoren oder Aufnehmern werden nichtelektrische Größen in elektrische umgeformt und damit der elektrischen Messung zugänglich

1.2 Naturkonstanten und Maßeinheiten

Eine physikalische Größe ist die messbare Eigenschaft eines Objekts, Zustands oder Vorgangs. Die Messung der physikalischen Größe erfolgt durch einen Vergleich mit einer Maßeinheit. Die Zahl, die angibt, wie oft die Einheit in der zu messenden Größe enthalten ist, wird als Zahlenwert der physikalischen Größe bezeichnet:

$$\text{Physikalische Größe} = \text{Zahlenwert} \cdot \text{Einheit.} \quad (1.1)$$

Um messen zu können, müssen also vorher die Einheiten definiert sein. Diese orientierten sich zunächst am Menschen (Elle, Fuß) oder an den Abmessungen und der Umdrehungszeit unserer Erde (Meile, mittlerer Sonntag). Sie werden teilweise von Ort zu Ort unterschiedlich gehandhabt und erschwerten damit sowohl den Austausch von Gütern des täglichen Bedarfs als auch den von wissenschaftlichen Erkenntnissen. So werden seit über hundert Jahren große Anstrengungen unternommen, die Einheiten allgemein verbindlich, genau und zeitlich beständig zu definieren.

1.2.1 Naturkonstanten

Schon 1889 hat Max Planck vorgeschlagen, das System der Einheiten nicht auf Materie zu gründen, sondern auf die Fundamentalkonstanten, die Naturkonstanten, selbst. Diese sind unabhängig von den spezifischen Eigenschaften der Stoffe. So sind die Naturkonstanten von besonderem Interesse für die Messtechnik, da sie die Basis der Einheiten bilden können. Das Ziel ist, die Einheiten weniger durch Maßverkörperungen zu definieren, sondern mehr durch Experimente, die überall und immer wieder nachvollzogen werden können. Dabei werden die Einheiten gleichzeitig auf Fundamentalkonstanten zurückgeführt. [1.3]–[1.5]. In

folgender Tabelle sind die von CODATA (Committee on Data for Science and Technology) 2022 empfohlenen physikalischen Fundamentalkonstanten zusammengestellt.

Tabelle 1.1 Physikalische Fundamentalkonstanten [1.3]

	Zahlenwert	Einheit	rel. Unsicherheit
Avogadro-Konstante N_A	$6,02214076 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}	null
Boltzmann-Konstante k	$1,380649 \cdot 10^{-23}$	J K^{-1}	null
elektrische Elementarladung e	$1,602176634 \cdot 10^{-19}$	A s	null
elektrische Feldkonstante ϵ_0	$8,8541878128 \cdot 10^{-12}$	$\text{A s V}^{-1} \text{m}^{-1}$	$1,5 \cdot 10^{-10}$
Faraday-Konstante $F = e N_A$	96485,33212...	A s mol^{-1}	null
Gravitationskonstante G	$6,67430 \cdot 10^{-11}$	$\text{N m}^2 \text{kg}^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-5}$
Josephson-Konstante $K_J = 2e/h$	$4,835978484... \cdot 10^{14}$	Hz V^{-1}	null
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c_0	299792458	m s^{-1}	null
magnetische Feldkonstante μ_0	$1,25663706212 \cdot 10^{-6}$	$\text{V s A}^{-1} \text{m}^{-1}$	$1,5 \cdot 10^{-10}$
Ruhemasse des Elektrons m_0	$9,1093837015 \cdot 10^{-31}$	kg	$3,0 \cdot 10^{-10}$
Planck'sches Wirkungsquantum h	$6,62607015 \cdot 10^{-34}$	J s	null
universelle Gaskonstante $R = k N_A$	8,314462618...	$\text{J K}^{-1} \text{mol}^{-1}$	null
Von-Klitzing-Konstante $R_K = h/e^2$	$2,581280745... \cdot 10^4$	Ω	null

Die Lichtgeschwindigkeit c_0 ist als Konstante festgelegt zu

$$c_0 = 299\,792\,458 \text{ m/s}. \quad (1.2)$$

Auch die elektrische Feldkonstante ϵ_0 (Permittivität des Vakuums) und die magnetische Feldkonstante μ_0 (Permeabilität des Vakuums) sind mit Zahlenwert und Einheit definiert. Sie sind mit der Lichtgeschwindigkeit verknüpft über

$$c_0^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}. \quad (1.3)$$

Durch diese Festlegung wird erreicht, dass die mechanisch und elektrisch gemessenen Werte für Kraft, Energie und Leistung übereinstimmen.

1.2.2 Internationales Einheitensystem, SI-Einheiten

Die Generalkonferenz für Maß und Gewicht hat 1960 das „Système International d’Unités“ empfohlen, das inzwischen weltweit eingeführt und auch in der Bundesrepublik Deutschland gesetzlich vorgeschrieben ist [1.6]–[1.8]. Das System definiert die sogenannten SI-Einheiten (Tabelle 1.2), denen die Basiseinheiten zugrunde liegen (Tabelle 1.3). Durch Multiplikation und/oder Division der Basiseinheiten werden die für die anderen physikalischen Größen benötigten Einheiten abgeleitet, wie z. B. die Einheit m/s für die Geschwindigkeit oder m/s^2 für die Beschleunigung. Wird die Ableitung so vorgenommen, dass bei der Umrechnung nur der Zahlenfaktor 1 auftritt, so sind die dabei entstandenen Einheiten **kohärent**. Sie bilden zusammen mit den Basiseinheiten ein kohärentes System. Einige der abgeleiteten SI-Einheiten haben dabei selbstständige Namen mit eigenen Kurzzeichen bekommen.

Tabelle 1.2 Abgeleitete SI-Einheiten; die in Klammern stehenden Einheiten sind veraltet

Größe und Formelzeichen	SI-Einheit	Beziehung	Weitere und zum Teil veraltete Einheiten
ebener Winkel α	Radian rad	1 rad = 1 m/m	Grad: $1^\circ = \pi/180$ rad
räumlicher Winkel Ω	Steradian sr	1 sr = 1 m ² /m ²	
Frequenz f, ν	Hertz Hz	1 Hz = 1/s	
Kraft F	Newton N	1 N = 1 kg m/s ²	1 kp \approx 9,81 N (1 dyn \approx 10 ⁻⁵ N)
Druck p	Pascal Pa	1 Pa = 1 N/m ²	Bar: 1 bar = 10 ⁵ Pa (1 kp/m ² \approx 0,98 bar)
Energie E	Joule J	1 J = 1 N m = 1 W s = 1 kg m ² /s ²	1 kWh = 3,6 · 10 ⁶ J 1 eV = 1,60 · 10 ⁻¹⁹ J (1 cal \approx 4,19 J) (1 erg = 10 ⁻⁷ J)
Leistung P	Watt W	1 W = 1 J/s = 1 N m/s = 1 kg m ² /s ³	(Pferdestärke) (1 PS \approx 735,499 W)
elektr. Ladung Q	Coulomb C	1 C = 1 A s	
elektr. Spannung U	Volt V	1 V = 1 W/A	
elektr. Feldstärke E	V/m		
elektr. Widerstand R	Ohm Ω		
Leitwert G	Siemens S	1 S = 1/ Ω	
Induktivität L	Henry H	1 H = 1 Wb/A = 1 Vs/A	
elektr. Kapazität C	Farad F	1 F = 1 C/V = 1 A s/V	
magn. Feldstärke H	A/m		(Oersted Oe: 1 Oe \approx 80 A/m)
magn. Fluss Φ	Weber Wb	1 Wb = 1 V s	(Maxwell M: 1 M = 10 ⁻⁸ V s)
magn. Flussdichte B	Tesla T	1 T = 1 V s/m ²	(Gauß G: 1 G = 10 ⁻⁴ V s/m ²)
Lichtstrom Φ	Lumen lm	1 lm = 1 cd sr	
Beleuchtungsstärke E	Lux lx	1 lx = 1 lm/m ²	
Aktivität A einer radioaktiven Substanz	Becquerel Bq	1 Bq = 1/s	(Curie Ci: 1 Ci = 3,7 · 10 ¹⁰ s ⁻¹ = 3,7 · 10 ⁻¹⁰ Bq)
Energiedosis D	Gray Gy	1 Gy = 1 J/kg	(Rad rd: 1 rd = 10 ⁻² J/kg)
Ionendosis J	C/kg		(Röntgen R: 1 R = 2,58 · 10 ⁻⁴ C/kg)
Äquivalentdosis	Sievert Sv	1 Sv = 1 J/kg	(Rem rem: 1 rem = 10 ⁻² J/kg)

Tabelle 1.3 Basisgrößen und Basiseinheiten

Gebiet	Basisgröße	Formelzeichen	Basiseinheiten	Einheitenzeichen
Mechanik	Länge	l	Meter	m
	Masse	m	Kilogramm	kg
	Zeit	t	Sekunde	s
Elektrotechnik	Stromstärke	I	Ampere	A
Thermodynamik	Temperatur	T	Kelvin	K
Optik	Lichtstärke	I_v	Candela	cd
Chemie	Stoffmenge	n	Mol	mol

Um bei den SI-Einheiten unter Umständen recht unhandliche Zahlenwerte zu vermeiden, dürfen durch dezimale Vorsätze neue vergrößerte oder verkleinerte Einheiten gebildet werden (Tabelle 1.4). Die so entstandenen Einheiten, wie z. B. MW, cm, mV, μ A sind dann allerdings nicht mehr kohärent.

Tabelle 1.4 Vorsätze zur Kennzeichnung dezimaler Vielfacher und Teile von Einheiten

Vorsatz	Zeichen	Zahlenwert	Vorsatz	Zeichen	Zahlenwert
Exa-	E	10^{18}	Dezi-	d	10^{-1}
Peta-	P	10^{15}	Zenti-	c	10^{-2}
Tera-	T	10^{12}	Milli-	m	10^{-3}
Giga-	G	10^9	Mikro-	μ	10^{-6}
Mega-	M	10^6	Nano-	n	10^{-9}
Kilo-	k	10^3	Piko-	p	10^{-12}
Hekto-	h	10^2	Femto-	f	10^{-15}
Deka-	da	10	Atto-	a	10^{-18}

1.2.3 Die neuen SI-Einheiten

Die folgende Diskussion des Internationalen Einheitensystems bzw. der Definition der SI-Basiseinheiten sowie der sie realisierenden Experimente wurde [1.42] auszugsweise entnommen.

Das Internationale Einheitensystem SI wurde in der Zeit von 1948 bis 1960 etabliert und 1960 *Système international d'unités*, kurz SI, getauft. Von den Organen der Meterkonvention entwickelt und eingerichtet, baut das SI auf dem metrischen System auf. Die Grundidee ist, alle SI-Einheiten nur durch Multiplikation oder Division aus wenigen Basiseinheiten (zuerst sechs, heute sieben) zu bilden. Dabei sollen lediglich dezimale Faktoren Verwendung finden, die durch entsprechende Präfixe wie ‚k‘ für ‚kilo‘, also 1000, bezeichnet werden. Die sieben Basiseinheiten sind: die Sekunde (s), der Meter (m), das Kilogramm (kg), das Ampere (A), das Kelvin (K), die Candela (cd) und das Mol (mol). Jede der Basiseinheiten bringt eine weitere ‚Dimension‘, d. h. ein weiteres physikalisch-messtechnisches Gebiet in das Einheitensystem ein.

Bis zum 20. Mai 2019 waren die Basiseinheiten auf unterschiedliche Weise definiert. Als Bezugsgrößen wurden teils Artefakte (wie das Urkilogramm), idealisierte Messvorschriften

(Ampere), Materialeigenschaften (Kelvin, Mol), festgelegte Faktoren (Candela) oder Naturkonstanten (Sekunde, Meter) verwendet. Hätte sich eine dieser Größen geändert (wie das etwa beim ‚Urkilogramm‘, dem internationalen Kilogrammprototyp, tatsächlich der Fall war), so mussten konsequenterweise die durch die Naturkonstanten gegebenen Zusammenhänge scheinbar ebenfalls geändert werden – mit teils absurden Konsequenzen. Deshalb erschien es sinnvoller, feststehende Zusammenhänge zwischen verschiedenen (Natur-) Konstanten zur Definition der Bezugsgrößen zu nutzen. Nachdem die Sekunde, der Meter und auch die Candela bereits über festgelegte (Natur-) Konstanten definiert waren, wollte man im neuen SI auch das Kilogramm, das Ampere, das Kelvin und das Mol dadurch definieren, dass man sie über solche Konstanten miteinander verbindet.

Im neuen SI definiert man die sieben Basiseinheiten dadurch, dass man sieben ‚definierende Konstanten‘ festlegt, die diese Einheiten enthalten. Statt Artefakte zu verwenden, wie heute noch in der Definition des Kilogramms, ‚verankern‘ diese Konstanten das SI und werden zur neuen Basis. Die dimensional Bezüge der SI-Einheiten untereinander bleiben erhalten und alle Einheiten können durch Multiplikation oder Division der ‚Basiskonstanten‘ mit einem Vorfaktor gebildet werden. Der jeweilige Vorfaktor ergibt sich aus den festgelegten Zahlenwerten der beteiligten Basiskonstanten. Natürlich können weiterhin alle Einheiten auch aus den Basiseinheiten gebildet werden, aber die dahinterstehenden Basiskonstanten sind die tatsächlichen Bezugspunkte.

Sieben Naturkonstanten, sogenannte **definierende Konstanten**, erhalten im neuen SI festgelegte Werte; die Zahlenwerte entstammen den Ausgleichsrechnungen von CODATA im Sommer 2017. Die hier wiedergegebenen Definitionen der Einheiten sind aus der Richtlinie 2019/1258 der Europäischen Kommission übernommen. Diese ist eine offizielle deutsche Übersetzung der Neudefinitionen aus der 9. Auflage der SI-Broschüre des Internationalen Büros für Maße und Gewichte (BIPM). Die Definitionen traten am 20. Mai 2019 in Kraft, dem Datum des alljährlichen Weltmetrologietags.

Definierende Konstanten

- Frequenz des Hyperfeinstrukturübergangs des Grundzustands im ^{133}Cs -Atom
 $\Delta\nu = 9\,192\,631\,770\text{ s}^{-1}$
- Lichtgeschwindigkeit im Vakuum $c = 299\,792\,458\text{ m s}^{-1}$
- Planck-Konstante $h = 6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\text{ J s}$ ($\text{J s} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$)
- Elementarladung $e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\text{ C}$ ($\text{C} = \text{A s}$)
- Boltzmann-Konstante $k = 1,380\,649 \cdot 10^{-23}\text{ J K}^{-1}$ ($\text{J K}^{-1} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$)
- Avogadro-Konstante $N_A = 6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}\text{ mol}^{-1}$
- Das photometrische Strahlungsäquivalent K_{cd} einer monochromatischen Strahlung der Frequenz $540 \cdot 10^{12}\text{ Hz}$ ist genau gleich 683 Lumen durch Watt.

1.2.4 Definition und Darstellung der Sekunde

a) SI-Einheit der Sekunde

Die Sekunde, Einheitenzeichen s, ist die SI-Einheit der Zeit. Sie ist definiert, indem für die Cäsiumfrequenz $\Delta\nu$, der Frequenz des ungestörten Hyperfeinübergangs des Grundzustands des Cäsiumatoms 133, der Zahlenwert 9 192 631 770 festgelegt wird, ausgedrückt in der Einheit Hz, die gleich s^{-1} ist.

Diese Definition legt $\Delta\nu$ fest zu $9\,192\,631\,770\text{ s}^{-1}$. Löst man diese Beziehung nach der Einheit s auf, so ergibt sich:

$$1\text{ s} = \frac{9\,192\,631\,770}{\Delta\nu} \quad \text{oder} \quad 1\text{ Hz} = \frac{\Delta\nu}{9\,192\,631\,770} \quad (1.4)$$

Das heißt, eine Sekunde ist gleich der Dauer von $9\,192\,631\,770$ Schwingungen der Strahlung, die der Energie des Übergangs zwischen den zwei Hyperfeinstruktur-niveaus des ungestörten Grundzustands im ^{133}Cs -Atom entspricht.

Cäsium-Atomuhr

In dieser „primären“ Uhr werden Cs-133-Atome verdampft, laufen durch ein Magnetfeld und treffen auf einen Detektor. Beim Passieren des magnetischen Wechselfeldes nehmen die Cs-Atome in einer Resonanzabsorption Energie auf und gehen in den energiereicheren Zustand über. Ändert sich die Frequenz des Wechselfeldes, so ändert sich die Zahl der auf den Detektor treffenden Cs-Atome. Die Frequenz, bei der der Detektorstrom sein Maximum hat, wird zu

$$f_0 = 9\,192\,631\,770\text{ Hz}$$

definiert und die Sekunde ergibt sich als die entsprechende Zahl von Periodendauern (Atomuhr). Die Resonanzabsorption ist sehr ausgeprägt und wird nicht durch andere Effekte gestört. Gleichzeitig lassen sich Frequenzen im GHz-Bereich gut messen, so dass die Sekunde mit der außerordentlich geringen Unsicherheit von nur 10^{-14} dargestellt werden kann.

Eine noch größere Genauigkeit erreicht die **Cs-Fontänen-Uhr**. Hier werden die Cs-Atome auf eine Temperatur nahe dem absoluten Nullpunkt abgekühlt [1.9]. Dabei verringert sich die thermische Bewegung auf wenige cm/s. Die Atome lassen sich sammeln und als „Fontäne“ durch das Magnetfeld schicken. Dadurch verbessert sich das Signal/Rausch-Verhältnis und die Genauigkeit steigt um eine Zehnerpotenz.

Zusätzlich zur Messung der Sekunde müssen die Nationalen Metrologischen Institute sich dann noch darüber verständigen, welche Sekunde als die erste eines Tages zu nehmen ist. Das Ergebnis wird in Deutschland durch den Normalfrequenz- und Zeitzeichensender DCF 77 (Langwelle) in Mainflingen bei Frankfurt/Main übertragen. Während jeder Minute werden die Informationen über Minute, Stunde, Kalendertag, Wochentag, Monat und die beiden letzten Ziffern des Jahres BCD-codiert gesendet (Funkuhr) [1.10].

b) Optische Uhren

Das sichtbare Licht hat eine etwa 50 000mal höhere Frequenz als die Mikrowellenstrahlung. So liegt der Gedanke nahe, die höhere optische Frequenz für eine Uhr zu benutzen. Dabei wird nicht nur eine höhere Auflösung erwartet, sondern auch eine verbesserte Stabilität und Genauigkeit. So wird in naher Zukunft die SI-Einheit Sekunde über optische Frequenzen neu definiert werden. [1.11]–[1.14].

Die hohen Frequenzen des sichtbaren Lichtes lassen sich nicht direkt mit elektronischen Baugruppen messen. Sie müssen aber auf die Frequenz der Mikrowellenstrahlung zurückgeführt werden. Dies gelingt mit optischen Teilerstufen und optischen Synthesizern oder mit Frequenzkämmen (J. Hall und Th. Hänsch, Nobelpreis 2005). Darin werden optische

Frequenzen ohne Verlust an Genauigkeit auf leicht messbare Radiofrequenzen abgebildet. Diese Frequenzkammgeneratoren sind eine wesentliche Komponente einer optischen Uhr [1.15, 1.16].

Für optische Uhren sind scharfe Spektrallinien, sehr schmalbandige Übergänge zwischen den Spektralniveaus, erforderlich. Deshalb werden die Messaufbauten alle in der Nähe des absoluten Nullpunkts betrieben. Viele Elektronenübergänge in Atomen oder Ionen wurden untersucht. Besonders geeignet erwiesen sich die Isotope Strontium-88, Indium-115, Ytterbium-171 und Quecksilber-190 [1.17].

Insgesamt werden bei den optischen Uhren Unsicherheiten im Bereich von 10^{-17} bis 10^{-18} s erwartet. Bei diesen Auflösungen ist schon die Allgemeine Relativitätstheorie zu berücksichtigen. Diese erklärt den Einfluss der Schwerkraft auf die Ganggenauigkeit. Der Gangunterschied ist mit einer relativen Frequenzverschiebung von $1,1 \times 10^{-16}$ pro Meter Höhenunterschied zwar sehr klein, aber doch von Bedeutung. Die Ganggeschwindigkeit ändert sich schon um 10^{-18} , wenn die Uhr um einen Zentimeter angehoben wird. Schon jetzt ist bei dem Zeitvergleich der für die offizielle Zeit zuständigen Staatsinstitute deren Höhenlage zu berücksichtigen [1.18].

1.2.5 Definition und Darstellung des Meters

Der Meter, Einheitenzeichen m, ist die SI-Einheit der Länge. Er ist definiert, indem für die Lichtgeschwindigkeit in Vakuum c der Zahlenwert 299 792 458 festgelegt wird, ausgedrückt in der Einheit m/s, wobei die Sekunde mittels $\Delta\nu$ definiert ist. Diese Definition gibt c den Wert $299\,792\,458\text{ m s}^{-1}$. Löst man diese Beziehung nach der Einheit m auf, so ergibt sich:

$$1\text{ m} = \left(\frac{c}{299\,792\,458} \right) \text{ s} = \frac{9\,192\,631\,770}{299\,792\,458} \cdot \frac{c}{\Delta\nu} \approx 30,663\,319 \cdot \frac{c}{\Delta\nu} \quad (1.5)$$

Das heißt, ein Meter ist gleich der Strecke, die Licht im Vakuum innerhalb des Bruchteils von $1/299\,792\,458$ einer Sekunde zurücklegt.

In der Längenmesstechnik werden Strecken mit Hilfe von Interferometern gemessen. Diese benötigen eine sichtbare Strahlung, deren **Wellenlänge** λ bekannt sein muss. Laser z. B. sind als Strahlenquellen geeignet. Ihre Frequenz f wird wie bei optischen Uhren mittels Frequenzkammgeneratoren ermittelt. Aus der Lichtgeschwindigkeit c_0 ergibt sich dann die für Längenmessungen benötigte Wellenlänge λ :

$$c_0 = f \cdot \lambda. \quad (1.6)$$

Größere Entfernungen werden über Laufzeitmessungen ermittelt. Hier bestimmt die Genauigkeit der Zeitmessung den Fehler in der Längenmessung.

1.2.6 Definition und Darstellung des Kilogramms

a) SI-Einheit des Kilogramms

Das Kilogramm, Einheitenzeichen kg, ist die SI-Einheit der Masse. Es ist definiert, indem für die Planck-Konstante h der Zahlenwert $6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ festgelegt wird, ausgedrückt in der Einheit J s, die gleich $\text{kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ ist, wobei der Meter und die Sekunde mittels c und $\Delta\nu$ definiert sind.

Diese Definition gibt h den Wert $6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$. Löst man diese Beziehung nach der Einheit kg auf, so ergibt sich:

$$1 \text{ kg} = \left(\frac{h}{6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}} \right) \text{ m}^{-2} \text{ s} \quad (1.7)$$

$$= \frac{(299\,792\,458)^2}{(6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}) \cdot (9\,192\,631\,770)} \cdot \frac{h\Delta\nu}{c^2} \approx 1,475\,521\,4 \cdot 10^{40} \frac{h\Delta\nu}{c^2} \quad (1.8)$$

Das heißt, die Einheit kg wird mit der Wirkung (Einheit $\text{kg m}^2 \text{ s}^{-1}$) verknüpft, einer physikalischen Größe in der theoretischen Physik. Zusammen mit der Definition für die Sekunde und den Meter ergibt sich die Definition für das Kilogramm als Funktion des Planck'schen Wirkungsquantums h .

b) Quantennormale für das Kilogramm

Avogadro-Projekt. Im Avogadro-Projekt geht es zunächst darum, die Avogadrozahl N_A genauer zu bestimmen als bisher. Das soll über die folgende Beziehung geschehen:

$$N_A = \frac{M V n}{m} \quad \text{mit der Einheit} \quad \text{mol}^{-1} = \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \text{ m}^3 \frac{1}{\text{m}^3} \frac{1}{\text{kg}}. \quad (1.9)$$

In dieser Gleichung bedeuten

N_A : Avogadro-Konstante in mol^{-1} ,

M : molare Masse in $\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$,

V : Volumen in m^3 ,

n : Teilchendichte in m^{-3} ,

m : Masse in kg.

An diesem Projekt beteiligen sich Forschungsinstitute aus verschiedenen Ländern. Für die Masse m dient das monokristalline hochreine Isotop Silizium-28. Es wurde in einer russischen Isotopenanlage hergestellt. Daraus wurden in Australien zwei Kugeln mit einem Durchmesser von 93,7 mm und einem Gewicht von ungefähr 1 kg gefertigt. Die für Gl. (1.9) nötigen Größen wurden dann wie folgt ermittelt:

Die Masse m der Kugeln wurde durch einen Vergleich mit internationalen Normalen gefunden (Japan, Deutschland).

Das Volumen V der äußerst sorgfältig polierten Kugeln wurde mit einem Kugelinterferometer bestimmt [1.21]. Die Ungenauigkeiten bei den Rundheitsmessungen lagen im Bereich von wenigen Nanometern (Japan, Australien, Deutschland).

Die Teilchendichte n wurde aus Messungen mit einem Röntgeninterferometer erhalten (Italien, USA).

Die mittlere molare Masse M ergab sich aus Messungen mit einem Massenspektrometer, wofür ein neues Verfahren entwickelt worden ist (Deutschland). Berücksichtigt wurden eventuell vorhandene Kristallfehler, Fremdatome und die Oberflächenschicht aus Siliziumdioxid.

Damit konnte 2010 die Avogadro-Konstante bis auf eine Unsicherheit von $3 \cdot 10^{-8}$ bestimmt werden. Das ist eine Verbesserung gegenüber dem bisherigen Wert, reicht aber noch nicht für eine Neudefinition des Kilogramms. Dafür wird eine Unsicherheit von $2 \cdot 10^{-8}$ verlangt. Dieses scheint möglich zu sein. Danach könnte das Kilogramm mit einer festgelegten Avogadrozahl neu definiert und die Masse m könnte über Gl. (1.9) gemessen werden.

Wattwaage. In der Wattwaage wird eine mechanische Kraft mit einer elektrischen Kraft verglichen [1.8, 1.20]. Sehr vereinfacht beschrieben, wird auf der einen Seite der Waage die Masse m aufgelegt (Gewichtskraft), auf der anderen Seite wird eine bewegliche Spule in einem homogenen Magnetfeld aufgehängt. Die Wägung erfolgt in zwei Schritten. Zunächst wird der Strom I durch die bewegliche Spule so eingestellt, dass die Waage im Gleichgewicht ist (statischer Modus). In einem zweiten Schritt wird dann die bewegliche Spule mit der Geschwindigkeit v im Magnetfeld verschoben, wobei die Spannung $U(v)$ induziert wird. Die Geschwindigkeit und die induzierte Spannung werden gemessen (bewegter Modus). Nach einigen Umformungen kann dann die folgende Beziehung erhalten werden:

$$I(v=0) \cdot U(v) = 4 m g v \quad \text{mit der Einheit} \quad \text{AV} = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{W}. \quad (1.10)$$

In dieser Gleichung bedeuten:

- I : Strom in der Spule bei Abgleich $v = 0$ A,
- U : induzierte Spannung bei Bewegung in V,
- m : zu bestimmende Masse in kg,
- g : Erdbeschleunigung in m/s^2 ,
- v : Geschwindigkeit der Spule in m/s .

Damit sind in Gl. (1.10) alle Größen bekannt, um die Masse m zu bestimmen.

Der letzte Satz ist nicht falsch, aber nur die halbe Wahrheit. Bei der angestrebten Präzisionsmessung wird die Spannung $U(v)$ durch einen Vergleich mit einem Josephson-Normal (Abschnitt 1.2.7) ermittelt. Auch für den Strom $I(v=0)$ wird die Josephson-Spannung benötigt, da der Strom $I(v=0)$ über einen Hall-Widerstand läuft und mittels des Spannungsabfalls bestimmt wird. Für die Messung von $U(v)$ und $I(v=0)$ werden die Gln. (1.14) und (1.16) benötigt. In diesen Gln. treten die Josephson-Konstante K_J und die von-Klitzing-Konstante R_K auf. In beiden Konstanten kommen das Planck'sche Wirkungsquantum h und die Elementarladung e vor. Diesen ist zur Zeit ein Zahlenwert zugewiesen. Dieser ist aber für eine Neudefinition des Kilogramms noch nicht gut genug. So dienen die Experimente mit der Wattwaage zur Zeit dazu, die Planck'sche Konstante h genauer zu bestimmen. Ist dieses Ziel erreicht, dann kann das Kilogramm eventuell über Gl. (1.10) neu definiert werden. Zur Zeit ist noch nicht abzusehen, ob die neue Einheit Kilogramm über die Avogadro-Zahl oder über das Planck'sche Wirkungsquantum definiert werden kann.

1.2.7 Definition und Darstellung der elektrischen Einheiten

a) SI-Einheit des Ampere

Das Ampere, Einheitenzeichen A, ist die SI-Einheit der elektrischen Stromstärke. Es ist definiert, indem für die Elementarladung e der Zahlenwert $1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$ festgelegt wird, ausgedrückt in der Einheit C, die gleich As ist, wobei die Sekunde mittels $\Delta\nu$ definiert ist.

Diese Definition gibt e den Wert $1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$ A s. Löst man diese Beziehung nach der Einheit A auf, so ergibt sich:

$$1 \text{ A} = \left(\frac{e}{1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}} \right) \text{s}^{-1} \quad (1.11)$$

$$= \frac{1}{(9\,192\,631\,770) \cdot (1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19})} e \Delta\nu \approx 6,789\,687 \cdot 10^8 e \Delta\nu \quad (1.12)$$

Das heißt, ein Ampere entspricht dem Stromfluss von $1/(1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19})$ Elementarladungen (Elektronen) pro Sekunde.

Volt. In ähnlicher Weise wird bei der Darstellung der Einheit Volt die mit Hilfe einer Kondensatoranordnung erzeugte elektrostatische Kraft zu einer Gewichtskraft in Bezug gesetzt.

b) Quantennormale für die elektrischen Größen

Die elektrischen Größen Spannung, Widerstand und Strom lassen sich über Quanteneffekte und die Verknüpfung mit Naturkonstanten genauer messen als das Ampere nach der SI-Definition. Die neuen Verfahren sind invariant gegenüber Änderungen von Ort und Zeit [1.8, 1.17]. Dadurch werden für Vergleichsmessungen Unsicherheiten erreicht, die geringer sind als bei der Darstellung im SI-System.

Spannungsmessung mit dem Josephson-Effekt

Beim **Josephson-Effekt** [1.23]–[1.27] fließt zwischen zwei schwach gekoppelten Supraleitern (Tunnelelemente) beim Anlegen einer Gleichspannung ein Suprastrom der Frequenz f . Diese ist über die Elementarladung e und das Planck'sche Wirkungsquantum h mit der Spannung U verknüpft:

$$f = \frac{2e}{h} U. \quad (1.13)$$

Umgekehrt kann bei Einstrahlung einer Mikrowelle der Frequenz f der Josephson-Oszillator angeregt werden. Der Josephson-Oszillator schwingt dann auch mit Oberwellen $n f$ und es entstehen Spannungsstufen $U(n)$

$$U(n) = n \frac{h}{2e} f \quad \text{bei } n = 1, 2, \dots \quad (1.14)$$

mit $U(1) = 145 \mu\text{V}$ bei $f = 70 \text{ GHz}$.

Diese Spannungsstufen stellen äußerst präzise Referenzspannungen dar, da die Frequenz f des Oszillators mit Hilfe der Cs-Atomuhren bestimmt wird. Die verbleibende Unsicherheit in dem Faktor $2e/h$, der so genannten Josephson-Konstante K_J wird dadurch umgangen, dass dieser Konstanten im Jahr 2019 der Wert

$$K_{J-90} = \frac{2e}{h} = 483\,597,848\,4 \dots \text{ GHz/V} \quad (1.15)$$

zugewiesen wurde. Vergleichsmessungen lassen sich nun mit der relativen Unsicherheit von nur $5 \cdot 10^{-11}$ verwirklichen. Die Josephson-Gleichung gilt universell. Sie ist in weiten Grenzen unabhängig vom Material der Supraleiter, dem Typ und der Geometrie der Tunnelelemente, der Temperatur unterhalb der Temperatur für die Supraleitung und der Leistung der Mikrowellenstrahlung.

Für die praktische Anwendung werden auf einem Si-Chip sehr viele hintereinander liegende Josephson-Kontakte integriert. Dadurch können Spannungsnormale zwischen 1 und 10 Volt realisiert werden (Bild 1.3). Obwohl z. B. bei 14 000 Kontakten die Chipfläche nur etwa $1 \times 2 \text{ cm}^2$ beträgt, ist das komplette System doch relativ aufwändig.

Es umfasst die Kühlung, den Probehälter mit den Kontakten, ein Nano-Voltmeter und die komplette Steuerung und wird inzwischen kommerziell angeboten [1.27].

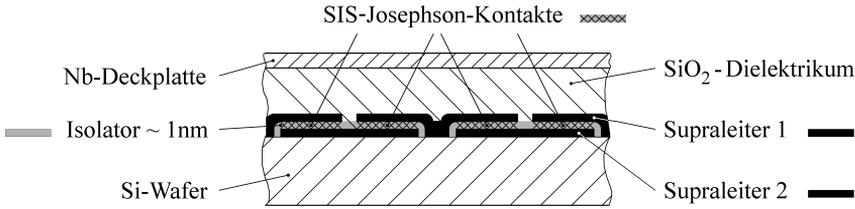


Bild 1.3 Ausschnitt der periodischen Streifenleitung mit vier Josephson-Kontakten [1.26] (Supraleiter-Isolator-Supraleiter SIS)

Widerstandsmessung mit dem Quanten-Hall-Effekt

Dieser Effekt wird auch nach seinem Entdecker von-Klitzing-Effekt genannt (Nobelpreis 1985 [1.28]–[1.30]). Werden extrem dünne Schichten bei tiefen Temperaturen einem starken Magnetfeld ausgesetzt, so liegt in diesen Schichten ein so genanntes zweidimensionales Elektronengas mit großer Elektronenbeweglichkeit vor. Die Kennlinie des Hall-Widerstandes in Abhängigkeit von der magnetischen Induktion verläuft dann stufenförmig (Bild 1.4).

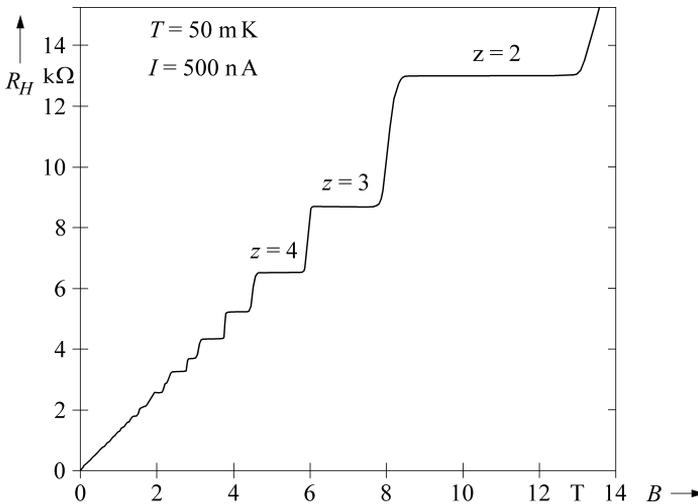


Bild 1.4 Quanten-Hall-Effekt, gemessen an einer GaAs-Probe [1.30]

Es entstehen für den Hall-Widerstand konstante Plateaus, deren Werte durch

$$R_H(z) = \frac{1}{z} \frac{h}{e^2} \Omega \tag{1.16}$$

gegeben sind. In dieser Gleichung sind z ein Zählparameter, h das Planck'sche Wirkungsquantum und e die Elementarladung. Der Faktor h/e^2 wird als von-Klitzing-Konstante R_K bezeichnet. 2022 wurde dafür nach einem Abgleich verschiedener Messungen der Wert

$$R_{K-90} = \frac{h}{e^2} = 25\,812,807\,45 \dots \Omega \tag{1.17}$$

festgelegt. Unabhängige Messungen zeigen, dass der Hall-Widerstand mit einer Unsicherheit von $4 \cdot 10^{-10}$ unabhängig ist von Material, Geometrie und Quantenzahl [1.30].

Strommessung mit der Einzelelektronen-Pumpe

Die neue Einheit des Ampere soll durch die Elementarladung definiert werden. Sie kann z. B. mit Hilfe von Quellen quantisierter Ströme (Einzelelektronen-Pumpen) erfolgen [1.31]. Eine Einzelelektronen-Pumpe besteht aus einem Schaltkreis, in dem im Takt einer Wechselspannung, der Pumpfrequenz, einzelne Elektronen tunneln. Damit lässt sich ein quantisierter Strom I erzeugen mit

$$I = n e f \quad \text{mit der Einheit} \quad A = A \cdot s^{-1}. \quad (1.18)$$

Dabei ist n die Zahl der parallel geschalteten Einzelelektronenpumpen, e die Elementarladung und f die Pumpfrequenz. Bei $n = 3$ und $f = 500$ MHz ergibt sich der Strom I zu

$$I = 3 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 500 \cdot 10^6 = 2,403 \cdot 10^{-10} A. \quad (1.19)$$

Damit sollen Ströme mit einer Unsicherheit $\leq 1 \cdot 10^{-8}$ erzeugt werden können.

Eine weitere Möglichkeit, die Strommessung auf Naturkonstanten zurückzuführen, bieten der Josephson- und der Quanten-Hall-Effekt. Dabei fließt der zu messende Strom über den Quanten-Hall-Widerstand. Der Spannungsabfall am Widerstand wird in einem Vergleich mit einem Josephson-Normal ermittelt. Der gesuchte Strom ergibt sich dann aus dem Ohm'schen Gesetz („Quanten-Ampereometer“).

Quantenmetrologisches Dreieck. Das quantenmetrologische Dreieck (Bild 1.5) verdeutlicht, dass in den elektrischen Größen Spannung, Strom und Widerstand die Naturkonstanten Elementarladung und Planck'sches Wirkungsquantum stecken. Die Physikalisch-Technische-Bundsanstalt PTB plant ein Experiment, um die Werte von e und h zu überprüfen und gegebenenfalls auszugleichen. Für dieses Dreiecksexperiment sind Josephson-Spannungsnormale, Quanten-Hall-Widerstände, Einzelelektronenpumpen und Kryostromkomparatoren erforderlich [1.17].

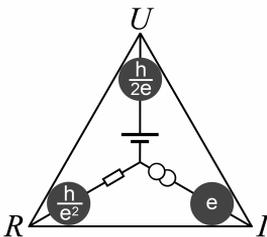


Bild 1.5 Das quantenmetrologische Dreieck [1.17]: In einem Quantenampereometer fließt der Strom über einen Quanten-Hall-Widerstand. Der dabei entstehende Spannungsabfall wird mit einem Josephson-Normal bestimmt.

1.2.8 Die SI-Einheiten der Temperatur, der Stoffmenge und der Lichtstärke

Die SI-Einheiten der Temperatur (Kelvin), der Stoffmenge (Mol) und der Lichtstärke (Candela) werden hier nur aufgeführt, ohne auf die Darstellung einzugehen.

Temperatur

Das Kelvin, Einheitenzeichen K, ist die SI-Einheit der thermodynamischen Temperatur. Es ist definiert, indem für die Boltzmann-Konstante k der Zahlenwert $1,380\,649 \cdot 10^{-23}$ festgelegt wird, ausgedrückt in der Einheit $J K^{-1}$, die gleich $kg m^2 s^{-2} K^{-1}$ ist, wobei das Kilogramm, der Meter und die Sekunde mittels h , c und $\Delta\nu$ definiert sind.

Diese Definition gibt k den Wert $1,380\,649 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$. Löst man diese Beziehung nach der Einheit K auf, so ergibt sich:

$$1 \text{ K} = \left(\frac{1,380\,649}{k} \right) \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \quad (1.20)$$

$$= \frac{1,380\,649 \cdot 10^{-23}}{(6,602\,070\,15 \cdot 10^{-34}) \cdot (9\,192\,631\,770)} \cdot \frac{\Delta\nu h}{k} \approx 2,266\,665\,3 \cdot \frac{\Delta\nu h}{k} \quad (1.21)$$

Das heißt, ein Kelvin entspricht einer Änderung der thermodynamischen Temperatur, die mit einer Änderung der thermischen Energie (kT) um $1,380\,649 \cdot 10^{-23} \text{ J}$ einhergeht.

Temperatur-Messwerte dürfen auch in der Einheit $^{\circ}\text{C}$ angegeben werden. Als Celsius-Temperatur ϑ wird dabei die „besondere Differenz“ zwischen einer beliebigen thermodynamischen Temperatur T in Kelvin und der Temperatur $T_0 = 273,15 \text{ K}$ bezeichnet, also

$$\vartheta = (T - T_0) = (T - 273,15). \quad (1.22)$$

Für die Differenz $\Delta\vartheta$ zweier Celsius-Temperaturen

$$\Delta\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2 = (T_1 - T_0) - (T_2 - T_0) = T_1 - T_2 = \Delta T \quad (1.23)$$

sind die Einheiten K und $^{\circ}\text{C}$ zulässig, obwohl die Temperaturdifferenz nicht im Sinne der obigen Definition auf die Temperatur T_0 bezogen ist.

Die zukünftige Darstellung der Einheit Kelvin kann vielleicht mit Hilfe der Boltzmannkonstante k erfolgen, dem Konversionsfaktor zwischen thermischer und mechanischer Energie.

Stoffmenge

Das Mol, Einheitenzeichen mol, ist die SI-Einheit der Stoffmenge. Ein Mol enthält genau $6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}$ Einzelteilchen. Diese Zahl entspricht dem für die Avogadro-Konstante N_A geltenden festen Zahlenwert, ausgedrückt in der Einheit mol^{-1} , und wird als Avogadro-Zahl bezeichnet.

Die Stoffmenge, Zeichen n , eines Systems ist ein Maß für eine Zahl spezifischer Einzelteilchen. Bei einem Einzelteilchen kann es sich um ein Atom, Molekül, ein Ion, ein Elektron, ein anderes Teilchen oder eine Gruppe von Teilchen mit genau angegebener Zusammensetzung handeln.

Diese Definition gibt N_A den Wert $6,022\,140\,76 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. Löst man diese Beziehung nach der Einheit mol auf, so ergibt sich:

$$1 \text{ mol} = \frac{6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}}{N_A} \quad (1.24)$$

Das heißt, ein Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das $6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}$ eines bestimmten Einzelteilchens enthält.

Lichtstärke

Die Candela, Einheitenzeichen cd, ist die SI-Einheit der Lichtstärke in einer bestimmten Richtung. Sie ist definiert, indem für das photometrische Strahlungsäquivalent K_{cd} der monochromatischen Strahlung der Frequenz $540 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$ der Zahlenwert 683 festgelegt wird, ausgedrückt in der Einheit lm W^{-1} , die gleich cd sr W^{-1} oder $\text{cd sr kg}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ s}^3$ ist, wobei das Kilogramm, der Meter und die Sekunde mittels h , c und $\Delta\nu$ definiert sind.

Diese Definition gibt K_{cd} den Wert $683 \text{ cd sr kg}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ s}^3$. Löst man diese Beziehung nach der Einheit cd auf, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} 1 \text{ cd} &= \left(\frac{K_{\text{cd}}}{683} \right) \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3} \text{ sr}^{-1} & (1.25) \\ &= \frac{1}{(6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}) \cdot (9\,192\,631\,770)^2 \cdot 683} (\Delta\nu)^2 h K_{\text{cd}} \\ &\approx 2,614\,830 \cdot 10^{10} (\Delta\nu)^2 h K_{\text{cd}} \end{aligned}$$

Das heißt, eine Candela ist die Lichtstärke (in eine bestimmte Raumrichtung) einer Strahlquelle, die mit der Frequenz von $540 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$ emittiert und die eine Strahlungsintensität in dieser Richtung von $1/683 \text{ W sr}^{-1}$ hat.

Der Steradian (sr) ist eine Maßeinheit für den Raumwinkel. Auf einer Kugel mit 1 m Radius umschließt ein Steradian eine Fläche von 1 m^2 auf der Kugeloberfläche.

1.2.9 Größen- und Zahlenwertgleichungen

Gleichungen beschreiben die Beziehungen zwischen physikalischen Größen. Sie heißen **Größengleichungen**, wenn sie ausschließlich aus den mit dem Zahlenfaktor 1 multiplizierten physikalischen Größen bestehen. So ergibt sich z. B. die in einem Verbraucher umgesetzte elektrische Energie E aus der anliegenden Spannung U , dem durchgehenden Strom I und der Zeit t zu

$$E = U I t. \quad (1.26)$$

Die physikalischen Gleichungen sind unabhängig von den Einheiten, in denen die Größen gemessen werden. Zweckmäßig werden nun die Einheiten so gewählt, dass für sie die gleichen Formeln wie für die Größen gelten. Dieses Ziel wird durch die Verwendung kohärenter Einheiten erreicht. Für unser Beispiel bedeutet dies, die elektrische Energie in Ws, die Spannung in V, die Stromstärke in A und die Zeit in s zu messen:

$$1 \text{ W s} = 1 \text{ V A s}. \quad (1.27)$$

Von den Größengleichungen werden die **Zahlenwertgleichungen** unterschieden. In ihnen werden nichtkohärente Einheiten verwendet und Zahlenwerte, Umrechnungsfaktoren, müssen berücksichtigt werden. Soll in unserem Beispiel die Energie in kWh ausgedrückt werden, so gilt die Zahlenwertgleichung

$$E \text{ (in kWh)} = 0,28 \cdot 10^{-6} \cdot U \text{ (in Volt)} \cdot I \text{ (in A)} \cdot t \text{ (in s)}. \quad (1.28)$$

Zahlenwertgleichungen führen oft zu Irrtümern und sollen deshalb vermieden werden. Da den Zahlenfaktoren ganz bestimmte Einheiten zu Grunde liegen, müssen diese Einheiten immer angegeben werden.

Auch bei Größengleichungen empfiehlt es sich, möglichst oft die Einheiten hinzuschreiben und zu überprüfen. Aus der Tatsache, dass auf jeder Seite einer Gleichung dieselben Einheiten stehen müssen, ergibt sich leicht eine Kontrolle der durchgeführten Rechnungen. Summen und Differenzen können nur von Größen mit gleichen Einheiten gebildet werden und als Exponenten oder als Argumente von Funktionen dürfen nur Zahlen, d. h. „dimensionslose“ Größen, auftreten.

1.3 Statisches Verhalten der Messgeräte; Kennlinie und Empfindlichkeit

Die messtechnischen Eigenschaften eines Geräts werden durch sein **statisches** und **dynamisches Verhalten** und durch seine **Unsicherheiten** charakterisiert. Diese Begriffe sollen im Folgenden etwas näher erläutert werden.

Der stationäre Zustand eines Messgeräts ist bei zeitlicher Konstanz aller Eingangsgrößen nach Ablauf aller Ausgleichsvorgänge erreicht. Für diesen Zustand beschreibt die **Kennlinie** die Abhängigkeit des Ausgangssignals x_a eines Messgeräts vom Eingangssignal x_e :

$$x_a = f(x_e). \quad (1.29)$$

Der Zusammenhang beider Größen wird oft als mathematischer Ausdruck, seltener in Form einer Wertetabelle angegeben. Aus der Kennlinie ergibt sich die **Empfindlichkeit E** , indem am Arbeitspunkt die beobachtete Änderung des Ausgangssignals durch die sie verursachende Änderung des Eingangssignals dividiert wird (Bild 1.6):

$$E = \frac{dx_a}{dx_e} \frac{\text{Einheit des Ausgangssignals}}{\text{Einheit des Eingangssignals}}. \quad (1.30)$$

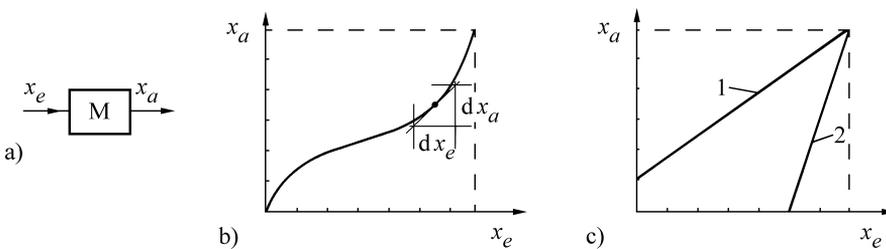


Bild 1.6 Messgeräte-Kennlinien: a) Blockschaltbild eines Messgeräts M mit Eingangssignal x_e und dem Ausgangssignal x_a , b) die Empfindlichkeit E ist der Differenzialquotient dx_a/dx_e am Arbeitspunkt, c) Kennlinie mit lebendem Nullpunkt (1) und unterdrücktem Nullpunkt (2)

Bei den Messgeräten, bei denen Ein- und Ausgangssignal gleichartige Größen sind (z. B. Ein- und Ausgangsspannung eines Verstärkers), kürzen sich die Einheiten heraus, und die Empfindlichkeit ist eine reine Zahl. Ist dies nicht der Fall, so sind die Einheiten stets mit anzugeben.

Ist die Kennlinie eine Gerade, so hat das Messgerät an allen Arbeitspunkten dieselbe konstante Empfindlichkeit $E = k$, die oft als Proportionalitäts- oder Übertragungsfaktor bezeichnet wird. Für eine durch den Nullpunkt gehende Kennlinie gilt:

$$x_a = k x_e. \quad (1.31)$$

Diese lineare Abhängigkeit zwischen Ausgangs- und Eingangssignal ist für die Darstellung und Weiterverarbeitung vorteilhaft. So werden zum Teil größere Anstrengungen unternommen, um bei Messgeräten eine konstante Empfindlichkeit zu erreichen.

Ersatz der Kennlinie durch ihre Tangente. Bei kleinen Messbereichen und bei geringeren Ansprüchen an die Genauigkeit kann die Kennlinie durch ihre Tangente angenähert werden. Hier entsteht die Aufgabe, die Gleichung der Tangente zu finden. Dazu wird der analytische

Ausdruck für die Kennlinie um den Arbeitspunkt in eine Taylorreihe entwickelt und diese wird nach dem linearen Glied abgebrochen.

Beispiel 1.1

Die Kennlinie eines Heißeleiters

$$R = K_0 e^{b/T} \quad (1.32)$$

ist in der Nähe des Arbeitspunktes T_1 durch eine Gerade zu ersetzen. Für eine beliebige Funktion $f(x)$ würde die entsprechende Reihenentwicklung um die Stelle x_1 im Abstand Δx lauten:

$$f(x_1 + \Delta x) = f(x_1) + \Delta x \cdot f'(x_1). \quad (1.33)$$

Übertragen auf unsere Aufgabenstellung ergibt sich:

$$R(T_1 + \Delta T) = R(T_1) + \Delta T \cdot R'(T_1). \quad (1.34)$$

Mit

$$R'(T_1) = \frac{dR(T_1)}{dT} = -\frac{b}{T_1^2} \cdot R(T_1) \quad \text{und} \quad -\frac{b}{T_1^2} = \alpha \quad (1.35)$$

geht diese Beziehung über in

$$R(T_1 + \Delta T) = R(T_1) + \Delta T \cdot \alpha \cdot R(T_1) = R(T_1) \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T), \quad (1.36)$$

womit die gestellte Aufgabe gelöst ist.

■

■ 1.4 Messfehler und Messunsicherheiten

Fehlerbetrachtung schon bei der Auslegung eines Messsystems. Schon bei der Auslegung eines Messsystems sollten die möglichen Einflüsse, Fehler und Unsicherheiten überlegt werden. Diese können in den Geräten eines Messsystems liegen, aber auch in dessen Struktur und nicht zuletzt bei den die Messungen durchführenden Personen. Selbstverständlich sollen die Messgeräte nur sachverständig und bestimmungsgemäß betrieben werden.

Da eine Messung stets mit einem Energie- oder Informationsfluss vom Messobjekt zum Messgerät verbunden ist, ist streng darauf zu achten, dass umgekehrt durch den Anschluss und den Einbau des Messgeräts die zu messende Größe nicht verändert wird (Bild 1.7).

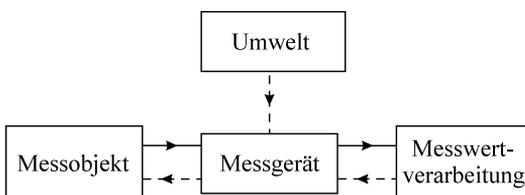


Bild 1.7 Eine Rückwirkung vom Messgerät auf das Messobjekt ist zu vermeiden. Das Messergebnis darf nicht durch die Umgebungsbedingungen, die Spannungsversorgung oder den Anschluss weiterer Geräte verfälscht werden.

Diese störende Rückwirkung des Messgeräts auf das Messobjekt kann z. B. bei einer Spannungs- oder Strommessung in einer zu starken Belastung der Quelle liegen. Bei einer Temperaturmessung kann durch den Temperaturfühler Wärme vom Messobjekt abgeleitet und dessen Temperatur erniedrigt werden. Im Prinzip sind solche Rückwirkungen bei jeder Messung gegeben. Sie sind sorgfältig zu analysieren und gering zu halten, da die dadurch entstehenden Fehler nicht immer quantitativ angegeben und korrigiert werden können.

Bezeichnungen, Nomenklatur. Bei einer Messung sollte der richtige, der „wahre“ Wert ermittelt werden. Dies ist unter realen Bedingungen nicht möglich. Die Messergebnisse können nur als **Schätzwerte** betrachtet werden, die mit **Unsicherheiten** behaftet sind. Zur Beschreibung dieses Sachverhalts werden die nachfolgenden Formelzeichen – eventuell mit Indices – verwendet:

- X: Eingangsgröße ,
- x: Eingangsmesswert, Eingangsschätzwert ,
- Y: Ausgangsgröße, Ergebnisgröße, $Y = f(X)$,
- y: Messergebnis, Ausgangsschätzwert ,
- u: Unsicherheit des Ausgangsschätzwerts.

Die Messunsicherheiten gehen auf **bekannte** und **nicht bekannte** Einflüsse zurück.

Bei den Fehlern durch bekannte, systematische Einflüsse sind die Messwerte zu korrigieren. Die unbekanntes Messabweichungen gliedern sich zusätzlich in unbekanntes zufällige und unbekanntes systematische Messabweichungen. Der 1993 veröffentlichte und zuletzt 2008 überarbeitete Leitfaden „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, GUM“ der Internationalen Organisation für Normung, ISO und des Internationalen Büros für Maß und Gewicht, IBMG, gibt ein Regelwerk vor, mit dem beide unbekanntes Messabweichungen in einer gemeinsamen Berechnung berücksichtigt werden können. Die unbekanntes Messabweichungen können nicht im Messwert berichtet werden. Hier ist die Unsicherheit $u(y)$ als ein Bereich anzugeben, in dem der Schätzwert y für die Ausgangsgröße Y mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit zu liegen kommt [1.32]–[1.41].

Aufgabe dieser „Unsicherheitsrechnung“ (früher „Fehlerrechnung“) ist, die Unsicherheiten quantitativ einzugrenzen. Dabei dürfen für Gebrauchsmessungen die Unsicherheiten im Prozent-Bereich liegen, während bei Messungen zur Rückführbarkeit, im Eichwesen oder gar bei dem Vergleich von Normalen die Unsicherheiten viele Größenordnungen geringer sein müssen.

1.4.1 Bekannte Einflüsse; Korrektur des bekannten Messfehlers

Bei **bekanntes** Einflüssen lässt sich die Wirkung auf den Messwert berechnen. Die Veränderung des Messwertes hat immer dieselbe Größe und dasselbe Vorzeichen. Sie lässt sich durch wiederholte Messungen nicht verringern. Die Veränderung Δx des Messwertes wird als „**bekanntes systematisches Fehler**“ Δx oder als „bekanntes systematische Abweichung“ Δx bezeichnet. Ist die Veränderung für einen bestimmten Messzweck zu groß, so muss sie berücksichtigt und der Messwert muss berichtet, korrigiert, werden:

$$x_{\text{kor}} = x - \Delta x = x \left(1 - \frac{\Delta x}{x} \right). \quad (1.37)$$

Δx ist der mit der Einheit angegebende absolute Fehler, $\Delta x/x$ ist der auf den Messwert bezogene relative Fehler.

Beispiel: Die Uhr ist um zwei Minuten vorgestellt. Um die richtige Zeit zu erhalten, muss die Abweichung $+\Delta x$ vom angezeigten Wert abgezogen werden.

Soll die Leerlaufspannung einer Spannungsquelle gemessen werden und fließt über den Spannungsmesser ein zu hoher Strom, so ist der Spannungsabfall am Innenwiderstand der Quelle zu berücksichtigen.

Fortpflanzung der bekannten Messfehler. Wir betrachten eine Größe y , die der direkten Messung nicht zugänglich, aber eine bekannte Funktion der messbaren und mit den Fehlern Δx_i behafteten Größen x_i ist. Die mathematische Beziehung zwischen den bei der Auswertung der Messungen beteiligten Größen wird als Modell (der Auswertung) bezeichnet. Die Ergebnisgröße y ist eine Funktion der Eingangsmesswerte x_i :

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.38)$$

Die Einzelfehler Δx_i führen zu einem Gesamtfehler Δy , der berechnet werden soll.

$$y + \Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n). \quad (1.39)$$

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.40)$$

Mit Hilfe der nach dem linearen Glied abgebrochenen Taylorreihe der Funktion $f(x + \Delta x)$

$$\begin{aligned} f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) \\ = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n \end{aligned} \quad (1.41)$$

lässt sich dann die Differenz Δy aus den partiellen Ableitungen und den als klein angenommenen Änderungen Δx_i berechnen:

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \quad \text{für } \Delta x_i \ll x_i. \quad (1.42)$$

In diese Gleichung sind die Einzelfehler Δx_i mit ihren Vorzeichen einzusetzen und die fehlerbehaftete Ergebnisgröße y ist entsprechend zu korrigieren.

Die Ableitungen $\partial f / \partial x_i$ geben dabei die Empfindlichkeiten für die Größen x_i an. Sie drücken aus, wie sehr die Fehler Δx_i das Messergebnis beeinflussen. Unabhängig von der Fehlerrechnung ist Gl. (1.42) damit auch für eine Empfindlichkeitsanalyse verwendbar.

Fall 1: Ist die zu berechnende Größe y eine Linearkombination der gemessenen Größen x_i ,

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n, \quad (1.43)$$

so wird nach Gl. (1.42)

$$\Delta y = a_1 \Delta x_1 + a_2 \Delta x_2 + \dots + a_n \Delta x_n. \quad (1.44)$$

Der absolute Gesamtfehler Δy ist also die Summe der mit den Koeffizienten a_i multiplizierten absoluten Einzelfehler Δx_i .

Fall 2: Sind zur Berechnung von y die gemessenen Größen zu multiplizieren,

$$y = a_1 x_1^{\alpha_1} \cdot a_2 x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_n x_n^{\alpha_n}, \quad (1.45)$$

so lässt sich einfacher mit relativen Fehlern rechnen. Die partielle Ableitung von y nach x_1 ist

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_1 a_1 x_1^{\alpha_1 - 1} \cdot a_2 x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot a_n x_n^{\alpha_n} = y \frac{\alpha_1}{x_1}. \quad (1.46)$$

Allgemein wird für die x_i erhalten:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = y \cdot \frac{\alpha_i}{x_i}, \quad (1.47)$$

so dass aus Gl. (1.42) folgt:

$$\Delta y = y \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\Delta x_i}{x_i} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\Delta x_i}{x_i}. \quad (1.48)$$

Der relative Gesamtfehler $\Delta y/y$ ergibt sich also als Summe der mit den Exponenten α_i multiplizierten relativen Einzelfehler $\Delta x_i/x_i$.

Beispiel 1.2

An einem Verbraucher wurden Messungen mit den folgenden relativen Fehlern durchgeführt:

$$\frac{\Delta U}{U} = -0,011; \quad \frac{\Delta I}{I} = 0,02; \quad \frac{\Delta R}{R} = -0,031. \quad (1.49)$$

Der relative Fehler der Verbraucherleistung P soll bestimmt werden. Mit dem Ansatz $P = U^2/R = U^2 R^{-1}$ wird

$$\frac{\Delta P}{P} = 2 \frac{\Delta U}{U} - 1 \frac{\Delta R}{R} = 2(-0,011) - (-0,031) = +0,009. \quad (1.50)$$

Die Leistung wurde also um 0,9% zu groß gemessen und der Messwert kann entsprechend berichtigt werden. Der Fehler von +0,009 ergibt sich auch, wenn die Leistung aus $P = U \cdot I$ oder $P = I^2 \cdot R$ berechnet wird.



1.4.2 Unbekannte, normalverteilte Unsicherheiten; eine einzige Messgröße X

Zufällige Unsicherheiten entstehen durch nicht erfassbare und nicht beeinflussbare Änderungen der Messgeräte, des Beobachters und der Umwelt. Der „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement GUM“ [1.32] bezeichnet diese Art von Unsicherheiten als „Unsicherheiten vom Typ A“. Größe und Vorzeichen der Auswirkungen können nicht angegeben werden. Die wiederholte Messung ein und derselben Messgröße ergibt unterschiedliche, streuende Messwerte. In diesen Fällen werden der Mittelwert und die Varianz der Messwerte gebildet [1.39, 1.40]. Der Mittelwert wird dann als Maß für den Messwert und die Standardabweichung des Mittelwertes wird als Maß für die Unsicherheit genommen. Im Folgenden wird auf die wichtigen normalverteilten Zufallsfehler näher eingegangen.

Mittelwert beim mehrmaligen Messen derselben Messgröße. Oft ist die zufällige unbekannt Komponente in den Messwerten **normalverteilt** (Bild 1.8). Dies ist immer dann der Fall, wenn genügend viele und voneinander unabhängige Einflussgrößen wirksam sind und wenn genügend viele Einzelmessungen durchgeführt sind. Der **Mittelwert** \bar{x} aus den N Messwerten ergibt sich zu

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \text{für } N < \infty. \quad (1.51)$$

Er wird als Schätzwert für den wahren Wert genommen, der sich aus unendlich vielen Einzelmessungen ergeben würde. Er hat die Eigenschaft, dass die Summe der linearen Abweichungen zu Null und die der quadratischen Abweichungen zu einem Minimum wird:

$$\sum (x_i - \bar{x}) = 0, \quad (1.52)$$

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = \text{Minimum}. \quad (1.53)$$

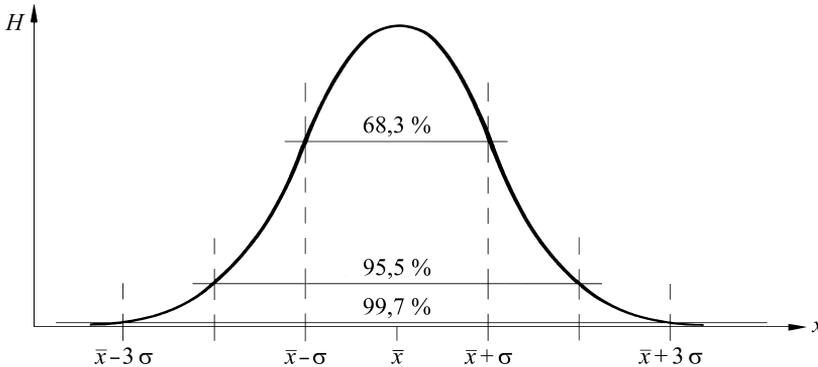


Bild 1.8 Häufigkeit H für unendlich viele Messwerte x mit der Standardabweichung σ ; bei dieser Normalverteilung liegen 68,3% der Messwerte innerhalb des Bereichs $\bar{x} \pm \sigma$

Varianz und Standardabweichung der Grundgesamtheit, der Einzelmesswerte. Da nicht unendlich viele Messwerte vorliegen, kann nur mit der empirischen Varianz und der empirischen Standardabweichung gerechnet werden. Dabei wird in der täglichen Praxis das Adjektiv „empirisch“ oft weggelassen. Als Maß für die Streuung der Messwerte dient die **empirische Varianz** s^2 . Sie ist eine Funktion der Einzelmesswerte x_i und ihrer Zahl N . Als Formelzeichen für die Varianz der Einzelmesswerte wird $s^2(x_i)$ benutzt, um sie von der Varianz eines Mittelwerts $s^2(\bar{x})$ unterscheiden zu können.

$$s^2(x_i) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2. \quad (1.54)$$

Die positive Quadratwurzel $s(x_i)$

$$s(x_i) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \quad (1.55)$$

wird als **empirische Standardabweichung der Einzelmesswerte x_i** bezeichnet. Die Gleichungen zeigen, dass bei einer einzigen Messung, $N = 1$, sich weder ein Mittelwert noch eine Varianz berechnen lassen.

Die Standardabweichung $s(x_i)$ wird als Standardunsicherheit $u(x_i)$ der Einzelmesswerte x_i definiert:

$$s(x_i) = u(x_i). \quad (1.56)$$

Wird der Unsicherheitsbereich mit einem Faktor a erweitert, so steigt die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert sich in diesem Bereich befindet. Bei normalverteilten Messwerten liegen

- für $a = 1$: 68,3 % der Messwerte im Bereich $\bar{x} \pm 1 \cdot u(x_i)$,
- für $a = 2$: 95,5 % der Messwerte im Bereich $\bar{x} \pm 2 \cdot u(x_i)$,
- für $a = 3$: 99,7 % der Messwerte im Bereich $\bar{x} \pm 3 \cdot u(x_i)$.

Experiment

Wir überlegen folgendes Experiment: Der Zufalls-Zahlengenerator des Rechners soll normalverteilte (Mess)werte liefern. Vorgegeben werden der Mittelwert $\bar{x} = 100$ und die Standardabweichung $s(x_i) = 2,1$.

Zunächst werden 200 Werte „gewürfelt“ (Bild 1.9 a). Diese Stichprobe mit $N = 200$ Elementen hat den Mittelwert $\bar{x}_{200} = 99,99$ und die Standardabweichung $s = 2,08$.

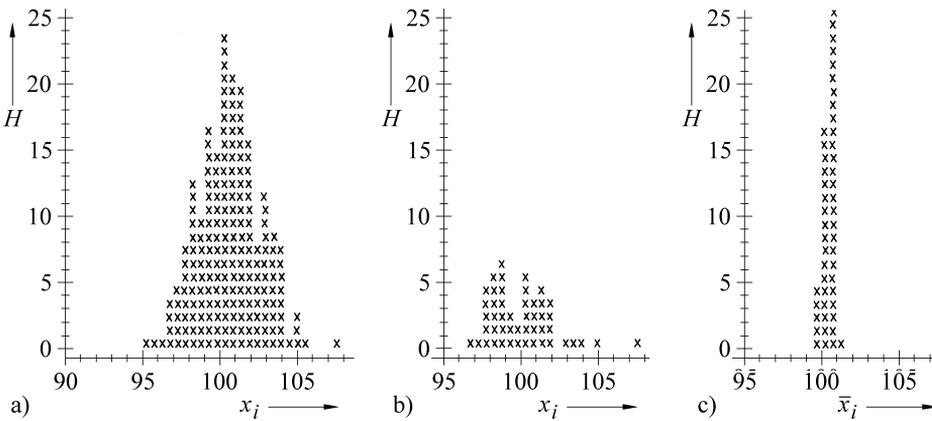


Bild 1.9 Normalverteilte Mittelwerte, die aus einem Zufallsgenerator gewonnen sind, mit den Sollwerten $\bar{x} = 100$ und $s(x_i) = 2,1$

- a) Stichprobe mit $N = 200$ Elementen; $\bar{x}_i = 99,99$; $s_i(x_i) = 2,08$
- b) Stichprobe mit $N = 49$ Elementen; $\bar{x}_i = 99,48$; $s_i(x_i) = 2,06$
- c) Verteilung der M Stichprobenmittelwerte \bar{x}_i ; $\bar{\bar{x}} = 99,98$; $s(\bar{x}_i) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{N}} = \frac{2,1}{\sqrt{49}} = 0,3$

Nun werden Stichproben mit je $N = 49$ Elementen gezogen. Die erste Stichprobe ist in Bild 1.9 b dargestellt. Sie hat den Mittelwert $\bar{x}_{49} = 99,48$ und die Standardabweichung $s(x_i) = 2,06$. Das ist also die Standardabweichung der gesamten Stichprobe, 2,08 ist ungefähr gleich 2,06. Dieses Spiel wird fortgesetzt, bis insgesamt M Messreihen (Stichproben) mit jeweils N Messwerten (Elementen der Stichprobe) vorliegen. Damit sind die Mittelwerte \bar{x}_1 bis \bar{x}_M (Bild 1.9 c) und die Standardabweichungen s_1 bis s_M bekannt. Aus ihnen lassen sich der **Mittelwert $\bar{\bar{x}}$ der Mittelwerte**

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \bar{x}_i \tag{1.57}$$

und eine gemittelte **Standardabweichung $\bar{s}(x_i)$ der Einzelwerte** berechnen mit

$$\bar{s}(x_i) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M s_i \tag{1.58}$$

Standardabweichungen der Stichproben-Mittelwerte; Vertrauensbereich für den Stichproben-Mittelwert

Die gemittelte Standardabweichung der **Einzelmesswerte** von Gl. (1.58) ist **nicht** die Standardabweichung der **Mittelwerte**. Bild 1.9 c vermittelt schon den Eindruck, dass die Mittelwerte enger beieinander liegen als die Einzelwerte. Die Standardabweichung $s(\bar{x}_i)$ der Mittelwerte ist wichtig, da mit ihrer Hilfe ein gefundener Mittelwert eingegrenzt werden kann. Sie erlaubt, die Messunsicherheit des Mittelwertes anzugeben. Sie lässt sich leider noch nicht mit den bis jetzt angegebenen Formeln herleiten. So wird hier zunächst das Ergebnis mitgeteilt und die Herleitung wird später mit dem Gesetz der Fehlerfortpflanzung nach Gauß (Gln. (1.81) und (1.88)) nachgeholt.

Varianz und Unsicherheit eines Mittelwertes. Die Standardabweichung $s(\bar{x}_i)$ der Mittelwerte hängt von der Standardabweichung $s(x_i)$ der Einzelwerte und von der Zahl N der in die Stichprobe eingegangenen Messwerte ab:

$$s(\bar{x}_i) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{N}}. \quad (1.59)$$

Die Standardabweichung $s(\bar{x}_i)$ der Mittelwerte ist um $1/\sqrt{N}$ kleiner als die der Einzelwerte. Die Überlegungen von Bild 1.9 dienen zur Veranschaulichung. In der Praxis wird aus sehr vielen möglichen Messungen nur eine „Stichprobe“ von N Messwerten x_i gezogen. Aus diesen x_i wird ein einziger Mittelwert \bar{x} (ohne Index) berechnet. Dieser Mittelwert hat nach Gl. (1.59) die Standardabweichung $s(\bar{x})$

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{N}}. \quad (1.60)$$

Die Standardabweichung $s(\bar{x})$ wird als Maß für die Unsicherheit $u(\bar{x})$ des Mittelwertes – wieder bei einer Wahrscheinlichkeit von 68,3 % – genommen:

$$u(\bar{x}) = s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (1.61)$$

Die Unsicherheit des Mittelwertes ist die Standardabweichung des Mittelwertes $s(\bar{x})$ und nicht die der Einzelmesswerte $s(x_i)$.

Das Messergebnis y wird in Form des Mittelwertes \bar{x} und seiner Unsicherheit angegeben:

$$y = \bar{x} \pm u(\bar{x}) = \bar{x} \pm a \frac{s(x_i)}{\sqrt{N}} = \bar{x} \left(1 \pm \frac{a s(x_i)}{\bar{x} \sqrt{N}} \right), \quad (1.62)$$

wobei der Faktor a entsprechend der gewünschten Aussagewahrscheinlichkeit gewählt wird. Die rein zufälligen Fehler können im Gegensatz zu den systematischen Fehlern nicht korrigiert werden. Es ist nur möglich, durch eine hinreichend große Zahl N von Messungen die Unsicherheit des Messwertes einzuengen.

Beispiel 1.3

Die Vorgehensweise bei der Behandlung zufälliger Messunsicherheiten soll anhand der in Tabelle 1.5 angegebenen Messreihe verdeutlicht werden.

Aus den angegebenen Daten errechnen sich die folgenden Werte:

Mittelwert \bar{x} :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{65 \text{ V}}{10} = 6,5 \text{ V.} \quad (1.63)$$

Standardabweichung $s(x_i)$; Unsicherheit der Einzelmessung:

$$s^2(x_i) = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N - 1} \text{ V}^2; \quad s(x_i) = 0,15 \text{ V.} \quad (1.64)$$

Tabelle 1.5 Messwerte des Beispiels zur Messunsicherheit

i	Messwert x_i in V	$(x_i - \bar{x})^2$ in V^2
1	6,7	0,04
2	6,4	0,01
3	6,3	0,04
4	6,6	0,01
5	6,5	0,00
6	6,7	0,04
7	6,5	0,00
8	6,3	0,04
9	6,6	0,01
10	6,4	0,01
Summe	65,0	0,20

Die Unsicherheit des Mittelwertes ist die Standardabweichung $s(\bar{x})$ des Mittelwertes:

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{N}} = \frac{0,15 \text{ V}}{\sqrt{10}} = 0,047 \text{ V.} \quad (1.65)$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3 % liegt der Schätzwert der Spannung im Bereich

$$y = \bar{x} \pm \frac{s(x_i)}{\sqrt{N}} = (6,5 \pm 0,047) \text{ V.} \quad (1.66)$$

■

1.4.3 Unbekannte, normalverteilte Unsicherheiten; verknüpfte Messgrößen $Y = f(X_i)$

Betrachtet wird eine Größe, deren Messergebnis y sich aus den der Messung zugänglichen Werten x_1, x_2, \dots, x_n errechnet:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.67)$$

Da Zufallseinflüsse vorliegen, wurde jede der Größen $x_1 \dots x_n$ wiederholt gemessen und die Mittelwerte $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n$ und die Standardabweichungen $s_1(x_i) \dots s_n(x_i)$ wurden ermittelt. Im Prinzip lassen sich viele y_i -Werte aus den x_{ij} -Werten berechnen. Die y_i -Werte bilden eine Verteilung und die Aufgabe ist, eine Rechenvorschrift zur Bestimmung des Mittelwertes \bar{y} und der empirischen Standardabweichung $s(\bar{y})$ dieses Mittelwertes zu finden.

Die gesuchten Beziehungen werden im Folgenden ohne Einschränkung der Allgemeinheit für eine Größe y hergeleitet, die von zwei gemessenen Größen x_1 und x_2 abhängt.

Mittelwert \bar{y} . Die Größe x_1 ist N -mal gemessen. Ein beliebiger Wert x_{1i} weicht vom zugehörigen Mittelwert \bar{x}_1 um Δx_{1i} ab:

$$\Delta x_{1i} = x_{1i} - \bar{x}_1 \quad \text{mit} \quad \bar{x}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{1i}. \quad (1.68)$$

Dieselben Beziehungen gelten für die insgesamt N Messwerte x_{2i} ¹⁾:

$$\Delta x_{2i} = x_{2i} - \bar{x}_2 \quad \text{mit} \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{2i}. \quad (1.69)$$

Für ein Messwertepaar x_{1i} und x_{2i} ergibt sich y_i zu

$$y_i = f(x_{1i}, x_{2i}) = f(\bar{x}_1 + \Delta x_{1i}, \bar{x}_2 + \Delta x_{2i}) \quad (1.70)$$

oder indem $f(x_{1i}, x_{2i})$ durch die zugehörige, nach dem ersten Glied abgebrochene Taylorreihe ersetzt wird:

$$y_i = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} \Delta x_{1i} + \frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2} \Delta x_{2i}. \quad (1.71)$$

Der Mittelwert \bar{y} der y_i wird dann

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} \Delta x_{1i} + \frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2} \Delta x_{2i} \right] \\ &= f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{1}{N} \frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} \sum_{i=1}^N \Delta x_{1i} + \frac{1}{N} \frac{\partial f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial x_2} \sum_{i=1}^N \Delta x_{2i} \\ &= f(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \end{aligned} \quad (1.72)$$

da gemäß der Definition des Mittelwertes die Summen der Abweichungen $\sum \Delta x_{1i}$ und $\sum \Delta x_{2i}$ zu null werden.

Für den allgemeinen Fall wird Mittelwert \bar{y} erhalten, indem in die Formel für $f(x_i, \dots, x_n)$ die Mittelwerte \bar{x}_i eingesetzt werden:

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n). \quad (1.73)$$

Standardabweichung der Grundgesamtheit der einzelnen Messergebnisse y . Die Varianz $s^2(y)$ der Ausgangsschätzwerte wird analog zu Gl. (1.54) definiert zu

$$s^2(y) = \frac{1}{(N-1)} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2. \quad (1.74)$$

¹⁾ Genau genommen sollte die Größe x_2 mit dem Index x_{2j} versehen werden. Aus den Messwertpaaren x_{1i} und x_{2j} lassen sich dann viele Ergebnisse y_{ij} erhalten. Im folgendem werden die Formeln für $i = j$ abgeleitet. Damit reduzieren sich die möglichen y -Werte von y_{ij} auf $y_{ii} = y_i$. Das scheint im Rahmen dieses Buches erlaubt, da

- a) der Gedankengang für die Ableitung der Formeln erhalten bleibt und
- b) die Ableitungen lesbarer werden und einfacher zu schreiben sind.

Die Herleitungen ohne diese Vernachlässigungen sind in früheren Auflagen des vorliegenden Buches nachzulesen. Das Endergebnis von Gl. (1.80) und Gl. (1.81) ist natürlich korrekt.

Der Ausdruck unter dem Summenzeichen lässt sich mit Gl. (1.71) und Gl. (1.73) wie folgt umformen:

$$y_i - \bar{y} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_{1i} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_{2i}, \quad (1.75)$$

$$(y_i - \bar{y})^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_{1i} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_{2i} \right)^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_{1i} \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_{2i}, \quad (1.76)$$

$$\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_{1i} \right)^2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_{2i} \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_{1i} \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_{2i}. \quad (1.77)$$

Bei unabhängigen Zufallsgrößen, die hier vorausgesetzt werden, sind die Summen über Δx_{1i} und Δx_{2i} null. Der letzte Term auf der rechten Seite, auf den im Abschnitt 1.4.6 noch zurückgekommen wird, darf hier vernachlässigt werden und es bleibt übrig:

$$\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \sum_{i=1}^N \Delta x_{1i}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \sum_{i=1}^N \Delta x_{2i}^2. \quad (1.78)$$

Die Summen der Differenzen $\Delta(x_{1i})$ und $\Delta(x_{2i})$ werden nun durch die zugehörigen Varianzen $s^2(x_{1i})$ und $s^2(x_{2i})$ ausgedrückt. Für die Varianz $s^2(x_{1i})$ gilt z. B.:

$$s^2(x_{1i}) = \frac{\sum_{i=1}^N (x_{1i} - \bar{x}_1)^2}{N-1} = \frac{\sum_{i=1}^N (\Delta x_{1i}^2)}{N-1}. \quad (1.79)$$

Die Varianz der Variablen x_{2i} berechnet sich entsprechend.

Wird nun G. (1.78) durch $(N-1)$ dividiert, so wird auf der linken Seite die Varianz der y_i -Werte erhalten:

$$\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{N-1} = s^2(y_i).$$

Auf der rechten Seite stehen dann die Varianzen $s^2(x_{1i})$ und $s^2(x_{2i})$ nach Gl. (1.79). Damit geht Gl. (1.78) über in das Gesetz der Fehlerfortpflanzung von C. F. Gauß aus dem Jahre 1821:

$$s^2(y_i) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_{1i}} \right)^2 s^2(x_{1i}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_{2i}} \right)^2 s^2(x_{2i}). \quad (1.80)$$

Für den allgemeinen Fall mit mehr als zwei Eingangsgrößen ist Gl. (1.80) entsprechend zu erweitern:

$$s^2(y_i) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_{1i}} \right)^2 s^2(x_{1i}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_{2i}} \right)^2 s^2(x_{2i}) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_{Ni}} \right)^2 s^2(x_{Ni}). \quad (1.81)$$

Fehlerrechnung nach C. F. Gauß. Aus Gl. (1.80) ergibt sich die gesuchte empirische Standardabweichung der y_i -Werte, indem die empirischen Standardabweichungen der Eingangswerte x_{1i} und x_{2i} mit den partiellen Ableitungen der Funktion $y_i = f(x_{1i}, x_{2i})$ multipliziert und geometrisch addiert werden.

Standardabweichung und Unsicherheit des Mittelwerts. Das Gesetz der Fehlerfortpflanzung hilft, die Varianz $s^2(\bar{y})$ des Mittelwerts der y_i -Werte zu berechnen. Ausgegangen wird von der Definition des Mittelwerts:

$$\bar{y} = f(\bar{y}) = \frac{1}{N} (y_1 + y_2 + \dots + y_N). \quad (1.82)$$

Diese Funktion hat die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{1}{N}. \quad (1.83)$$

Mit den Varianzen $s^2(y_i)$ nach Gl. (1.83) folgt aus Gl. (1.81)

$$s^2(\bar{y}) = \left(\frac{1}{N}\right)^2 \left(s^2(y_1) + s^2(y_2) + \dots + s^2(y_N)\right). \quad (1.84)$$

Hier sind die Varianzen $s^2(y_i)$ alle gleich, da sie alle aus den gleichen Eingangswerten gebildet sind. Damit ergibt sich die Varianz des Mittelwerts zu

$$s^2(\bar{y}) = \left(\frac{1}{N}\right)^2 N s^2(y_i) = \frac{s^2(y_i)}{N}. \quad (1.85)$$

Ein Mittelwert streut weniger als die Einzelmesswerte.

Ist nur eine Messgröße vorhanden, so kann in den vorausgegangenen Rechnungen die Größe y durch die Größe x ersetzt werden und mit

$$s^2(\bar{x}) = \frac{s^2(x_i)}{N} \quad (1.86)$$

wird die schon in Gl. (1.60) vorweggenommene Beziehung erhalten.

Der GUM bezeichnet die Standardunsicherheit des Mittelwerts als „kombinatorische Unsicherheit“ u_c , da y eine Funktion der x_i ist

$$u_c(\bar{y}) = s(\bar{y}). \quad (1.87)$$

Das Messergebnis wird angegeben mit

$$y = \bar{y} \pm u_c. \quad (1.88)$$

Es liest sich mit den Begriffen des GUM ungefähr so: Das Messergebnis y ist ein Schätzwert für die Ausgangsgröße Y . Mit einer Wahrscheinlichkeit von 68 % liegt der Y -Wert im Bereich $\bar{y} \pm u_c$.

Beispiel 1.4

Eine Komponente wird automatisch abgefüllt. Bekannt ist das mittlere Gewicht $\bar{g}_1 = 80$ g der Verpackung mit der zugehörigen Standardabweichung $s_1 = 5$ g. Gewogen wird jeweils während des Füllens. Das Gesamtgewicht g_3 von Inhalt und Verpackung ist im Mittel $\bar{g}_3 = 600$ g mit der Standardabweichung $s_3 = 9$ g. Zu bestimmen sind der Mittelwert und die Standardabweichung der Einwaage $g_2 = g_3 - g_1$. Der Mittelwert \bar{g}_2 errechnet sich nach Gl. (1.75) zu

$$\bar{g}_2 = \bar{g}_3 - \bar{g}_1 = (600 - 80) \text{ g} = 520 \text{ g}; \quad (1.89)$$

die Standardabweichung ist

$$\begin{aligned} s_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial g_2}{\partial g_3}\right)^2 s_3^2 + \left(\frac{\partial g_2}{\partial g_1}\right)^2 s_1^2} \text{ g} \\ &= \sqrt{1^2 \cdot 9^2 + (-1)^2 \cdot 5^2} \text{ g} = \sqrt{81 + 25} \text{ g} = 10,3 \text{ g}. \end{aligned} \quad (1.90)$$

Bei normalverteilten Gewichten haben 95 von 100 Packungen also einen Inhalt von $520 \text{ g} \pm 2 s_2 = (520 \pm 20,6) \text{ g}$.

