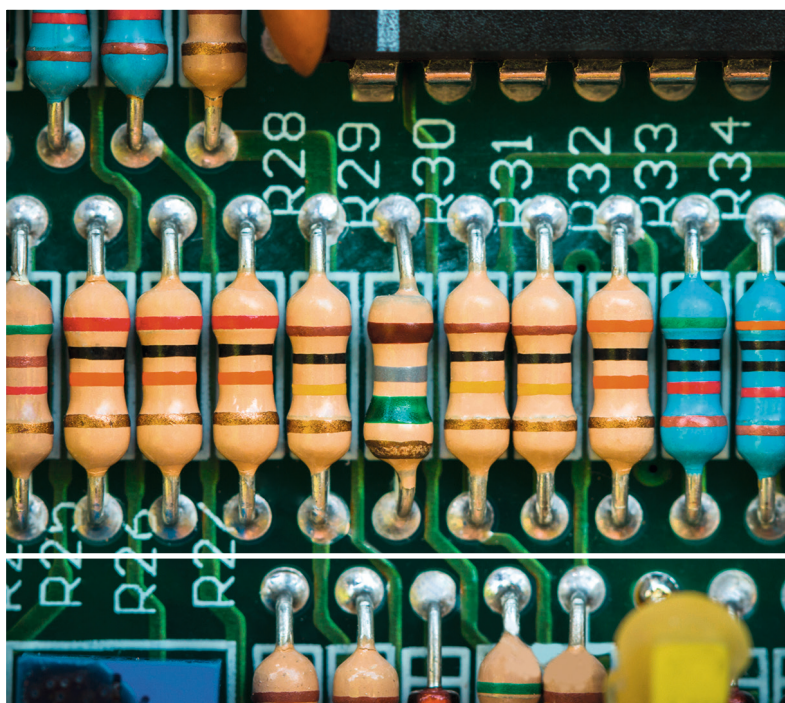


Rainer Ose



Elektrotechnik für Ingenieure Grundlagen



6., überarbeitete und erweiterte Auflage

HANSER

Formelzeichenverzeichnis

A	Dämpfung, Fläche, Kettenparameter	n	Ladungsträgerkonzentration
A_0, A_n	FOURIER-Koeffizient	P	Leistung, Wirkleistung
\underline{a}	Phasenoperator	p	Leistungsdichte
B	Bandbreite, Blindleitwert, magnetische Flussdichte	Q	Blindleistung, Güte, elektrische Ladung
B_n	FOURIER-Koeffizient	R	elektrischer Widerstand
B_r	Remanenzflussdichte	R_a	Lastwiderstand
C	elektrische Kapazität	R_i	Innenwiderstand
D	elektrische Flussdichte, Diffusionskoeffizient	R_m	magnetischer Widerstand
d	Dicke, Abstand, Verlustfaktor	r	differenzieller Widerstand, Radius
E	elektrische Feldstärke	S	Scheinleistung, (Stromdichte)
e_0	Elementarladung	\underline{S}	komplexe Leistung
F	Kraft	s	Bogenlänge, Schrittlänge
F_C	COULOMB-Kraft	T	KELVIN-Temperatur, Periodendauer
F_L	LORENTZ-Kraft	t	Zeit
f	Frequenz	t_H	Halbwertszeit
f_0	Resonanzfrequenz	U	elektrische Spannung
f_g	Grenzfrequenz	U_H	HALL-Spannung
G	elektrischer Leitwert	U_k	Klemmenspannung
H	magnetische Feldstärke	U_L	Leerlaufspannung, Leiterspannung
H_c	Koerzitivfeldstärke	U_S	Schleusenspannung, Strangspannung
h	Höhe, Eingrabbtiefe	U_s	Schrittspannung
I	elektrische Stromstärke	U_z	Z-Spannung
I_D	Diffusionsstrom	U_q	Quellenspannung
I_F	Feldstrom	u	zeitlich veränderliche Spannung
I_K	Kurzschlussstrom	u_{ind}	Selbstinduktionsspannung
I_k	Konvektionsstrom	u_M	Gegeninduktionsspannung
I_L	Leiterstrom	\ddot{u}	Übersetzungsverhältnis
I_S	Sättigungsstrom, Strangstrom	V	Volumen
I_V	Verschiebungsstrom	v	Geschwindigkeit
i	zeitlich veränderlicher Strom	W	Energie, Arbeit
J	elektrische Stromdichte	W_{el}	elektrische Energie
K_H	HALL-Konstante	W_m	magnetische Energie
k	Klirrfaktor, Kopplungsfaktor	X	Blindwiderstand
L	Induktivität	Y	Scheinleitwert
l	Länge	\underline{Y}	komplexer Leitwert
M	Gegeninduktivität	Z	Scheinwiderstand
N	Windungszahl	\underline{Z}	komplexer Widerstand

**Ihr Plus – digitale Zusatzinhalte!**

Auf unserem Download-Portal finden Sie zu diesem Titel kostenloses Zusatzmaterial. Geben Sie dazu einfach diesen Code ein:

plus-g381q-ew8t2

plus.hanser-fachbuch.de

**Bleiben Sie auf dem Laufenden!**

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Rainer Ose

Elektrotechnik für Ingenieure

Grundlagen

6., überarbeitete und erweiterte Auflage

HANSER

Autor:

Prof. Dr.-Ing. Rainer Ose, Ostfalia Hochschule für angewandte Wissenschaften, Wolfenbüttel,
Fakultät Elektrotechnik



Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor(en, Herausgeber) und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht.

Ebenso wenig übernehmen Autor(en, Herausgeber) und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2020 Carl Hanser Verlag München

Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg

Herstellung: Anne Kurth

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München

Titelbild: Titelmotiv: © shutterstock.com/wisawa222

Satz: Rainer Ose

Druck und Bindung: Friedrich Pustet GmbH & Co. KG, Regensburg

Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-46408-7

E-Book-ISBN 978-3-446-46535-0

Vorwort zur 6. Auflage

Das vorliegende Lehrbuch gliedert sich in die drei klassischen Grundlagenbereiche: Gleichstromlehre – Wechselstromtechnik – Elektrische und magnetische Felder.

Es ist als studienbegleitendes Material für Studierende aller technischen Studienrichtungen an Hochschulen/Fachhochschulen konzipiert. Im Vordergrund stehen Betrachtungen zu Vorgängen in elektrischen Stromkreisen aus der Sicht der Schaltungstechnik. Damit wird das Ziel verfolgt, das in den Vorlesungen „Grundlagen der Elektrotechnik“ vermittelte Grundlagenwissen in anwendungsbereiter Form für die nachfolgenden Lehrveranstaltungen bereitzustellen.

Die theoretischen Grundlagen werden zu jedem Kapitel so dargelegt, dass die Studierenden die Vorlesungsmitschrift und den eventuell versäumten Stoff in effektiver Form selbstständig aufarbeiten können. Dazu dienen u.a. Modelle und Analogien, die komplizierte Sachverhalte in möglichst einfacher und leicht verständlicher Form darlegen sollen. Zur Erhöhung der Anschaulichkeit wurden viele Aussagen zusätzlich aus Diagrammen, Prinzipskizzen und Ersatzschaltungen abgeleitet.

In jedem Kapitel befinden sich Lehrbeispiele zur Erklärung typischer Erscheinungen der Elektrotechnik sowie zur Demonstration von Berechnungsmethoden und -verfahren. Soweit sie nicht die Größenordnung eines dargelegten Sachverhalts verdeutlichen sollen, sind diese Lehrbeispiele in allgemeiner Form ausgeführt. Damit gelingt es den Anwendern, den Lösungsweg schrittweise nachzuvollziehen.

Die 6. Auflage entstand durch eine vollständige Überarbeitung und Erweiterung der 5. Auflage des Lehrbuchs. Alle Berechnungsbeispiele befinden sich jetzt in erweiterter Form in einem neu aufgelegten Übungsbuch. Die 6. Auflage enthält einen Anhang mit Übungsaufgaben und eine separate Formelsammlung. Alle Lösungen der Übungsaufgaben sind über das Internet zugänglich.

Wolfenbüttel, im August 2020

Rainer Ose
e-mail: r.ose@ostfalia.de

Hinweise zur Arbeit mit diesem Buch

Das vorliegende Lehrbuch sollte in Kombination mit dem Übungsbuch bearbeitet werden. Aus diesem Grund wurden zahlreiche Lehrbeispiele in das Lehrbuch und zusätzliche Übungsanteile in das neue Übungsbuch eingearbeitet. Machen Sie sich zunächst mit den theoretischen Grundlagen vertraut. Parallel dazu können Sie die Lehrbeispiele (Lehrbuch) und die Berechnungsbeispiele (Übungsbuch) durcharbeiten. Diese Beispiele tragen zur Erhöhung des Verständnisses für die betrachteten Stoffgebiete bei. Das gilt auch für die selbstständige Bearbeitung der Übungsaufgaben im Anhang.

• Lehrbeispiele:

Lehrbeispiele dienen dazu, das grundlegende Verständnis für den jeweils dargelegten Sachverhalt an einem einfachen und überschaubaren Beispiel zu entwickeln bzw. zu festigen. Sie werden im laufenden Text an den Stellen eingefügt, an denen es eventuell zusätzlichen Erklärungsbedarf gibt. Dazu zählen das Aufstellen allgemeiner Lösungsansätze und die Durchführung einfacher Berechnungen sowie die Vermittlung von Vorstellungen über ausgewählte Erscheinungen der Elektrotechnik.

• Übungsaufgaben: (Lösungen: https://www.ostfalia.de/cms/de/pws/ose/Buch_ET_6A/)

Im Anhang des Buches befinden sich Übungsaufgaben. Sie sollen von dem Studierenden möglichst selbstständig abgearbeitet werden. Übungsaufgaben werden im Sinne einer zielgerichteten Prüfungsvorbereitung mit der folgenden Kennzeichnung dem jeweiligen Grundlagenbereich zugeordnet:

ÜA_1 = Gleichstromlehre, ÜA_2 = Wechselstromtechnik und ÜA_3 = Felder.

Die meisten Beispiele und Übungsaufgaben können mit Simulationsprogrammen nachvollzogen werden. Entsprechende Hinweise zur Arbeit mit PSpice findet man bei Bedarf in [11] – Kap. 1.

Inhaltsverzeichnis

I Gleichstromlehre

1	Elektrische Grundgrößen	12
1.1	Elektrische Ladung	12
1.2	Elektrische Stromstärke	13
1.3	Elektrische Spannung	16
1.4	Elektrischer Gleichstromkreis	17
1.5	Widerstände im elektrischen Stromkreis	20
1.5.1	Bemessungsgleichung	20
1.5.2	Temperaturabhängigkeit	21
1.5.3	Technische Ausführungsformen	22
2	Gesetze zur Berechnung elektrischer Stromkreise	23
2.1	Das OHMSche Gesetz	23
2.2	Die KIRCHHOFFschen Sätze	26
2.2.1	Maschensatz	26
2.2.2	Knotenpunktsatz	27
2.3	Energiesatz	28
3	Lineare elektrische Gleichstromkreise	31
3.1	Eigenschaften elektrischer Stromkreise	31
3.2	Regeln zur Berechnung passiver Zweipole	33
3.2.1	Reihenschaltung und Spannungsteilerregel	33
3.2.2	Parallelschaltung und Stromteilerregel	35
3.3	Berechnung passiver Zweipole	38
3.4	Elektrische Quellen	40
3.5	Lastfälle im Grundstromkreis	44
3.5.1	Leistung und Wirkungsgrad	44
3.5.2	Anpassungsfall	45
3.5.3	Diskussion von Lastfällen	47
3.5.4	Belasteter Spannungsteiler	49
4	Grundschaltungen der elektrischen Messtechnik	52
4.1	Messbereichserweiterung	52
4.2	Aufnahme von Kennlinien	54
4.2.1	Stromrichtige Messung	54
4.2.2	Spannungsrichtige Messung	55
4.3	Messgeräte mit Nullindikator	56
4.4	Allgemeine Berechnung von Brückenschaltungen	59
4.4.1	Allgemeine Umrechnung in eine Sternschaltung	59

4.4.2	Dreieck-Stern-Transformation	61
4.4.3	Stern-Dreieck-Transformation	63
5	Verfahren zur Berechnung linearer Netzwerke	65
5.1	Netzwerkberechnung nach KIRCHHOFF	65
5.2	Der HELMHOLTZsche Überlagerungssatz	68
5.3	Zweipoltheorie	70
5.3.1	Spannungsquellen-Ersatzschaltung	71
5.3.2	Stromquellen-Ersatzschaltung	73
5.4	Analyseverfahren	76
5.4.1	Umlaufanalyse	76
5.4.2	Knotenanalyse	80
6	Stromkreise mit nichtlinearen Bauelementen	84
6.1	Strom-Spannungs-Kennlinie	84
6.2	Ausgewählte Kennlinien nichtlinearer Bauelemente	85
6.3	Konstruktion von Ersatz-Kennlinien	89
6.3.1	Ersatz-Kennlinien von Elementarschaltungen	89
6.3.2	Idealisierte Kennlinien und Ersatzschaltungen	90
6.4	Grafische Bestimmung des Arbeitspunktes	91
II	Wechselstromtechnik	
7	Beschreibung von Wechselgrößen	94
7.1	Periodische Zeitfunktionen	94
7.2	Sinusförmige Zeitfunktionen	95
7.3	Mittelwerte periodischer Zeitfunktionen	97
7.3.1	Arithmetischer Mittelwert	97
7.3.2	Gleichrichtwert	97
7.3.3	Effektivwert	99
7.4	Überlagerung sinusförmiger Zeitfunktionen	101
8	Widerstände im Wechselstromkreis	106
8.1	Elementare Zweipole	106
8.1.1	Ohmscher Widerstand	106
8.1.2	Induktiver Blindwiderstand	107
8.1.3	Kapazitiver Blindwiderstand	109
8.2	Reale Bauelemente	110
8.2.1	Reale Spule	110
8.2.2	Realer Kondensator	112
8.3	Elementarschaltungen	113

8.4	Zeigerbilder	115
8.4.1	Gemischte RLC-Kombinationen	115
8.4.2	Brückenschaltungen	118
9	Berechnung von Stromkreisen bei sinusförmiger Einspeisung	120
9.1	Berechnung im Zeitbereich	120
9.2	Berechnung im Bildbereich	122
9.2.1	Zeigerdarstellung	122
9.2.2	Rechenregeln	123
9.2.3	Transformationsregeln	126
9.2.4	Komplexer Widerstand	128
9.2.5	Komplexer Leitwert	130
9.3	Gemischte Schaltungen im Wechselstromkreis	131
9.3.1	Rechnerische Lösung im Bildbereich	131
9.3.2	Grafische Lösung im Bildbereich	135
9.3.3	Variation von Betriebsparametern	137
9.4	Spezielle Wechselstromschaltungen	141
9.5	Wechselstrom-Brücken	143
9.5.1	Induktivitätsmessbrücke	145
9.5.2	Kapazitätsmessbrücke	146
9.5.3	Phasendrehbrücke	147
9.6	Verfahren zur Netzwerkberechnung	149
9.6.1	Überlagerungsverfahren	149
9.6.2	Zweipoltheorie	151
9.6.3	Analyseverfahren	153
10	Frequenzabhängigkeit der Wechselstromkreise	156
10.1	Komplexer Frequenzgang	156
10.2	Tief- und Hochpässe	157
10.3	Schwingkreise	162
10.4	Übertragungsvierpole	174
11	Leistungsbetrachtungen im Wechselstromkreis	179
11.1	Zeitfunktion der Leistung	179
11.2	Wirk-, Blind- und Scheinleistung	181
11.3	Komplexe Leistung	182
11.4	Leistungsfaktor und seine Verbesserung	184
12	Dreiphasensysteme	188
12.1	Symmetrischer Drehstromgenerator	188
12.2	Spannungen und Ströme	189
12.3	Belastungsarten	193
12.4	Leistung im Dreiphasensystem	197

III Elektrische und magnetische Felder

13	Feldbegriff	202
13.1	Begriffsbestimmung	202
13.1.1	Begriff „Feldpunkt“	202
13.1.2	Begriff „Rechtssystem“	203
13.2	Einteilung der Felder	204
13.3	Eigenschaften elektrischer und magnetischer Felder	206
14	Stationäres elektrisches Strömungsfeld	209
14.1	Eigenschaften des elektrischen Strömungsfeldes	209
14.2	Beschreibung des stationären elektrischen Strömungsfeldes	214
14.2.1	Integrale Größen	214
14.2.2	Ortsbezogene Größen	214
14.2.3	Maschen- und Knotenpunktsatz im Strömungsfeld	219
14.2.4	Überlagerung elektrischer Strömungsfelder	222
14.3	Berechnung elektrischer Strömungsfelder	222
14.3.1	Homogene und einfache inhomogene Strömungsfelder	222
14.3.2	Radialsymmetrische Strömungsfelder	224
14.4	Erderanordnungen	229
14.4.1	Halbkugelerder	229
14.4.2	Vollkugelerder	233
15	Elektrostatisches Feld	238
15.1	Eigenschaften des elektrostatischen Feldes	238
15.2	Erscheinungsformen der Ladung	239
15.3	Beschreibung des elektrostatischen Feldes	241
15.3.1	Integrale Größen	241
15.3.2	Ortsbezogene Größen	243
15.4	Berechnung elektrostatischer Felder	245
15.4.1	Homogene und einfache inhomogene elektrostatische Felder	245
15.4.2	Elektrostatische Felder im geschichteten Dielektrikum	246
15.4.3	Radialsymmetrische elektrostatische Felder	249
15.4.4	Überlagerung elektrostatischer Felder	252
15.5	Energie und Kräfte im elektrostatischen Feld	255
15.5.1	Elektrostatisches Feld als Energiespeicher	255
15.5.2	COULOMBSches Gesetz	256
15.5.3	Kraft auf Trennflächen	257
15.5.4	Influenz und Polarisation	260

16	Elektrisches Verhalten des Kondensators	262
16.1	Regeln zur Berechnung von Kondensatorschaltungen	262
16.1.1	Reihenschaltung und kapazitiver Spannungsteiler	262
16.1.2	Parallelschaltung und Ladungsteiler	265
16.1.3	Gemischte Kondensatorschaltungen	268
16.2	Schaltvorgänge in RC-Kombinationen	269
16.2.1	Ladevorgang	269
16.2.2	Entladevorgang	271
16.2.3	Umschalten vorgeladener Kondensatoren	273
16.3	Ladungsausgleich	276
16.3.1	Ladungsbilanz	276
16.3.2	Ladungsausgleich in einer Reihenersatzschaltung	277
16.3.3	Ladungsausgleich in einer Parallelersatzschaltung	282
16.3.4	Kapazitive Netzwerke	283
17	Stationäres magnetisches Feld	286
17.1	Eigenschaften des magnetischen Feldes	286
17.2	Beschreibung des magnetischen Feldes	288
17.2.1	Integrale Größen	288
17.2.2	Ortsbezogene Größen	290
17.3	Magnetische Kreise	292
17.3.1	Magnetisierungskennlinie	292
17.3.2	Ersatzschaltungen für magnetische Kreise	295
17.3.3	Berechnung magnetischer Kreise	297
17.4	Magnetische Felder stromdurchflossener Leiter	301
17.5	Energie und Kräfte im magnetischen Feld	305
17.5.1	Magnetische Energie	305
17.5.2	LORENTZ-Kraft	308
17.5.3	Energiedichte und Induktivität einer Leitung	311
18	Zeitlich veränderliches magnetisches Feld	314
18.1	Elektromagnetische Induktion	314
18.1.1	Induktionsgesetz – Bewegungsinduktion	315
18.1.2	Induktionsgesetz – Ruheinduktion	319
18.2	Selbstinduktion und Induktivität	321
18.3	Gegeninduktion und Gegeninduktivität	322
18.4	Transformatorgleichungen	328
19	Elektrisches Verhalten der Spule	331
19.1	Zusammenschaltung von Induktivitäten	331
19.1.1	Unverkoppelte Induktivitäten	331
19.1.2	Verkoppelte Induktivitäten	332
19.1.3	Transformator-Ersatzschaltungen	333

19.2	Schaltvorgänge an Spulen	336
19.2.1	Einschaltvorgang	336
19.2.2	Ausschaltvorgang	338
19.2.3	Umschalten vormagnetisierter Spulen	340
19.3	Modelle zum Transformator	343
19.3.1	Idealer Transformator	343
19.3.2	Verlustloser und streuungsfreier Transformator	345
19.3.3	Realer Transformator	347
20	Wechselwirkungen	350
20.1	Ladungsbewegungen in leitfähigen und nichtleitfähigen Medien	350
20.1.1	Konvektionsstrom	350
20.1.2	Feldstrom	351
20.1.3	Diffusionsstrom	352
20.1.4	Verschiebungsstrom	354
20.2	MAXWELLSche Gleichungen	356
20.2.1	Durchflutungsgesetz	356
20.2.2	Induktionsgesetz	357
20.2.3	Wirbelfreies Quellenfeld	358
20.3	Grundlegende Zusammenhänge	359
Übungsaufgaben		360
Literaturverzeichnis		383
Sachwortverzeichnis		384
Formelzeichenverzeichnis		

1 Elektrische Grundgrößen

1.1 Elektrische Ladung

Die elektrische Ladung ist eine grundlegende Eigenschaft der Materie. Alle physikalischen Zustände, Prozesse und Erscheinungen, die in der Elektrotechnik auftreten, werden durch ruhende oder bewegte elektrische Ladungen verursacht.

Elektrische Ladungen sind Bestandteil aller Atome. Um den positiv geladenen Atomkern (Protonen) existiert eine negativ geladene Atomhülle, die mit n Elektronen besetzt ist. Diese beiden Elementarteilchen tragen eine vorzeichenbehaftete Elementarladung e_0 .

- Proton: positive Ladung $+e_0$
- Elektron: negative Ladung $-e_0$

$$e_0 \approx 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ A}\cdot\text{s} \quad (1.1)$$

Ein Atom, dem aus seiner Umgebung keine Energie zugeführt wurde, erscheint für einen externen Beobachter elektrisch neutral. Die negative Ladung der Atomhülle hebt die positive Ladung des Atomkernes nach außen hin auf.

Bewegliche Ladungen entstehen in bestimmten Stoffen z.B. durch das Herauslösen von Elektronen aus der Atomhülle. Infolge der Zufuhr von Energie (z.B. Wärme) können Elektronen die Atomhülle verlassen und stehen dann als bewegliche Ladungsträger \ominus zur Verfügung. Das Atom besitzt in diesem Fall einen Überschuss an positiven Ladungen \oplus seines Kernes. Der Betrag jeder positiven oder negativen Ladung ist dann ein ganzzahliges Vielfaches n der Elementarladung e_0 und wird als Ladungsmenge Q bezeichnet. Für die Einheit gilt: $[Q] = 1 \text{ A}\cdot\text{s}$ (Amperesekunde).

$$|Q| = n \cdot e_0 \quad (1.2)$$

Jede Ladung versetzt den sie umgebenden Raum in einen besonderen Zustand. Sie bewirkt ein elektrisches Feld (Kap. 13 bis 15) und übt damit eine Kraft $F \sim Q$ auf benachbarte Ladungen aus. Nach dem COULOMBSchen Gesetz (Abschn. 15.5.2) stoßen sich Ladungen gleicher Polarität voneinander ab, und Ladungen mit verschiedenen Vorzeichen ziehen sich gegenseitig an.

Ladungen können ruhen oder sich infolge der Kraftwirkung eines elektrischen Feldes bewegen. Ob sie sich bewegen können, und wie schnell sie sich bewegen, hängt von der sie umgebenden Materie ab.

Ruhende Ladungen erhält man z.B. durch Ladungstrennung auf den Oberflächen zweier durch einen Nichtleiter getrennter Metallplatten (vgl. Kap. 15).

Bewegliche Ladungen können gerichtet transportiert werden, wenn ein äußeres elektrisches Feld auf sie einwirkt (z.B. durch Anlegen einer Spannung an einen Leiter).

Die negativen Ladungen führen dann eine Bewegung relativ zu den positiven Ladungen aus.

Der jeweilige Zustand einer Ladung (Ruhe oder Bewegung) wird demzufolge neben der von außen zugeführten Energie durch das stoffliche Medium bestimmt, in dem sich die Ladung befindet bzw. das von den betrachteten Atomen gebildet wird. Solche stofflichen Medien können fest, flüssig oder gasförmig sein.

Die weiteren Ausführungen in diesem Lehrbuch beziehen sich auf Festkörper, die in der Regel bei Raumtemperatur betrachtet werden. Man unterscheidet zwischen folgenden Stoffen:

• **Elektrischer Leiter:**

Unter einem Leiter versteht man einen leitfähigen Stoff, der eine große Anzahl von beweglichen Elektronen enthält (z.B. Kupfer mit der Konzentration $n_{\text{Cu}} \approx 9 \cdot 10^{22}$ Elektronen pro cm^3). In metallischen Leitern sind die Elektronen nur sehr schwach im Atomverband gebunden, können sich leicht lösen und stehen somit in großer Anzahl als bewegliche Ladungsträger für einen Ladungstransport zur Verfügung.

In den weiteren Ausführungen der folgenden Kapitel zur Gleichstromlehre (außer in Kap. 6) werden ausschließlich metallische Leiter betrachtet.

• **Halbleiter:**

In einem Halbleiter ist die Anzahl der beweglichen Ladungen pro Volumeneinheit im Vergleich zum metallischen Leiter um Größenordnungen von bis zu 10^{10} Elektronen / cm^3 geringer. Durch den zielgerichteten Einbau von geeigneten Fremdatomen (Dotierung) kann diese Anzahl jedoch um Größenordnungen verändert werden.

Auf Leitungsmechanismen in Halbleitern kann in diesem Lehrbuch leider nicht eingegangen werden. Es wird auf die weiterführende Literatur (z.B. [11]) verwiesen.

• **Nichtleiter (Isolator):**

Ein idealer Nichtleiter besitzt keine frei beweglichen Ladungsträger. Somit ist ein Ladungstransport nicht möglich.

Bei realen Nichtleitern sind die Elektronen fest im Gitterverband verankert, solange sie nicht entsprechend hohen Temperaturen oder starken elektrischen Feldern ausgesetzt werden. Obwohl es demzufolge keine idealen Nichtleiter geben kann, geht man in ausgewählten Fällen von dieser idealen Eigenschaft aus (z.B. Kap. 15).

1.2 Elektrische Stromstärke

Die elektrische Stromstärke i beschreibt einen Ladungstransport pro Zeiteinheit.

$$i = \frac{dQ}{dt} \quad (1.3)$$

Wenn sich die Menge der transportierten Ladung über der Zeit ändert, so handelt es sich um einen zeitlich veränderlichen Strom $i = f(t)$ mit der Einheit: $[i] = 1 \text{ A}$. Er wird im Weiteren,

wie auch alle anderen von der Zeit abhängigen Größen, mit einem Kleinbuchstaben i gekennzeichnet.

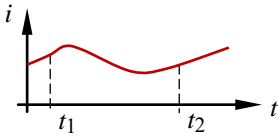


Bild 1.1: Zeitlich veränderlicher Strom

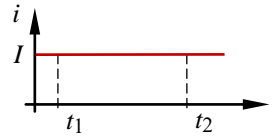


Bild 1.2: Gleichstrom

Betrachtet man einen veränderlichen Strom in einem zeitlichen Intervall (im Bild 1.1 von t_1 bis t_2), so ist die Fläche, die vom Funktionsverlauf $i = f(t)$ gegen die Zeitachse eingeschlossen wird, ein Maß für die in diesem Zeitraum Δt transportierte Ladungsmenge ΔQ :

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} i \cdot dt \quad (1.4)$$

Wird über der Zeit eine konstante Ladungsmenge bewegt, so handelt es sich um einen zeitlich unabhängigen Strom $i \neq f(t)$. Dieser Gleichstrom wird mit einem großen Buchstaben I gekennzeichnet. Nach Gleich. (1.4) erhält man jetzt die transportierte Ladungsmenge ΔQ folgende Aussage:

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} I \cdot dt = I \cdot t_2 - I \cdot t_1 = I \cdot (t_2 - t_1) = I \cdot \Delta t$$

Der elektrische Strom ist an seinen drei Hauptwirkungen erkennbar:

- **Wärmewirkung:**

Beim Transport von Ladungsträgern durch den Querschnitt eines Leiters kommt es zu einer Erwärmung des Leiters. Mit zunehmender Dichte der Strömung (Stromdichte, vgl. Kap. 14) wird diese Erwärmung größer.

- **Magnetische Wirkung:**

Bewegte elektrische Ladungen erzeugen um sich herum ein magnetisches Feld (Kap. 17).

- **Chemische Wirkung:**

In flüssigen Leitern (Elektrolyte) fließt ein Ionenstrom. Dieser Ladungstransport ist zugleich ein Massetransport, der zu einer chemischen Beeinflussung des durchströmten Stoffes führt.

Der elektrische Strom ist mit Gleich. (1.3) noch nicht vollständig beschrieben. Die Angabe seines Wertes (Vorzeichen – Zahlenwert – Einheit) ist nur in Verbindung mit einer Richtungsangabe sinnvoll.

In metallischen Leitern können sich lediglich die Elektronen (negative Ladungsträger) bewegen. Im Falle einer Bewegung sind sie die „Träger“ des Stromes. Durch das Herauslösen aus dem Atomverband hinterlassen die Elektronen positive Metallionen. Diese positiven Ionisationszustände verlagern sich im Vergleich zur Bewegung der Elektronen in entgegengesetzter Richtung (Relativbewegung der positiven Ladungsträger – vgl. Bild 1.3).

Die Grundlage für eine einheitliche Richtungsangabe¹⁾ bildet der Richtungssinn des Stromes. Danach wird die Richtung des elektrischen Stromes mit $I > 0 \text{ A}$ gegen die Bewegungsrichtung der Elektronen \ominus definiert und mit einem Richtungspfeil gekennzeichnet.

Nach dieser Festlegung fließt der Strom mit $I > 0 \text{ A}$ außerhalb der Quelle vom höheren (+) zum niedrigeren (–) Energieniveau, also in Richtung der Relativbewegung \rightarrow der positiven Ladungen \oplus . Ein Richtungspfeil gibt demzufolge die Richtung des Stromes an, mit der er mit positiven Werten durch einen Stromkreis fließt.

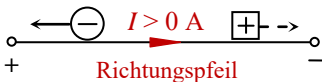


Bild 1.3: Richtungssinn des Stromes [¹⁾ Empfehlung nach DIN EN 60375]

In vielen Fällen kann diese Richtung aber nicht vorhergesagt werden. Das trifft insbesondere auf Brückenschaltungen (siehe Abschn. 4.3 und 4.4) und auf Stromkreise mit mehreren Quellen (vgl. Kap. 5) zu.

Falls die Potentialverhältnisse (vgl. Abschn. 1.3) in einem elektrischen Stromkreis (vgl. Abschn. 1.4) nicht bekannt sind, muss die Richtung eines Stromes vom Betrachter mit einem Bezugspfeil willkürlich festgelegt werden. Im Ergebnis einer Berechnung sagt das Vorzeichen des berechneten Stromes dann aus, ob er wirklich in die festgelegte Richtung fließt (positives Vorzeichen), oder ob er nicht in diese Richtung fließt (negatives Vorzeichen). Im Falle eines positiven Vorzeichens ist der Bezugspfeil zugleich der Richtungspfeil (Bild 1.3).

Obwohl Bezugspfeile beliebig festgelegt werden können, sollte man ihre Richtung während oder im Ergebnis einer Berechnung nicht mehr verändern. Da ein berechneter Strom (Vorzeichen – Zahlenwert – Einheit) nur in Verbindung mit dem festgelegten Bezugspfeil exakt interpretierbar ist, würde ein Richtungswechsel zu einer nicht nachvollziehbaren Lösung führen. Eine Aussage zum Richtungspfeil kann ja aus dem Vorzeichen des Rechenergebnisses im Zusammenhang mit dem Bezugspfeil abgeleitet werden.

In den weiteren Ausführungen dieses Lehrbuchs wird mit dem in der schaltungstechnischen Praxis üblichen Begriff „Zählpfeil“ gearbeitet. Darunter ist ein willkürlich festgelegter Bezugspfeil zu verstehen, der für die jeweils betrachtete Größe einen Bezugssinn vorgibt. Ein Strom wird nur dann als positiv angesehen, wenn der gewählte Bezugssinn (Zählpfeil) mit seinem Richtungssinn (siehe Richtungspfeil im Bild 1.3) übereinstimmt.

Lehrbeispiel 1.1:

Wie viele Ladungsträger müssen bewegt werden, damit in einem Leiter eine Sekunde lang ein Strom von $I = 1 \text{ A}$ fließt?

Da es sich um einen Gleichstrom handelt, gilt die Gleich. (1.3) wie folgt:

$$i = \frac{dQ}{dt} \quad \text{mit: } Q = \text{const.} \Rightarrow I = \frac{Q}{t}$$

$$\text{Durch Einsetzen von Gleich. (1.2) erhält man: } I = \frac{|Q|}{t} = \frac{n \cdot e_0}{t} \Rightarrow n = \frac{I \cdot t}{e_0} \approx 6,25 \cdot 10^{18}$$

Diese große Anzahl ist nicht mehr überschaubar. Um sich zumindest modellmäßig eine Vorstellung von der Menge der an diesem Ladungstransport beteiligten Ladungsträger zu verschaffen, werden folgende Überlegungen angestellt:

Welche Fläche könnte man überdecken, wenn jeder Ladungsträger die Größe eines Tennisballes mit einem Durchmesser $\varnothing \approx 65 \text{ mm}$) hätte?

Zum Bedecken eines Quadratmeters sind ca. 225 Tennisbälle erforderlich. Unsere Erde hat eine Oberfläche von rund 500 Millionen Quadratkilometern ($A \approx 5 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$). Zum vollständigen Belegen der Erdoberfläche wären demzufolge ca. $1,13 \cdot 10^{17}$ Tennisbälle nötig.

Für das Beispiel mit den n Ladungsträgern bedeutet dies, dass unsere Erde 55-mal mit einer solchen Schicht überzogen werden könnte oder dass diese 55 Schichten (übereinander angeordnet) einen Belag mit einer Höhe von ca. 4 m ergeben würden!

1.3 Elektrische Spannung

Einer Ladung kann an jedem Ort eines elektrischen Kreises (Abschn. 1.4) ein definiertes Energieniveau zugeordnet werden. Bezieht man das Energieniveau dieses Punktes auf die Ladung selbst, erhält man eine Aussage zum elektrischen Potential φ .

Das elektrische Potential φ ist ein Maß für das auf die Ladung bezogene Energieniveau eines Punktes in einem elektrischen Stromkreis.

Für einen Punkt a gilt: $\varphi_a = \frac{W_a}{Q}$

Besitzt ein Punkt b ein von a verschiedenes Potential, so existiert zwischen den beiden Punkten eine Potentialdifferenz, die man als elektrische Spannung U bezeichnet. Für die Einheit gilt: $[\varphi] = 1 \text{ V}$ und $[U] = 1 \text{ V}$ (Volt).

Eine elektrische Spannung beschreibt die Differenz der Potentiale zweier Punkte in einem elektrischen Stromkreis.

Für eine Gleichspannung $u \neq f(t)$ zwischen den Punkten a und b (U_{ab}) gilt dann:

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b \quad (1.5)$$

Zur vollständigen Beschreibung der Spannung ist eine Richtungsangabe erforderlich. Die Spannung wird mit einem Spannungszählpfeil gekennzeichnet, der z.B. vom Punkt a zum Punkt b festgelegt wurde. Besitzt nun der Punkt b ein höheres Potential als der Punkt a, so wird die Spannung gemäß Gleich. (1.5) negativ. Dieses negative Vorzeichen signalisiert den Sachverhalt, dass die Spannung U_{ab} nicht vom Punkt a zum Punkt b (sondern von b nach a) mit einem positiven Wert $U_{ba} = -U_{ab}$ abfällt.

1.4 Elektrischer Gleichstromkreis

In einem leitfähigen Medium fließt ein elektrischer Strom, wenn den beweglichen Ladungsträgern durch eine Quelle Energie zugeführt wird und die Anordnung in sich geschlossen ist (Stromkreis). Zur Verdeutlichung dieses Sachverhaltes soll zunächst ein unverzweigter elektrischer Stromkreis betrachtet werden. Er besteht im Elementarfall aus einer elektrischen Quelle und einem Verbraucher (Grundstromkreis).

Zwischen zwei Punkten a und b soll sich eine (vorerst als ideal angenommene) elektrische Quelle EQ befinden, die eine Quellenspannung $U_q > 0$ V (siehe Zählpfeil im Bild 1.4) bereitstellt. Dann liegen die Punkte a und b auf den Potentialen φ_a und φ_b mit $\varphi_a > \varphi_b$.

Es gilt: $U_q = U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$.

In diesem Zusammenhang muss darauf verwiesen werden, dass der Wert des Potentials eines Punktes lediglich eine Aussage relativ zum Potential eines frei wählbaren Bezugspunktes liefert. Diesem Bezugspunkt PB ordnet man ein Bezugspotential (z.B. $\varphi_{PB} = 0$ V) zu.

Wenn nun die Lage des Bezugspunktes oder das Bezugspotential selbst verändert wird, ändern sich die Potentiale aller betrachteten Punkte. Die Potentialdifferenzen (Spannungen) zwischen jeweils zwei Punkten bleiben aber unverändert.

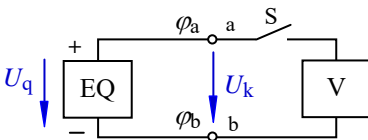


Bild 1.4: Offener elektrischer Kreis

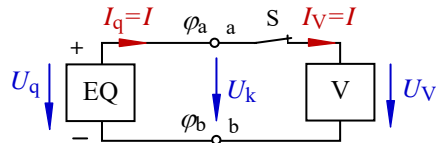


Bild 1.5: Geschlossener elektrischer Stromkreis

Bei geöffnetem Schalter S (Bild 1.4) fließt kein Strom durch den Kreis. Zwischen den Klemmen a und b liegt eine Klemmenspannung U_k , die im Bild 1.4 gleich der Quellenspannung U_q ist. Die Spannung über dem Verbraucher V ist null.

Nun wird der Kreis über den Schalter S geschlossen (Bild 1.5).

Die Quelle treibt jetzt einen Quellenstrom $I_q = I$ vom höheren (φ_a) zum niedrigeren Potential (φ_b) durch den geschlossenen elektrischen Stromkreis. In einem unverzweigten elektrischen Stromkreis fließt nur ein Strom. Dieser Strom $I_V = I$ verursacht einen Spannungsabfall U_V über dem Verbraucher, der in Richtung des fließenden Stromes weist.

Im Bild 1.6 ist ein einfaches Modell für den Ladungstransport in einem Gleichstromkreis dargestellt. Es soll zeigen, dass der elektrische Strom eine in sich geschlossene Erscheinung ist. Er wird zwar von einer elektrischen Quelle (EQ) verursacht – er selbst hat aber kein Anfang und kein Ende.

Eine bewegte Ladung verliert längs des Ladungstransportes durch einen geschlossenen Stromkreis einen Teil ihrer potentiellen Energie. Diese Energie wird der Ladung von der elektrischen Quelle wieder zugeführt. Der elektrische Strom fließt dabei in seinem geschlossenen Umlauf kontinuierlich weiter (Kontinuität des Stromes).

Zur Erläuterung dieses Sachverhaltes wird davon ausgegangen, dass eine positive Ladung im Punkt a des Bildes 1.6 ihr höchstes Energieniveau (W_a) aufweist. Längs des Ladungstransportes (siehe Richtungspfeil des Stromes) sinkt das Energieniveau dieser Ladung in Richtung des Punktes b ab. Dieses Absinken ($W \downarrow$) soll mit dem rechten Füllstandsanzeiger modellmäßig nachgebildet werden.

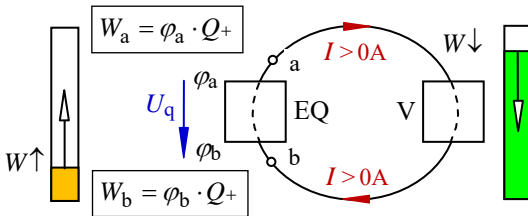


Bild 1.6: Modell zum Gleichstromkreis ($U_q > 0\text{V}$)

Im Punkt b besitzt die betrachtete Ladung ihr geringstes Energieniveau. Längs dieses Ladungstransportes hat sich demzufolge nicht die Ladungsmenge verringert, sondern ihr Energieniveau ist abgesunken. Der links im Bild 1.6 dargestellte Füllstandsanzeiger soll die Arbeitsweise der Quelle modellmäßig nachbilden. Sie hebt das Energieniveau der Ladung von W_b auf den ursprünglichen Wert W_a an ($W \uparrow$). Dabei muss der Strom als in sich geschlossene Erscheinung auch durch die Quelle fließen.

Im Bild 1.7 ist noch einmal der geschlossene elektrische Stromkreis des Bildes 1.5 in vereinfachter Form dargestellt. Für den elektrischen Strom gilt: $I_q = I_V = I$.

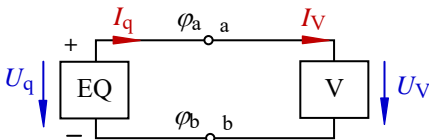


Bild 1.7: Zählpfeile im elektrischen Stromkreis

Bei der Interpretation der Richtungen der Zählpfeile stellt man folgendes fest:

Die Zählpfeile von Spannung und Strom weisen an der Quelle (Bild 1.7 – links) eine entgegengesetzte Richtung zueinander auf. Die Zählpfeile von Spannung und Strom zeigen dagegen am Verbraucher (Bild 1.7 – rechts) in die gleiche Richtung. Es muss demzufolge zwischen zwei verschiedenen Zählpfeilsystemen unterschieden werden.

• Quellen-Zählpfeilsystem:

Wenn die Zuordnung der Zählpfeile von Spannung und Strom eine entgegengesetzte Richtung aufweisen (siehe Bild 1.8), so wird dieser schaltungstechnische Zustand nach Vorbild einer aktiven elektrischen Quelle im Quellen-Zählpfeilsystem dargestellt.

Im Bild 1.8 ist der Quellenstrom I_q gegen den Zählpfeil der Quellenspannung U_q gerichtet. Die Quelle gibt Leistung an den Verbraucher ab (und wirkt damit als Quelle), wenn der Strom mit $I_q > 0\text{ A}$ vom höheren Potential der Quelle durch einen außen angeschlossenen Verbraucher zum niedrigeren Potential der Quelle fließt. Wenn das nicht ($I_q < 0\text{ A}$) der Fall

ist, dann nimmt die Quelle Leistung auf und wirkt als Verbraucher. Das ist allerdings in der hier angenommenen Situation nicht möglich.

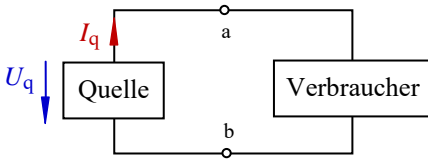


Bild 1.8: Quellen-Zählfeilsystem

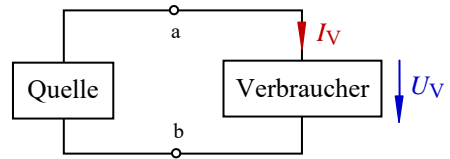


Bild 1.9: Verbraucher-Zählfeilsystem

• Verbraucher-Zählfeilsystem:

Wenn die Zuordnung der Zählpfeile von Spannung und Strom die gleiche Richtung aufweisen (siehe Bild 1.9), so wird dieser schaltungstechnische Zustand im Verbraucher-Zählfeilsystem dargestellt. Danach hat der Strom durch den Verbraucher I_v die gleiche Richtung wie der Zählpfeil der Verbraucherspannung U_v (siehe Bild 1.7 – rechts und Bild 1.9), da ein Strom durch einen Verbraucher einen Spannungsabfall in Flussrichtung verursacht. In diesem Fall nimmt das betrachtete Element Leistung auf und wirkt als Verbraucher.

Nun sollen die in den Bildern 1.4 bis 1.9 vorgestellten Modelle im Zusammenhang mit den getroffenen Festlegungen in eine einfache schaltungstechnische Situation umgesetzt werden. Die Anordnung besteht jetzt aus einer realen linearen Spannungsquelle und einem Lastwiderstand als Verbraucher. Beide Elemente werden an den Punkten a und b zu einem unverzweigten elektrischen Stromkreis (siehe Bild 1.10) verknüpft.

Die elektrische Quelle (EQ) ist der aktive Teil dieses elektrischen Stromkreises. Ladungstrennende Kräfte im Inneren dieses Schaltelementes erzeugen eine Quellenspannung U_q und versetzen elektrische Ladungen in diesem geschlossenen Stromkreis in eine Bewegung relativ zueinander. Solche inneren Vorgänge sind mit Verlusten behaftet, die bei einer linearen Quelle durch einen ohmschen Widerstand (Innenwiderstand R_i im Bild 1.10) nachgebildet werden.

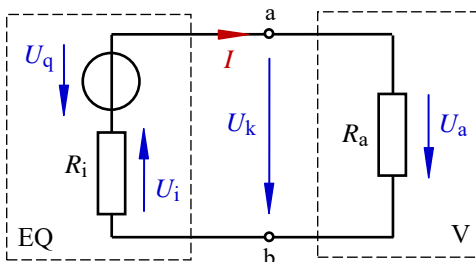


Bild 1.10: Unverzweigter elektrischer Stromkreis

Der Verbraucher (V) als der passive Teil eines elektrischen Stromkreises soll in den folgenden Betrachtungen ein linearer ohmscher Widerstand R_a sein (vgl. Abschn. 1.5 und 2.1). Er setzt die ihm zugeführte Energie in Wärme um. Die Verbindungsleitungen zwischen Quelle und Verbraucher werden als widerstandslos angenommen.

Bei einem offenen Kreis (Trennung der beiden Elemente an den Punkten a und/oder b) fließt kein Strom und der Spannungsabfall U_i über dem Innenwiderstand ist null. Über dem Lastwiderstand kann dann natürlich auch keine Spannung abfallen. Die Klemmenspannung U_k ist in diesem Fall gleich der Quellenspannung U_q .

Wird nun der Stromkreis geschlossen (Verbindung der beiden Elemente über die Punkte a und b), so fließt ein Strom I durch die Widerstände R_a und R_i .

In einem unverzweigten elektrischen Stromkreis kann nur ein Strom fließen.

Über beiden Widerständen fällt infolge dieses Stromflusses eine Spannung (U_a bzw. U_i) ab. Die Klemmenspannung U_k ist jetzt gleich dem Spannungsabfall U_a .

Es gilt: $U_k = U_a = U_q - U_i$.

Für die Spannungsquelle gilt das Quellen-Zählpfeilsystem, da die Zählpfeile von U_q und I eine entgegengesetzte Richtung aufweisen. Die Quelle gibt Leistung an die angeschlossenen Elemente ab.

Für den Innenwiderstand der Spannungsquelle R_i und für den Lastwiderstand R_a gilt das Verbraucher-Zählpfeilsystem, da die Zählpfeile von U_i und I sowie von U_a und I jeweils die gleiche Richtung aufweisen. Beide Widerstände nehmen Leistung von der Quelle auf. Der in der Praxis in der Regel nicht vernachlässigbare Innenwiderstand R_i einer elektrischen Quelle wirkt demzufolge innerhalb dieser Quelle als Verbraucher.

1.5 Widerstände im elektrischen Stromkreis

1.5.1 Bemessungsgleichung

Der ohmsche Widerstand R (vgl. auch Abschn. 2.1) beschreibt die Fähigkeit eines stofflichen Gebildes zur Begrenzung des elektrischen Stromes I . Zur Diskussion von Einflussgrößen auf diese Begrenzereigenschaft soll eine Strömung durch ein Stück Manganindraht (homogener Widerstandswerkstoff) betrachtet werden (Bild 1.11).

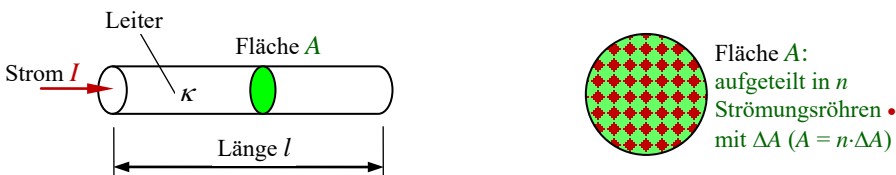


Bild 1.11: Einflussgrößen zur Begrenzung des elektrischen Stromes I

Das stoffliche Gebilde besitzt eine spezifische elektrische Leitfähigkeit κ und ist durch seine konstruktiven Daten (Länge l und Querschnitt A) gekennzeichnet. Die spezifische elektrische Leitfähigkeit κ ist eine Werkstoffkenngröße und wird durch die Dichte der frei beweglichen Ladungsträger und durch ihre Beweglichkeit im Werkstoff bestimmt. Der Kehrwert der elektrischen Leitfähigkeit ist der spezifische elektrische Widerstand ρ .

Es gilt: $\kappa = \frac{1}{\rho}$ mit: $[\kappa] = 1 \frac{\text{m}}{\Omega \cdot \text{mm}^2} = 1 \frac{\text{S}}{\text{m}}$

Der Strom durch den Leiter im Bild 1.11 wird durch folgende Maßnahmen begrenzt:

- Verringerung der Dichte der beweglichen Ladungsträger und ihrer Beweglichkeit:

Dazu muss ein Werkstoff mit einer kleineren spezifischen elektrischen Leitfähigkeit κ (also ein „schlechterer“ Leiter) verwendet werden: $\kappa \downarrow \Rightarrow R \uparrow$.

- Vergrößerung der Länge l des Leiters:

Eine größere Länge des Drahtes setzt dem Stromfluss einen größeren Widerstand entgegen.

Die Ladungsträger müssen einen längeren Weg zurücklegen: $l \uparrow \Rightarrow R \uparrow$.

- Verringerung des Leiterquerschnittes:

Eine Reduzierung der Fläche A bewirkt eine Verringerung der Anzahl n der verfügbaren Strömungsröhren (Bild 1.11 – rechts) und damit eine Strombegrenzung. Der Widerstand des Leiters steigt in diesem Fall an: $A \downarrow \Rightarrow R \uparrow$.

Daraus ergibt sich die Bemessungsgleichung zur Bestimmung des Widerstandes einer homogenen leitfähigen Anordnung:

$$R = \frac{l}{\kappa \cdot A} = \rho \cdot \frac{l}{A} \quad (1.6)$$

Der ohmsche Widerstand R ist eine Bauelemente-Kenngröße, die von den konstruktiven Daten (Länge und Fläche) und von der Materialkenngröße ($\kappa = 1/\rho$) abhängig ist.

Der elektrische Leitwert G wird über den Kehrwert des ohmschen Widerstandes R bestimmt.

$$G = \frac{1}{R} = \frac{\kappa \cdot A}{l} \quad (1.7)$$

Der Leitwert wird in der Praxis als reine Rechengröße verwendet. Die primären Informationen über die Einsetzbarkeit des Bauelementes „Widerstand“ leitet der Schaltungstechniker vorrangig aus der Angabe des Widerstandswertes ab. Aus diesem Grund wird in den folgenden Ausführungen weitgehend auf Leitwertbetrachtungen verzichtet.

Für die Einheiten gilt: $[R] = 1 \, \Omega \, (\text{Ohm})$ und: $[G] = 1 \, \text{S} \, (\text{Siemens})$.

1.5.2 Temperaturabhängigkeit

Bei Leiterwerkstoffen äußert sich eine Temperaturänderung über eine nachweisbare Widerstandsänderung des Stoffes. Der Temperaturkoeffizient α ist ein Maß dafür. Er beschreibt als Werkstoffkenngröße die auf den Widerstandswert des Stoffes bei Raumtemperatur bezogene Widerstandsänderung pro Temperaturänderung. Bei metallischen Werkstoffen ist der Temperaturkoeffizient größer als null (vgl. [11] – Lehrbeispiel 2.3).

$$\alpha = \frac{dR}{dT} \cdot \frac{1}{R}$$

(1.8)

Der Widerstandswert wird bei einer definierten Temperatur wie folgt berechnet:

$$R = R_{20} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

(1.9)

R_{20} ist der Widerstandswert bei einer Bezugstemperatur von 20 °C. α beschreibt den Temperaturkoeffizienten des für das Bauelement verwendeten Werkstoffes. Der Temperaturkoeffizient wird auch gelegentlich mit TK oder TC bezeichnet. Für ΔT ist die Temperaturänderung (aktuelle Temperatur relativ zur Bezugstemperatur) einzusetzen. Diese Berechnungsvorschrift gilt nur für den in der Schaltungstechnik interessierenden Temperaturbereich und für relativ kleine Temperaturänderungen.

1.5.3 Technische Ausführungsformen

Aus der Sicht des verfügbaren Bauelementesortimentes unterscheidet man zwischen Festwiderständen und Einstellwiderständen (vgl. auch [11] – Abschn. 2.2.1).

Festwiderstände können ein lineares oder ein nichtlineares Verhalten aufweisen. Dieses Verhalten wird mit einer Strom-Spannungs-Kennlinie $I = f(U)$ beschrieben.

Lineare Widerstände werden als Drahtwiderstand (z.B. Konstantendraht), Schichtwiderstand (z.B. Kohleschicht, Metallschicht) oder als Massewiderstand hergestellt.

Nichtlineare Widerstände (z.B. Heißleiter, Kaltleiter, Varistor, Fotowiderstand, usw.; siehe [11] – Abschn. 2.3) bestehen aus einem Halbleitermaterial. Ihr Widerstandswert wird durch eine physikalische Größe (z.B. Temperatur, Spannung, Beleuchtungsstärke) beeinflusst.

Einstellwiderstände ändern ihren Widerstandswert bei Veränderung der Position eines Schleifkontaktes längs einer geraden oder kreisförmigen Widerstandsbahn. Diese Widerstandsbahn kann aus Drahtwindungen (Drahtpotentiometer) oder aus einer Widerstandsschicht (Schichtpotentiometer) bestehen. Der gewünschte Widerstandswert wird mit einem geeigneten Schleifkontakt von der Widerstandsbahn linear oder logarithmisch abgegriffen.

Tabelle 1.1: Zusammenfassung (Formelzeichen und Einheiten)

Bezeichnung	Formelzeichen	Einheit
Ladung	Q	A·s
Strom	I	A
Potential	φ	V
Spannung	U	V
Widerstand	R	Ω
Leitwert	G	S

2 Gesetze zur Berechnung elektrischer Stromkreise

2.1 Das OHMSche Gesetz

Das OHMSche Gesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen der elektrischen Spannung und dem elektrischen Strom über die Bauelemente-Kenngröße R bzw. G als Proportionalitätsfaktor.

$$I = G \cdot U = \frac{U}{R} \quad (2.1)$$

Dieser Zusammenhang kann über die Strom-Spannungs-Kennlinie grafisch dargestellt werden. Im Falle eines ohmschen Widerstandes verläuft diese Kennlinie linear.

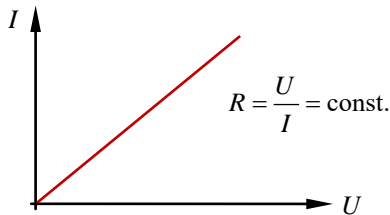


Bild 2.1: Strom-Spannungs-Kennlinie eines ohmschen Widerstandes

Bei einem Bauelement mit einer nichtlinearen Strom-Spannungs-Kennlinie wird zwischen einem Gleichstromwiderstand und einem differentiellen Widerstand (vgl. Bild 2.2) unterschieden. Beide Widerstände sind vom jeweils eingestellten Arbeitspunkt (AP) abhängig.

Der Gleichstromwiderstand wird in der Strom-Spannungs-Kennlinie $I = f(U)$ aus dem Kehrwert des Anstieges der Verbindungsgeraden vom Koordinatenursprung zum eingestellten Arbeitspunkt ermittelt.

$$R_- = \frac{U}{I} \Big|_{\text{AP}} \quad (2.2)$$

Der differentielle Widerstand beschreibt den Kehrwert des Anstieges der Strom-Spannungs-Kennlinie $I = f(U)$ im jeweiligen Arbeitspunkt (Tangente im Bild 2.2 – rechts). Bei linearen Widerständen sind Gleichstromwiderstand und differentieller Widerstand identisch.

$$r = \frac{dU}{dI} \Big|_{\text{AP}} \quad (2.3)$$

Bauelemente mit einer nichtlinearen Strom-Spannungs-Kennlinie haben einen vom Gleichstromwiderstand verschiedenen differentiellen Widerstand. Je nach Krümmung und Verlauf des Kennlinienbereiches, in dem der Arbeitspunkt liegt, weicht der differentielle Widerstand vom Gleichstromwiderstand ab und besitzt gelegentlich auch ein negatives Vorzeichen (fallender Kennlinienteil).

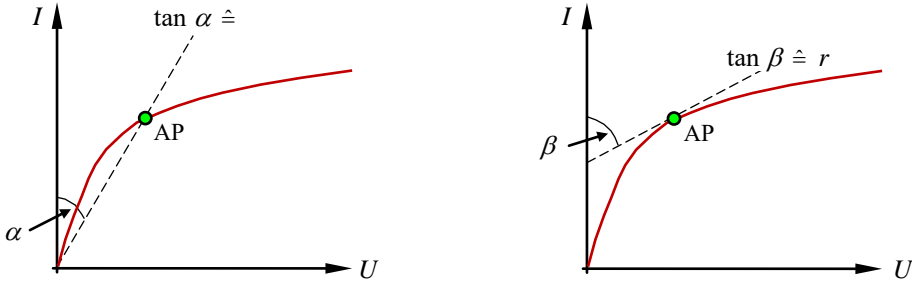


Bild 2.2: Gleichstromwiderstand (links) und differentieller Widerstand (rechts)

Als Bauelement wird im Weiteren ein linearer Widerstand (lineare Strom-Spannungs-Kennlinie) betrachtet. Legt man an einen Widerstand eine Spannung U (Ursache), so fließt ein Strom I (Wirkung), der vom Widerstand R (Bedingung) begrenzt wird.

Ursache und Wirkung sind je nach Auffassung umkehrbar. Speist man einen Strom (Ursache) in einen Widerstand ein, so entsteht über diesem Bauelement ein Spannungsabfall (Wirkung), der vom Widerstandswert bestimmt wird (Bild 2.3).

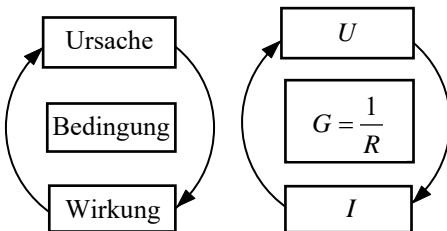


Bild 2.3: Ursache-Wirkungs-Modell

In beiden Fällen gilt, dass der Quotient von Spannung und Strom bei einem linearen Widerstand eine Konstante ergibt. Erhöht man die Spannung über einem Widerstand, so steigt im gleichen Maße der Strom linear an. Vergrößert man den Strom durch einen Widerstand, so steigt im gleichen Maße der Spannungsabfall über ihm linear an.

Zur Diskussion dieses Ursache-Wirkungs-Mechanismus soll ein einfaches gedankliches Modell (Bild 2.4) dienen. Es ist, wie jedes Modell, nur eine unvollständige Abbildung des Originals zum Zwecke der Erkenntnisgewinnung.

Für den Transport beweglicher elektrischer Ladungen von einem Punkt a zu einem Punkt b (elektrischer Strom I) ist eine Potentialdifferenz (elektrische Spannung U_{ab}) zwischen diesen zwei Punkten erforderlich. Gemäß der angegebenen Richtung des Stromes von a nach b

muss für $I > 0$ das Potential im Punkt a größer als das Potential im Punkt b sein. Die Quantität des Ladungstransportes wird dann durch die Kenngröße des (zwischen diesen beiden Punkten) eingeschalteten bzw. wirksamen Bauelementes (Kehrwert des elektrischen Widerstandes $G = 1/R$) als Bedingung bestimmt.

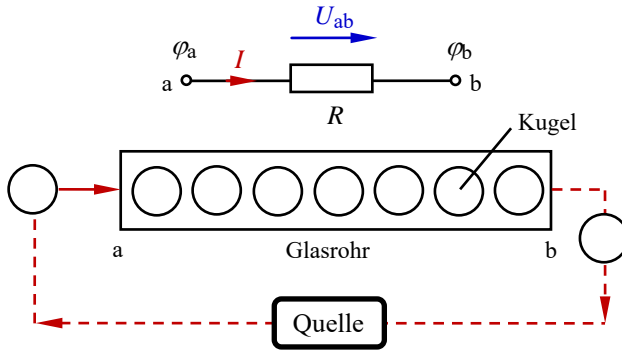


Bild 2.4: Modell zum Ladungstransport

Zur modellmäßigen Nachbildung des Bauelementes kann z.B. ein durchsichtiges Rohr mit der Länge l und einem definierten Querschnitt A eingesetzt werden. In diesem Rohr befinden sich Kugeln mit einem Durchmesser, der viel kleiner als das Kaliber des Rohres sein soll. Die Kugeln sind nicht nur längs des Leiters (Bild 2.4), sondern auch über seinem Querschnitt gleichmäßig verteilt. Das Rohr befindet sich in einer waagerechten Position.

Die Dichte der Kugeln im Rohr kann nun als Maß für die elektrische Leitfähigkeit des Bauelementes aufgefasst werden. Ein Leiterwerkstoff verfügt über viele frei bewegliche Ladungsträger pro Volumeneinheit. Die Dichte der Kugeln ist im Modell eines Leiters demzufolge sehr groß.

Ein solch einfaches Modell zum Ladungstransport ermöglicht, wenn auch nur bedingt, die anschauliche Erklärung der Bewegung von Ladungen in einem Leiter. Schiebt man z.B. auf der linken Seite eine Kugel in das Rohr, so werden alle Kugeln im Rohr um eine Position nach rechts verschoben. Die von außen eingebrachte Energie wird von einer Kugel zur anderen übertragen, sodass die letzte Kugel aus dem rechten Rohrende herausfällt. Es fließt ein Strom. Dieser Strom wird größer, wenn mehrere Kugeln gleichzeitig bzw. in einer kürzeren zeitlichen Folge in das Rohr gegeben werden. Dazu muss die Quelle mehr Kugeln liefern. Erhöht man dagegen die Begrenzereigenschaft des Rohres (Widerstand R steigt), so wird der Ladungstransport pro Zeiteinheit reduziert.

Das vorgestellte Modell spiegelt das physikalische Phänomen des Ladungstransportes nur bedingt wider. Es erklärt aber den komplizierten Prozess des Stromflusses in einer leitfähigen Anordnung mit möglichst einfachen Mitteln und eignet sich somit als praktikabler Ansatz zur Interpretation des im Bild 2.3 dargestellten Zusammenhanges zwischen Ursache und Wirkung. Zugleich wird erkennbar, dass eine elektrische Quelle sowohl eine Potentialdifferenz bereitstellt (Quellenspannung) als auch einen Strom einspeist (siehe Abschn. 3.4).

Lehrbeispiel 2.1:

Eine reale Spannungsquelle ($U_q = 12 \text{ V}$) wird mit einem Widerstand $R_a = 110 \text{ } \Omega$ belastet. Über dem Lastwiderstand liegt eine Klemmenspannung mit $U_k = 11 \text{ V}$ (vgl. Bild 1.10). Berechnen Sie mit dem OHMschen Gesetz den Strom durch die Anordnung und den Innenwiderstand der Quelle.

$$I = \frac{U_k}{R_a} = \frac{U_a}{R_a} = \frac{11 \text{ V}}{110 \text{ } \Omega} = 100 \text{ mA} \quad \text{und:} \quad R_i = \frac{U_i}{I} = \frac{U_q - U_k}{I} = \frac{12 \text{ V} - 11 \text{ V}}{100 \text{ mA}} = \frac{1 \text{ V}}{100 \text{ mA}} = 10 \text{ } \Omega$$

$$\text{Probe: } I = \frac{U_q}{R_i + R_a} = \frac{12 \text{ V}}{120 \text{ } \Omega} = 100 \text{ mA}$$

2.2 Die KIRCHHOFFSchen Sätze**2.2.1 Maschensatz**

Ein elektrischer Stromkreis besteht aus z Zweigen, die durch Knoten miteinander verbunden werden. Die unterschiedlichen Eigenschaften dieser Zweige und Knoten werden im Abschn. 3.1 im Zusammenhang mit den Grundstrukturen elektrischer Stromkreise diskutiert.

Ein Zweig verbindet zwei Knoten miteinander. In einem Zweig fließt demzufolge immer nur ein Strom (Zweigstrom).

Unter einer Masche versteht man einen beliebigen Umlauf, der in sich geschlossen ist. Längs dieses Umlaufs gilt der Maschensatz:

Die Summe aller vorzeichenbehafteten Spannungen entlang eines geschlossenen Umlaufs ist gleich null.

Dieses Gesetz gilt prinzipiell für Gleichspannungen und für zeitlich veränderliche Spannungen. Die Umlaufrichtung einer Masche ist frei wählbar. Durch das Einzeichnen von Spannungszählpfeilen (vgl. Abschn. 1.3) kann eine Masche mit dem Maschensatz analysiert werden. Als Vorzeichenregel wird festgelegt, dass alle Spannungen, die mit der gewählten Umlaufrichtung der Masche übereinstimmen, ein positives Vorzeichen erhalten. Spannungen, deren Zählpfeile gegen den Maschenumlauf gerichtet sind, werden mit einem negativen Vorzeichen gekennzeichnet. Im Gleichstromkreis gilt:

$$\sum_{v=1}^n U_v = 0 \quad (2.4)$$

Die Richtungen von Quellenspannungen sind in der Regel durch die Angabe ihrer Polarität (Vorzeichen und / oder Zählpfeil) bekannt. Ansonsten müsste der Betrachter (wie bei einer Spannung zwischen zwei Klemmen) eine Festlegung zu ihrer Polarität treffen.

Die Richtungen von Spannungsabfällen ergeben sich nach Vorbild der Richtungen der Ströme durch die entsprechenden Widerstände. Beträge und Richtungen von Zweigströmen sind dem Betrachter aber in der Regel nicht bekannt. Zu ihrer Berechnung ist eine Richtungsfestlegung durch Einzeichnen von Stromzählpfeilen erforderlich. Das Ergebnis der Berechnung trifft dann mit seinem Vorzeichen eine Aussage über die tatsächliche Richtung des jeweiligen Zweigstromes (siehe Abschn. 1.2).

Lehrbeispiel 2.2:

Man wende den Maschensatz auf den im Bild 2.5 eingezeichneten Umlauf m an.

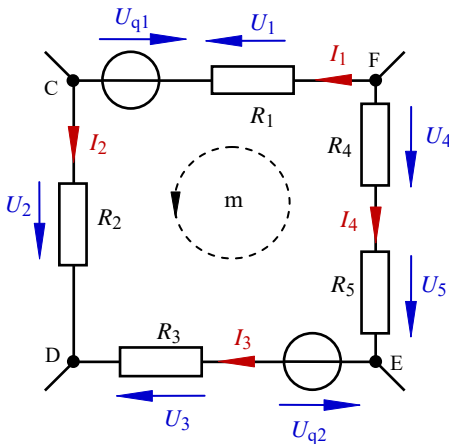


Bild 2.5: Anwendung des Maschensatzes

Der Umlauf beginnt z.B. im Punkt C. Es gilt:

$$+U_2 - U_3 + U_{q2} - U_5 - U_4 + U_1 - U_{q1} = 0$$

Durch Anwendung des OHMSchen Gesetzes und Umstellung der Gleichung erhält man:

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_4 (R_4 + R_5) = U_{q1} - U_{q2}$$

2.2.2 Knotenpunktsatz

Ein Knotenpunkt vereinigt Zweige eines elektrischen Stromkreises in einem Punkt. In diesem Punkt gilt der Knotenpunktsatz.

Die Summe aller vorzeichenbehafteten Ströme in einem Knotenpunkt ist null.

Dieses Gesetz gilt prinzipiell für Gleichströme und für zeitlich veränderliche Ströme. Durch das Einzeichnen von Stromzählpfeilen (vgl. Abschn. 1.2) kann jeder Knoten mit dem Knotenpunktsatz analysiert werden.

Als Vorzeichenregel wird festgelegt, dass zufließende Ströme mit einem positiven und abfließende Ströme mit einem negativen Vorzeichen gekennzeichnet werden.

Im Gleichstromkreis gilt:

$$\sum_{v=1}^n I_v = 0 \quad (2.5)$$

Lehrbeispiel 2.3:

Welcher gesetzmäßige Zusammenhang existiert für den im Bild 2.6 dargestellten Knotenpunkt k?

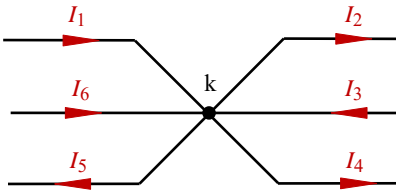


Bild 2.6: Anwendung des Knotenpunktsatzes

$$+I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5 + I_6 = 0 \quad \text{bzw.:} \quad I_1 + I_3 + I_6 = I_2 + I_4 + I_5$$

In einem Knotenpunkt ist demzufolge die Summe aller zufließenden Ströme ist gleich der Summe aller abfließenden Ströme.

Zur Berechnung linearer elektrischer Netzwerke (vgl. auch Kap. 5) muss bei Anwendung der KIRCHHOFFSchen Sätze ein Gleichungssystem aufgestellt werden. Die Gleichungen dieses Systems müssen die Unabhängigkeitsbedingung erfüllen. Das bedeutet, dass jede Gleichung im System relevante Information tragen muss.

Eine linear abhängige Gleichung trägt redundante Information. Sie sagt demzufolge nur das aus, was eine oder mehrere andere Gleichungen im System bereits ausgesagt haben.

Bei der Anwendung des Knotenpunktsatzes sind genau $(k - 1)$ Gleichungen voneinander linear unabhängig. Die letzte Gleichung (egal, welche) stellt eine Linearkombination von mehreren Gleichungen des Gleichungssystems dar.

2.3 Energiesatz

Unter Energie versteht man das Vermögen, Arbeit zu verrichten. Energie und Arbeit haben demzufolge die gleiche Einheit.

Es gilt: $[W] = 1 \text{ W} \cdot \text{s} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Die elektrische Energie W ergibt sich im Gleichstromfall aus der an einen Stromkreis angelegten Spannung, multipliziert mit der durch den Kreis bewegten Ladungsmenge.

$$W = U \cdot Q = U \cdot I \cdot t \quad (2.6)$$

Im Rahmen von Leistungsbetrachtungen in einem elektrischen Stromkreis oder z.B. zur Kontrolle der Richtigkeit der Berechnung unbekannter Größen in einem elektrischen Netzwerk stellt man häufig eine vollständige Leistungsbilanz auf. Als Grundlage dient der Energieerhaltungssatz:

Die Summe aller Energien in einem in sich geschlossenen System ist konstant.

Die gesamte Energiemenge, die einem geschlossenen System zugeführt wird, muss auch in diesem System umgesetzt (oder gespeichert) werden.

Die elektrische Leistung P wird im Gleichstromfall allgemein als elektrische Energie pro Zeiteinheit definiert.

$$P = \frac{W}{t} = \frac{U \cdot I \cdot t}{t} = U \cdot I \quad \text{Für die Einheit gilt: } [P] = 1 \text{ W (Watt).}$$

Mit dem OHMschen Gesetz erhält man für einen ohmschen Verbraucher:

$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R \quad (2.7)$$

In einem elektrischen Stromkreis werden Leistungen durch elektrische Quellen zugeführt (Quellenleistungen), die in den Verbrauchern als Verbraucherleistungen umgesetzt werden. Nach dem Energieerhaltungssatz muss die Summe aller zugeführten Leistungen gleich der Summe aller umgesetzten Leistungen sein.

Zur Kennzeichnung dieser Leistungen und insbesondere zur Unterscheidung zwischen einer Quellen-Charakteristik und einer Verbraucher-Charakteristik arbeitet man wieder mit unterschiedlichen Zählpfeilsystemen (siehe Abschn. 1.4 und Bild 2.7).

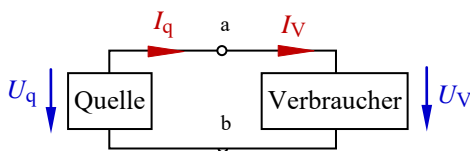


Bild 2.7: Zählpfeilsysteme für Leistungen

• Quellen-Zählpfeilsystem:

Elektrische Quellen geben, wenn sie als Quelle wirken, Leistung ab. Diese Leistungen werden im Quellen-Zählpfeilsystem (Q-ZPS) dargestellt. Es gilt: $P_q = U_q \cdot I_q$.

In einem elektrischen Netzwerk können bestimmte Quellen aber auch Leistung aufnehmen, wenn andere Quellen im Netzwerk (vgl. Kap. 5) dominieren. Durch diese Dominanz wird bestimmten Zweigen, in denen sich Quellen befinden, ein resultierender Zweigstrom „aufgeprägt“. Wenn dieser Strom in Richtung des Zählpfeils einer Quellenspannung fließt,

nimmt diese Quelle Leistung auf und wirkt dann wie ein Verbraucher (z.B. beim Laden eines Akkumulators).

• Verbraucher-Zählpfeilsystem:

Elektrische Verbraucher nehmen im Betriebsfall immer Leistung auf. Diese Leistungen werden im Verbraucher-Zählpfeilsystem (V-ZPS) dargestellt. Es gilt: $P_V = U_V \cdot I_V$.

Stellt man für einen in sich abgeschlossenen elektrischen Stromkreis eine Quellen-Charakteristik im Quellen-Zählpfeilsystem und eine Verbraucher-Charakteristik im Verbraucher-Zählpfeilsystem dar, so gilt für die Leistungen:

$$\Sigma P_q = \Sigma P_V \quad (2.8)$$

Die Aufstellung von Leistungsbilanzen wird häufig auf der Grundlage des Verbraucher-Zählpfeilsystems vorgenommen. Danach erhält eine Leistung ein positives Vorzeichen, wenn die Zählpfeile von Spannung und Strom die gleiche Richtung aufweisen (Verbraucher). Sie erhält ein negatives Vorzeichen, wenn die Zählpfeile von Spannung und Strom eine entgegengesetzte Richtung aufweisen (Quelle).

- ♦ Verbraucherleistungen werden im Verbraucher-Zählpfeilsystem durch ein positives Vorzeichen gekennzeichnet.

Es gilt: $P_V = + U_V \cdot I_V$

- ♦ Quellenleistungen werden im Verbraucher-Zählpfeilsystem durch ein negatives Vorzeichen gekennzeichnet.

Es gilt: $P_q = U_q \cdot (-I_q) = - U_q \cdot I_q$

Das entspricht zugleich der Aussage, dass die Summe aller vorzeichenbehafteten Leistungen in einem abgeschlossenen System, das im Verbraucher-Zählpfeilsystem dargestellt wird, gleich null ist. Eine analoge Aussage gilt bei einer Darstellung von Leistungen im Quellen-Zählpfeilsystem.

$$\sum_{v=1}^n P_v = 0 \quad (2.9)$$

Lehrbeispiel 2.4:

Stellen Sie für das Lehrbeispiel 2.1 (Grundstromkreis – Bild 1.10) die vollständige Leistungsbilanz (dargestellt im V-ZPS) auf. Geg.: $U_q = 12 \text{ V}$, $I = 100 \text{ mA}$, $R_i = 10 \Omega$, $R_a = 110 \Omega$.

Lösung: $P_q = U_q \cdot (-I) = 12 \text{ V} \cdot 100 \text{ mA} = -1200 \text{ mW}$

$$P_i = I^2 \cdot R_i = +100 \text{ mW} \quad \text{und:} \quad P_a = I^2 \cdot R_a = +1100 \text{ mW}$$

$$\Sigma P = P_q + P_i + P_a = (-1200 + 100 + 1100) \text{ mW} = 0$$

3 Lineare elektrische Gleichstromkreise

3.1 Eigenschaften elektrischer Stromkreise

Lineare elektrische Stromkreise bestehen aus Bauelementen mit einer linearen Strom-Spannungs-Kennlinie. Jeder elektrische Stromkreis kann in einen aktiven und einen passiven Teil getrennt werden (siehe Trennstelle A und B im Bild 3.1).

Im aktiven Teil müssen sich alle Zweige mit Quellen befinden. Der passive Teil ist dann eine reine Verbraucheranordnung. Diese Trennung wird vorerst nur an zwei Punkten (Zweipol) eines elektrischen Stromkreises vorgenommen.

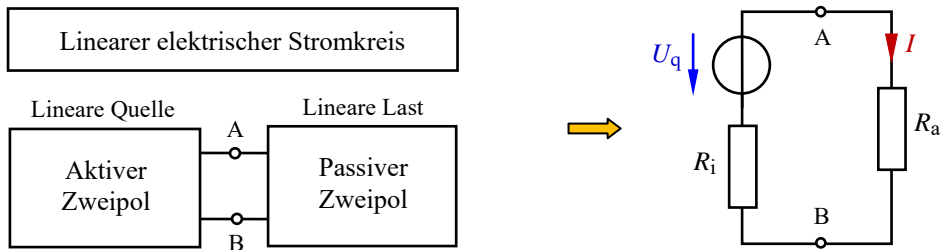


Bild 3.1: Allgemeines Modell eines elektrischen Stromkreises mit Ersatzschaltung (rechts)

Ein elektrischer Stromkreis kann eine unverzweigte oder eine verzweigte Struktur besitzen.

Im unverzweigten Stromkreis fließt nur ein Strom (Reihenschaltung). In seiner Grundstruktur besteht der unverzweigte Stromkreis lediglich aus einer realen (hier: linearen) Spannungsquelle mit U_q und R_i sowie einem (hier: linearen) Lastwiderstand R_a . Dieser Grundstromkreis wird häufig als Ersatzschaltung für einen linearen elektrischen Stromkreis verwendet (siehe Bild 3.1 – rechts).

Ein verzweigter Stromkreis ist dadurch gekennzeichnet, dass mindestens drei Ströme fließen (Bild 3.2). Ein Vergleich der Schaltungen im Bild 3.2 zeigt, dass in einem elektrischen Stromkreis mit zwei echten Knoten mehr als zwei Ströme fließen müssen.

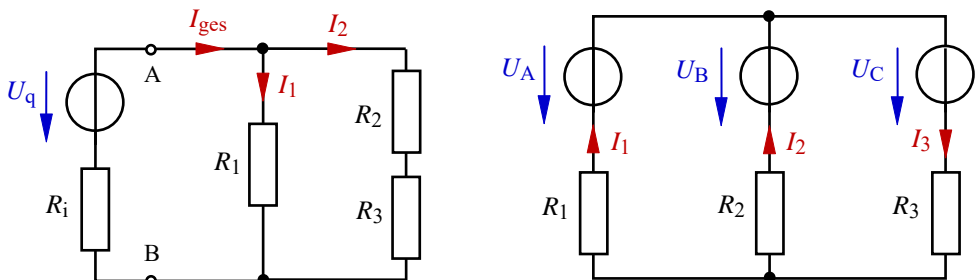


Bild 3.2: Elektrische Gleichstromkreise (links: Verzweigter Stromkreis – rechts: Elektrisches Netzwerk)

Der verzweigte Stromkreis kann die Struktur einer Parallelschaltung oder einer gemischten Schaltung aufweisen. In den folgenden Ausführungen wird unter einer gemischten Schaltung eine beliebige schaltungstechnische Kombination von Elementarschaltungen (Reihen- und Parallelschaltungen von Verbrauchern: siehe Bild 3.2 – linke Seite) verstanden.

Der Begriff des elektrischen Netzwerkes (Bild 3.2 – rechte Seite) wird für verzweigte elektrische Stromkreise verwendet, die über mehrere Quellen verfügen, die in der Regel in verschiedenen Zweigen positioniert sind.

Ein beliebiger elektrischer Stromkreis besteht aus z Zweigen, die durch k Knotenpunkte miteinander verbunden werden. In einem Zweig fließt immer nur ein Strom (Zweigstrom). Für die weiteren Betrachtungen gilt folgende Festlegung:

- Ein Zweig wird als „echter“ Zweig bezeichnet, wenn mindestens ein Zweig-Bauelement vorhanden ist (Zweig 1, 2 und 3 im Bild 3.3). Ansonsten ist es ein Kurzschlusszweig (Verbindung $C - C^*$).
- Ein Knotenpunkt wird als „echter“ Knotenpunkt bezeichnet, wenn er von allen seinen Nachbarknoten durch einen echten Zweig getrennt ist (A, B und $C \equiv C^*$ im Bild 3.3).

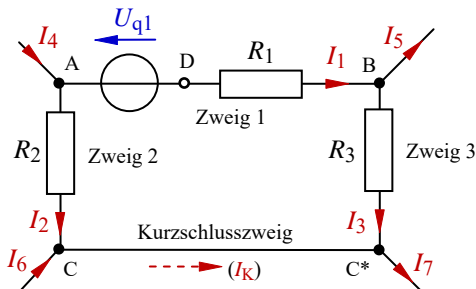


Bild 3.3: Auszug aus einem elektrischen Stromkreis

Trennt man einen echten Knoten (z.B. zum Zwecke einer übersichtlicheren schaltungstechnischen Darstellung) in zwei Teile, die durch einen Kurzschluss verbunden werden (siehe Kurzschlusszweig im Bild 3.3), so entstehen zwei unechte Knotenpunkte C und C*.

In echten und in unechten Knotenpunkten kommt es zu einer Aufteilung von Strömen. In einem verzweigten elektrischen Stromkreis mit einer Quelle teilt sich der Gesamtstrom nach dem Knotenpunktsatz in mehrere Teilströme auf.

Für das Beispiel im Bild 3.2 (linke Seite) gilt: $I_{\text{ges}} = I_1 + I_2$

Für eine eindeutige Zuordnung der Ströme (und natürlich auch der Spannungen) ist neben der Angabe der Zählpfeile auch eine sinnvolle Indizierung erforderlich. Diese Kennzeichnung wird in den weiteren Ausführungen nach Vorbild des Bauelementes vorgenommen, durch das der jeweilige Strom fließt (bzw. über dem die jeweilige Spannung abfällt). Für R_1 im Bild 3.3 gilt dann: $U_1 (\rightarrow) = I_1 \cdot R_1$. Der in einer Rechnung gesetzte Zählpfeil (\rightarrow) soll bei Platzproblemen den in der Schaltung nicht mehr positionierbaren Zählpfeil ersetzen.

Durch Auszählen der echten Zweige kann die Anzahl der Ströme in einem elektrischen Stromkreis ermittelt werden. Sollte im Ergebnis der Berechnung ein Kurzschlussstrom interessant sein, kann er aus den anderen Zweigströmen berechnet werden. Für Bild 3.3 würde dann gelten:

$$I_2 + I_6 = (I_K) = I_7 - I_3$$

Für bestimmte Betrachtungen ist die Einführung eines virtuellen Knotens sinnvoll. Er bewirkt keine Stromteilung (siehe Knoten D im Bild 3.3) und dient lediglich als Messpunkt oder als Punkt einer Trennstelle.

Die folgenden Abschnitte sind so gegliedert, dass zunächst die passiven Zweipole betrachtet werden (Abschn. 3.2 und 3.3). Daran schließen sich Ausführungen zu den aktiven Zweipolen (Abschn. 3.4) an. Im Abschn. 3.5 wird schließlich das Zusammenwirken von aktivem und passivem Zweipol diskutiert. Die Analyse und die Berechnung linearer elektrischer Netzwerke sind in ausführlicher Form Gegenstand des Kapitels 5.

3.2 Regeln zur Berechnung passiver Zweipole

3.2.1 Reihenschaltung und Spannungsteilerregel

Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen ist eine aus zwei Widerständen bestehende Reihenschaltung. Eine Reihenschaltung ist dadurch gekennzeichnet, dass durch alle betrachteten Elemente derselbe Strom I fließt (Bild 3.4).

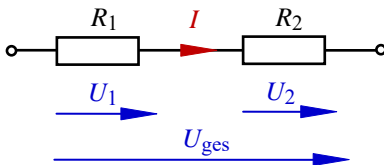


Bild 3.4: Reihenschaltung

Die Gesamtspannung wird mit dem Maschensatz [Gleich. (2.4)] aus der Summe der beiden Teilspannungen berechnet:

$$U_{\text{ges}} = U_1 + U_2$$

Mit dem OHMSchen Gesetz [Gleich. (2.1)] findet man so eine Berechnungsvorschrift zur Bestimmung des Gesamtwiderstandes R_{ges} einer Reihenschaltung.

$$I \cdot R_{\text{ges}} = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 = I \cdot (R_1 + R_2) \quad \text{bzw.:} \quad R_{\text{ges}} = R_1 + R_2$$

Ordnet man n Widerstände in einer Reihenschaltung an, so ergibt sich der Gesamtwiderstand aus der Summe der einzelnen Widerstände. Es gilt allgemein:

$$R_{\text{ges}} = \sum_{v=1}^n R_v \quad (3.1)$$

In einer Reihenschaltung teilt sich die Gesamtspannung in einzelne Teilspannungen auf.

Dieser Teilung liegt eine Gesetzmäßigkeit zugrunde, die aus der Reihenschaltung von zwei Widerständen abgeleitet wird (vgl. Bild 3.4). Der Strom in dieser Schaltung kann über drei verschiedene Ansätze berechnet werden:

$$I = \frac{U_1}{R_1} \quad \text{oder:} \quad I = \frac{U_2}{R_2} \quad \text{oder:} \quad I = \frac{U_{\text{ges}}}{R_{\text{ges}}}$$

Da dieser Strom überall gleich ist, darf man die rechten Seiten auch gleichsetzen. Dann gilt:

$$\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_{\text{ges}}}{R_{\text{ges}}} = \frac{U_{\text{ges}}}{R_1 + R_2} \quad (3.2)$$

Bringt man nun noch die Spannungen auf die linke und die Widerstände auf die rechte Seite, so erhält man die folgenden drei Gleichungen:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad (3.3)$$

$$\frac{U_1}{U_{\text{ges}}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (3.4)$$

$$\frac{U_2}{U_{\text{ges}}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.5)$$

Die verbale Interpretation dieser Gleichungen wird als Spannungsteilerregel bezeichnet.

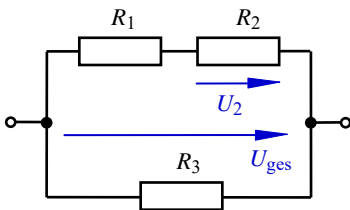
In einer Reihenschaltung verhalten sich zwei Spannungen so zueinander wie die Widerstände, über denen diese Spannungen abfallen.

- Die Spannungsteilerregel darf nur in einer Reihenschaltung angewendet werden.

Gemischte Schaltungen sind demzufolge erst in eine Reihenschaltung umzurechnen. Dann fließt nur noch ein Strom und man erhält einen Ansatz gemäß Gleich. (3.2).

- Parallelwiderstände zur jeweils betrachteten Reihenschaltung haben keinen Einfluss auf die aktuelle Spannungsteilung.

Lehrbeispiel 3.1:



Berechnen Sie für die angegebene Schaltung den Spannungsabfall $U_2 = f(U_{\text{ges}}, R_1, R_2, R_3)$.

Lösung: $U_2 = U_{\text{ges}} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

Bild 3.5: Schaltung zum Lehrbeispiel 3.1

Die Spannungsteilerregel darf nur in der Reihenschaltung R_1 und R_2 angewendet werden. Der Widerstand R_3 ist ein Parallelwiderstand, der nicht an der Spannungsteilung beteiligt ist.

3.2.2 Parallelschaltung und Stromteilerregel

Eine Parallelschaltung ist dadurch gekennzeichnet, dass über allen Elementen die gleiche Spannung U anliegt (Bild 3.6).

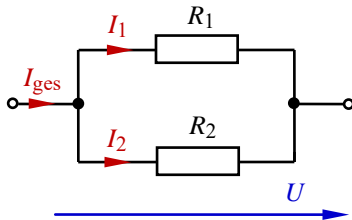


Bild 3.6: Parallelschaltung

Mit dem Knotenpunktsatz (2.5) kann eine Berechnungsvorschrift für den Gesamtwiderstand einer (vorerst aus zwei Widerständen bestehenden) Parallelschaltung abgeleitet werden.

$$I_{\text{ges}} = I_1 + I_2 \quad \text{bzw.:} \quad \frac{U}{R_{\text{ges}}} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{bzw.:} \quad G_{\text{ges}} = G_1 + G_2$$

In einer Parallelschaltung erhält man den Gesamtleitwert durch Addition der einzelnen Leitwerte. Die Bildung des Kehrwertes führt zum Gesamtwiderstand:

$$R_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad \text{Für } n \text{ parallele Widerstände gilt dann Gleich. (3.6):}$$

$$R_{\text{ges}} = \frac{1}{\sum_{v=1}^n \frac{1}{R_v}} \quad (3.6)$$

In gemischten Schaltungen (schaltungstechnische Kombination aus Reihen- und Parallelschaltungen) hat man häufig zwei parallele Widerstände zu berechnen. Um das Rechnen mit Leitwerten zu vermeiden (Widerstandswerte haben für den Schaltungstechniker infolge des Bezuges zum realen Bauelement einen weitaus höheren Informationsgehalt als Leitwerte), gilt im Weiteren folgende Vereinfachung für zwei parallel (//) geschaltete Widerstände:

$$R_{\text{ges}} = R_1 // R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2}}$$

$$R_{\text{ges}} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.7)$$

In der schaltungstechnischen Praxis findet man auch gelegentlich den Fall, dass zwei parallel geschaltete Widerstände gleich groß sind. Für $R_1 = R_2 = R$ gilt:

$$R_{\text{ges}} = R // R = \frac{R \cdot R}{R + R} = \frac{R^2}{2 \cdot R} = \frac{R}{2}$$

Zwei gleich große Widerstände wirken in einer Parallelschaltung wie die Hälfte eines Einzelwiderstandes.

Schaltet man einen relativ großen Widerstand (z.B.: $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$) zu einem kleinen Widerstand ($R_1 = 10 \Omega$) parallel, so wird der Gesamtwiderstand vom kleineren Widerstandswert bestimmt ($R_{\text{ges}} \approx 9,9 \Omega$). Unterscheiden sich beide Widerstandswerte um den Faktor 100 oder mehr, so kann als Näherung für den Gesamtwiderstand der kleinere Widerstandswert angenommen werden. Diese Überlegungen sind insbesondere auch als Probe für die Richtigkeit der rechnerisch ermittelten Größenordnung eines Gesamtwiderstandes geeignet.

Der Gesamtwiderstand einer Parallelschaltung ist immer kleiner als der kleinste Widerstandswert der Parallelschaltung.

In einer Parallelschaltung teilt sich der Gesamtstrom nach dem Knotenpunktsatz [Gleich. (2.5)] in einzelne Teilströme auf. Dieser Teilung liegt eine Gesetzmäßigkeit zugrunde, die aus der Parallelschaltung von zwei Widerständen abgeleitet werden soll. Die Spannung ist über allen Elementen gleich und kann über drei verschiedene Ansätze berechnet werden:

$$U = I_1 \cdot R_1 \quad \text{oder:} \quad U = I_2 \cdot R_2 \quad \text{oder:} \quad U = I_{\text{ges}} \cdot R_{\text{ges}}$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen sind gleich. Dann müssen die rechten Seiten auch gleich sein. Dann gilt:

$$I_1 \cdot R_1 = I_2 \cdot R_2 = I_{\text{ges}} \cdot R_{\text{ges}} \quad (3.8)$$

Bringt man nun noch die Ströme auf die linke und die Widerstände auf die rechte Seite, so erhält man die folgenden drei Gleichungen:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (3.9)$$

$$\frac{I_1}{I_{\text{ges}}} = \frac{R_{\text{ges}}}{R_1} \quad (3.10)$$

$$\frac{I_2}{I_{\text{ges}}} = \frac{R_{\text{ges}}}{R_2} \quad (3.11)$$

Die verbale Interpretation dieser Gleichungen wird als Stromteilerregel bezeichnet.

In einer Parallelschaltung verhalten sich zwei Ströme zueinander wie die Kehrwerte der Widerstände, durch die diese Ströme fließen.

- Die Stromteilerregel darf nur in einer Parallelschaltung angewendet werden. Gemischte Schaltungen muss man erst in eine Parallelschaltung umrechnen. Nur dann liegt über allen Elementen die gleiche Spannung, und man erhält einen Ansatz gemäß Gleich. (3.8).
- Reihenwiderstände zum jeweils betrachteten Knotenpunkt haben nichts mit der aktuellen Stromteilung zu tun.

In vielen Aufgabenstellungen ist ein beliebiger Teilstrom zu berechnen. Da der Gesamtstrom über das OHMsche Gesetz relativ einfach bestimmt werden kann, ist der Ansatz $\frac{\text{Teilstrom}}{\text{Gesamtstrom}}$ von besonderem Interesse. Zur Herleitung der dieser Teilung zu Grunde liegenden Gesetzmäßigkeit wird von Gleich. (3.10) ausgegangen (vgl. Bild 3.6).

$$\frac{I_1}{I_{\text{ges}}} = \frac{R_{\text{ges}}}{R_1} = \frac{R_1 \cdot R_2}{(R_1 + R_2) \cdot R_1}$$

$$\frac{I_1}{I_{\text{ges}}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.12)$$

Ein Teilstrom verhält sich zum Gesamtstrom wie der nicht von diesem Teilstrom durchflossene Widerstand, dividiert durch die Summe der beiden an der Stromteilung beteiligten Widerstände.

Die Anwendung dieser vereinfachten Form setzt voraus, dass jede gemischte Schaltung zuerst in eine aus zwei Widerständen bestehende Parallelschaltung umgerechnet wird.

Lehrbeispiel 3.2:

Berechnen Sie den Strom I_2 mit der Stromteilerregel und die Gesamtspannung bei Stromeinspeisung.

Geg.: $I_{\text{ges}}, R_1, R_2, R_3$

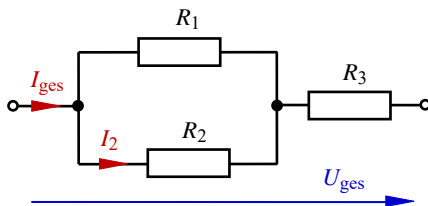


Bild 3.7: Schaltung zum Lehrbeispiel 3.2

Lösung: $I_2 = I_{\text{ges}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$

R_3 ist nicht an der Stromteilung beteiligt. Durch ihn fließt der Gesamtstrom.

Die Gesamtspannung kann dann über das OHMsche Gesetz ermittelt werden. Es gilt:

$$U_{\text{ges}} = I_{\text{ges}} \cdot R_{\text{ges}} = I_{\text{ges}} \cdot (R_1 \parallel R_2 + R_3)$$

3.3 Berechnung passiver Zweipole

Die im Abschn. 3.2 dargestellten Regeln zur Berechnung passiver Zweipole sollen nun auf schaltungstechnische Konfigurationen angewendet werden, in denen eine Spannung und/oder ein Strom mehrfach geteilt werden. Bild 3.8 zeigt einen passiven Zweipol, in dem die Gesamtspannung $U_{AB} = U_1$ in die Spannungen U_2 (nicht eingezeichnet) und U_3 geteilt wird. U_5 entsteht dann aus einer weiteren Teilung der Spannung U_3 und ist somit das Ergebnis einer doppelten Spannungsteilung. Der Gesamtstrom wird im Knoten α in die Teilströme I_1 und I_2 geteilt. Der Strom I_3 entsteht durch eine weitere Stromteilung im Knoten β aus I_2 und ist somit das Ergebnis einer doppelten Stromteilung.

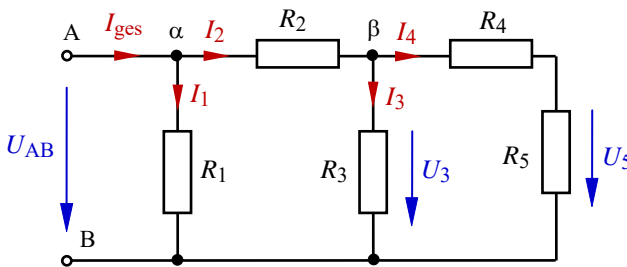


Bild 3.8: Doppelter Spannungs- und Stromteiler

Zur Berechnung der Spannung U_5 oder des Stromes I_3 müssen die Teilerregeln schrittweise angewendet werden. Es gilt:

$$\frac{U_5}{U_{AB}} = \frac{U_5}{U_3} \cdot \frac{U_3}{U_{AB}} = \frac{R_5}{R_4 + R_5} \cdot \frac{R_3 \parallel (R_4 + R_5)}{R_2 + R_3 \parallel (R_4 + R_5)}$$

Man betrachtet also zunächst die „innere“ Reihenschaltung (hier: $R_4 + R_5$). Durch beide Widerstände fließt der gleiche Strom (I_4). Über beiden Widerständen liegt die Spannung U_3 . Der Ansatz U_5 / U_3 ist mit der Spannungsteilerregel (Reihenschaltung) zulässig. Nun muss die Kombination $R_3 \parallel (R_4 + R_5)$ als Ersatzwiderstand aufgefasst werden. Über diesem Ersatzwiderstand liegt wieder die Spannung U_3 . Nun kann der Ansatz für U_3 / U_{AB} formuliert werden. Die Ersatz-Reihenschaltung besteht jetzt aus R_2 und $R_3 \parallel (R_4 + R_5)$.

Die Stromteilerregel wird nach Vorbild der Gleich. (3.12) angewendet, da für jeden Knoten das Verhältnis von Teilstrom zum Gesamtstrom zu bestimmen ist.

$$\frac{I_3}{I_{\text{ges}}} = \frac{I_3}{I_2} \cdot \frac{I_2}{I_{\text{ges}}} = \frac{R_4 + R_5}{R_3 + R_4 + R_5} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3 \parallel (R_4 + R_5)}$$

Auch hier ist darauf zu achten, dass die Teilerregeln nur für Elementarschaltungen gelten. Die Schaltung muss jetzt für jeden Knoten (α und β) gesondert in eine elementare Parallelschaltung (bestehend aus zwei Widerständen) umgerechnet werden.

Lehrbeispiel 3.3:

Gegeben ist ein R-2R-Widerstandsnetz. Mit dieser Widerstandskonfiguration können Spannungen und Ströme in der Abstufung des Dualsystems erzeugt werden. Infolge seiner einfachen Wirkungsweise ist diese Schaltung zur Erklärung mehrfacher Spannungs- und Stromteiler gut geeignet.

Berechnen Sie für die Schaltung im Bild 3.9 die Ströme I (\rightarrow) in allen Längszweigen und die Spannungen über allen Querzweigen U (\downarrow).

Geg.: U_{ges} und $R_1 = R_3 = R_5 = 2R$ sowie $R_2 = R_4 = R_6 = R_7 = R$.

Zunächst wird der Gesamt Widerstand berechnet: $R_{\text{ges}} = \{R_1 // [R_2 + R_3 // \langle R_4 + R_5 // (R_6 + R_7) \rangle]\}$.

Mit der gegebenen Vereinfachung erhält man: $R_{\text{ges}} = \{2R // [R + 2R // \langle R + 2R // (2R) \rangle]\} = R$

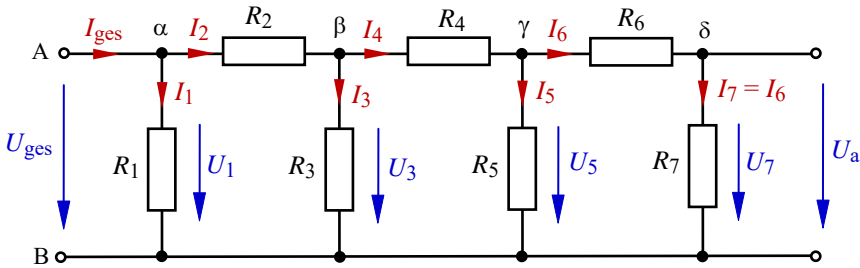


Bild 3.9: R-2R-Widerstandsnetz (Prinzip der mehrfachen Teiler)

Den Rest könnte man durch Überlegungen lösen. Im Sinne eines Lehrbeispiels sollen aber zunächst die allgemeinen Lösungsansätze angegeben werden. Dann sind die Ergebnisse der Überlegungen einfacher nachvollziehbar. Mit $U_{\text{ges}} = U_1$ und $U_a = U_7$ gilt für die Spannungen in den Querzweigen:

$$\frac{U_7}{U_5} = \frac{R_7}{R_6 + R_7} = \frac{1}{2} \quad \text{und:} \quad \frac{U_5}{U_3} = \frac{R_5 // (R_6 + R_7)}{R_4 + R_5 // (R_6 + R_7)} = \frac{2R // 2R}{R + 2R // 2R} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{U_3}{U_1} = \frac{R_3 // \langle R_4 + R_5 // (R_6 + R_7) \rangle}{R_2 + R_3 // \langle R_4 + R_5 // (R_6 + R_7) \rangle} = \frac{\langle R + 2R // (2R) \rangle}{R + \langle R + 2R // (2R) \rangle} = \frac{1}{2}$$

Dann erhält man einen Ansatz für U_a : $\frac{U_a}{U_{\text{ges}}} = \frac{U_7}{U_1} = \frac{U_7}{U_5} \cdot \frac{U_5}{U_3} \cdot \frac{U_3}{U_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ (usw.)

Schlussfolgerung: Die jeweiligen Widerstände müssen schrittweise zu jeweils einer Ersatz-Reihenschaltung zusammengefasst werden. Erst dann darf die Spannungsteilerregel angewendet werden.

Mit $I_6 = I_7$ gilt für die Ströme in den Längszweigen bei Verwendung von Gleich. (3.12):

$$\frac{I_6}{I_4} = \frac{R_5}{R_5 + R_6 + R_7} = \frac{1}{2} \quad \text{und:} \quad \frac{I_4}{I_2} = \frac{R_3}{R_3 + R_4 + R_5 // (R_6 + R_7)} = \frac{2R}{2R + R + 2R // (2R)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{I_2}{I_{\text{ges}}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3 // \langle R_4 + R_5 // (R_6 + R_7) \rangle} = \frac{2R}{2R + R + 2R // \langle R + 2R // (2R) \rangle} = \frac{1}{2}$$

Schlussfolgerung: Die jeweiligen Widerstände müssen schrittweise zu jeweils einer Ersatz-Parallelschaltung zusammengefasst werden. Erst dann darf die Stromteilerregel angewendet werden und man erhält einen Ansatz für z.B. I_6 / I_{ges} durch Multiplikation der drei einzelnen Teiler.

3.4 Elektrische Quellen

Aus energetischer Sicht stellt eine elektrische Quelle ein Element zur Umformung anderer Energieformen in elektrische Energie dar. Dieses Element besitzt die Fähigkeit, durch innere physikalische Effekte Ladungsträger zu beschleunigen.

Eine elektrische Quelle hat die Aufgabe, einem elektrischen Stromkreis die für den Ladungstransport notwendige Leistung zuzuführen. Sie speist einen angeschlossenen Verbraucher sowohl mit einer Spannung U_k als auch mit einem Strom I_0 .

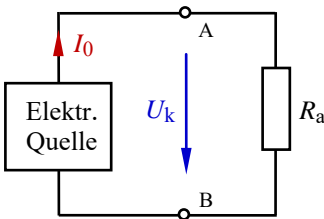


Bild 3.10: Belastete elektrische Quelle

Zur Beschreibung des Klemmenverhaltens (elektrisches Verhalten an den Punkten A und B in den Bildern 3.10 und 3.12) einer elektrischen Quelle verwendet man die Klemmenspannung U_k . Hier wird der Index k verwendet, um Verwechslungen mit dem Kurzschlussfall (Index K) auszuschließen. Die Klemmenspannung ist bei einer belasteten Quelle (Bild 3.10) gleich der Spannung U_a über dem Lastwiderstand. Bei einer leer laufenden Spannungsquelle (Bild 3.12) ist die Klemmenspannung gleich der Quellenspannung $U_k = U_q$ und bei einer leer laufenden Stromquelle gilt: $U_k = I_q \cdot R_i$.

Die Bezeichnungen Spannungsquelle bzw. Stromquelle ergeben sich aus der Eigenschaft der Quelle, dem Verbraucher entweder eine konstante Spannung bereitzustellen (Spannungseinspeisung) oder einen konstanten Strom aufzuprägen (Stromeinspeisung).

Eine aktive elektrische Quelle gibt Leistung (Quellenleistung) an den Verbraucher ab. Die Richtungskennzeichnung einer Quelle wird nach dem Quellen-Zählpfeilsystem vorgenommen. Danach sind die Zählpfeile von Quellenspannung und Quellenstrom einander entgegen gerichtet (vgl. auch Abschn. 1.4 und 2.3).

Ideale Quellen sind technisch nicht realisierbar, denn sie müssten in der Lage sein, eine unendlich große elektrische Energie aufzubringen.

Reale elektrische Quellen besitzen einen nicht vernachlässigbaren Innenwiderstand, der die Verluste bei der Wandlung in elektrische Energie einschließlich der entsprechenden Übergangswiderstände beschreibt. Das elektrische Verhalten realer Quellen wird über Ersatzschaltungen beschrieben, die neben der idealen Quellenwirkung (U_q oder I_q) den realen Innenwiderstand R_i berücksichtigen. Im Weiteren werden nur lineare Quellen betrachtet. Die Strom-Spannungs-Kennlinie einer linearen Quelle (siehe Bild 3.11) ist eine Gerade. Sie verbindet in der Funktionsdarstellung $I = f(U)$ den Kurzschlussstrom I_K (Schnittpunkt auf

der Ordinatenachse) mit der Leerlaufspannung U_L (Schnittpunkt auf der Abszissenachse) und wird als Quellenkennlinie bezeichnet.

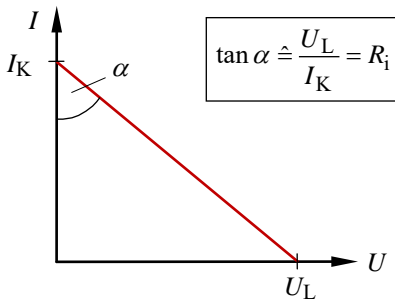


Bild 3.11: Kennlinie einer realen Quelle

Das Spannungsquellen-Ersatzschaltbild einer realen Quelle bildet den Innenwiderstand als Reihenelement zur idealen Quelle ab (Bild 3.12 – links). Eine reale Spannungsquelle stellt dem Verbraucher bei variabler Last eine nahezu konstante Spannung bereit, wenn der Innenwiderstand viel kleiner als der Lastwiderstand ist.

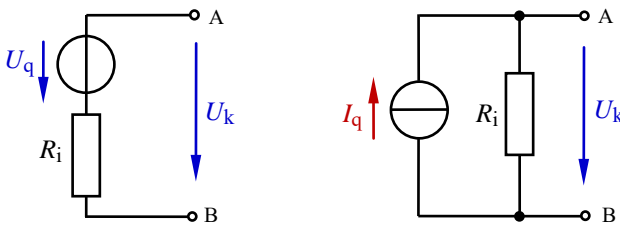


Bild 3.12: Ersatzschaltungen realer Quellen (links: Spannungsquelle – rechts: Stromquelle)

Von einer Stromquelle spricht man immer dann, wenn dem Verbraucher bei variabler Last ein konstanter Strom aufgeprägt werden kann. Das ist der Fall, wenn der Innenwiderstand viel größer als der Lastwiderstand ist. Im Stromquellen-Ersatzschaltbild wirkt der Innenwiderstand parallel zur idealen Stromquelle (Bild 3.12 – rechts).

Die bisherigen Ausführungen weisen darauf hin, dass die Bezeichnung einer Quelle letztendlich eine Auffassungssache ist. Jede Spannungsquelle liefert zugleich einen Quellenstrom, und jede Stromquelle stellt zugleich eine Quellenspannung bereit.

Eine dieser beiden elektrischen Quellengrößen ist jedoch bei einem variablen Lastwiderstand durch eine bessere Konstanz gekennzeichnet. Diese Grundgröße (Spannung oder Strom) bestimmt den jeweiligen Namen der Quelle.

Eine Aussage über das Verhältnis zwischen Innen- und Lastwiderstand macht diese Unterscheidung für den Anwender sofort deutlich. So signalisiert ein relativ kleiner Innenwiderstand ($R_i \ll R_a$) die Charakteristik einer Spannungsquelle. Der Anstieg der Quellenkennlinie nähert sich der Kennlinie einer idealen Spannungsquelle (Bild 3.13 – links). Ein relativ großer Innenwiderstand weist dagegen auf ein Verhalten als Stromquelle ($R_i \gg R_a$) hin. Der Anstieg der Quellenkennlinie nähert sich dann der Kennlinie einer idealen Stromquelle (siehe Bild 3.13 – rechts).

Reale Quellen sind idealisierbar, wenn der jeweilige Innenwiderstand gegenüber dem Lastwiderstand vernachlässigbar ist.

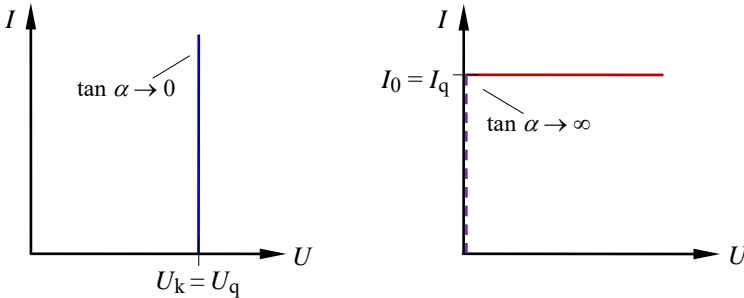


Bild 3.13: Idealisierte Quellen (links: Spannungsquelle – rechts: Stromquelle)

Spannungsquellen können gleichsinnig oder gegensinnig in Reihe geschaltet werden (siehe Bild 3.14). Bei einer gleichsinnigen Reihenschaltung addieren sich die beiden Spannungswerte. Bei einer gegensinnigen Reihenschaltung werden sie voneinander subtrahiert – siehe offener Zählpfeil im Bild 3.14: $\leftarrow (-\{U_{q2}\})$.

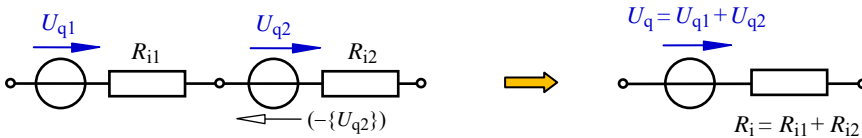


Bild 3.14: Reihenschaltung von Spannungsquellen

Eine Parallelschaltung von Spannungsquellen ist nur gleichsinnig und mit gleichen Quellenspannungswerten sinnvoll (z.B. zur Erhöhung der Kapazität beim Einsatz mehrerer Akkumulatoren). Anderenfalls kommt es zu relativ großen Ausgleichsströmen (vgl. Lehrbeispiel 3.4), die eine Quellenwirkung nach außen mehr oder minder hemmen.

Stromquellen können gleichsinnig oder gegensinnig parallel geschaltet werden.

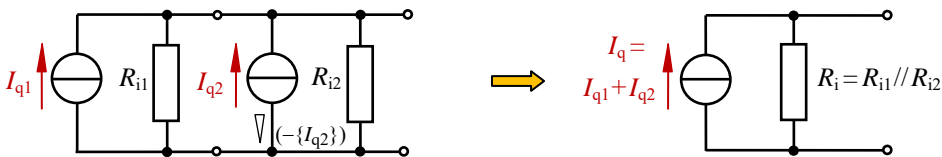


Bild 3.15: Parallelschaltung von Stromquellen

Bei einer gleichsinnigen Parallelschaltung von Stromquellen (Bild 3.15) addieren sich die Quellenströme, und bei einer gegensinnigen Parallelschaltung werden die Quellenströme voneinander subtrahiert (∇).

Für Reihenschaltungen von Stromquellen gelten die Aussagen analog zu den parallel geschalteten Spannungsquellen. Danach sollen Stromquellen nur gleichsinnig und mit gleichen Werten der Quellenströme in Reihe geschaltet werden.

Lehrbeispiel 3.4:

Über zwei Kabel mit einem Leitungswiderstand $R_l = 5 \text{ m}\Omega$ werden zwei Akkumulatoren mit den Quellenspannungen U_A und U_B miteinander verbunden (z.B. Starthilfe beim Kraftfahrzeug). Die Quellen haben folgende Daten:

Quelle A: $U_A = 13,6 \text{ V}$ $R_{iA} = 20 \text{ m}\Omega$ Quelle B: $U_B = 13,0 \text{ V}$ $R_{iB} = 30 \text{ m}\Omega$

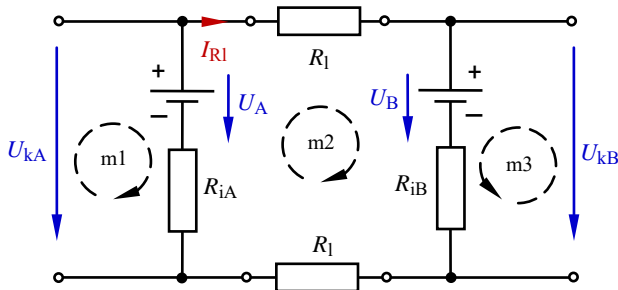


Bild 3.16: Schaltung zum Lehrbeispiel 3.4

- Welcher Ausgleichsstrom I_{Rl} fließt in den Starter-Hilfskabeln?
- Berechnen Sie die Klemmenspannungen U_{kA} und U_{kB} an den Akkumulatoranschlüssen.
- Welcher Ausgleichsstrom I_{Rl} (c) würde fließen, wenn man die Akkumulatoren gegensinnig zusammenschalten würde (z.B. $U_B \uparrow$)?
- Ermitteln Sie für den Fall c) die Klemmenspannungen U_{kA} (c) und U_{kB} (c).

Zu a) Zur Bestimmung dieses Stromes wird der Maschensatz verwendet (m2):

$$I_{Rl} \cdot (R_l + R_{iB} + R_l + R_{iA}) + U_B - U_A = 0 \quad \text{bzw.:} \quad I_{Rl} = \frac{U_A - U_B}{R_{iA} + R_{iB} + 2R_l} = \frac{0,6 \text{ V}}{60 \text{ m}\Omega} = 10 \text{ A}$$

Zu b) Diese Spannungsabfälle kann man über die Maschen m1 und m3 ermitteln:

$$U_{kA} = U_A - I_{Rl} \cdot R_{iA} = 13,4 \text{ V} \quad \text{und:} \quad U_{kB} = U_B + I_{Rl} \cdot R_{iB} = 13,3 \text{ V}$$

Zu c) Die Masche m2 erfasst jetzt die Quelle U_B (\uparrow) mit einem negativen Vorzeichen:

$$I_{Rl} \cdot (R_l + R_{iB} + R_l + R_{iA}) - U_B - U_A = 0$$

Somit addieren sich die Werte der Quellenspannungen und es fließt ein großer Ausgleichsstrom.

$$I_{Rl}(c) = \frac{U_A + U_B}{R_{iA} + R_{iB} + 2R_l} = \frac{26,6 \text{ V}}{60 \text{ m}\Omega} = 443,3 \text{ A}$$

$$\text{Zu d) } U_{kA}(c) = U_A - I_{Rl}(c) \cdot R_{iA} = 4,73 \text{ V} \quad \text{und:} \quad U_{kB}(c) = -U_B + I_{Rl}(c) \cdot R_{iB} = 0,3 \text{ V}$$

Der Vergleich mit b) zeigt, dass sich die Klemmenspannungen infolge des großen Ausgleichsstromes stark verändern. Die Leerlaufspannungen der Quellen verlieren ihre Wirkung.

3.5 Lastfälle im Grundstromkreis

In diesem Abschnitt soll das Zusammenwirken eines aktiven und eines passiven Zweipols (hier: einer realen linearen Quelle und eines linearen Lastwiderstandes, siehe Bilder 3.12 und 3.17) betrachtet werden. Die Quelle wird als Spannungsquelle aufgefasst und mit einem variablen Widerstand $0 \leq R_a \leq \infty$ belastet. In dieser Reihenschaltung fließt ein Strom $I = I_a$.

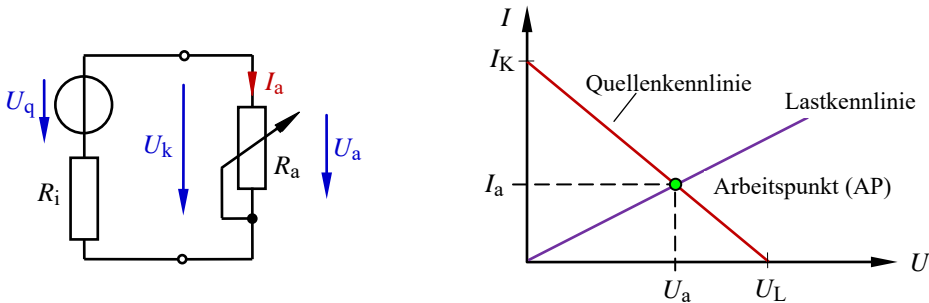


Bild 3.17: Grundstromkreis mit variabler Last (links) und Darstellung eines Lastfalls (rechts)

Die beiden Last-Grenzfälle werden mit den Begriffen Kurzschluss ($R_a \rightarrow 0$) und Leerlauf ($R_a \rightarrow \infty$) bezeichnet.

Im Kurzschlussfall (K) gilt: $U_a(K) = U_k = 0$ und: $I_a(K) = \frac{U_q}{R_i} = I_K$

Im Leerlauffall (L) gilt: $U_a(L) = U_k = U_q = U_L$ und: $I_a(L) = 0$

3.5.1 Leistung und Wirkungsgrad

Der Leistungsumsatz P_a in einem Lastwiderstand R_a ist vom Spannungsabfall U_a über der Last und vom Strom I_a durch die Last abhängig.

Im Kurzschlussfall fließt der maximal mögliche Strom (Kurzschlussstrom I_K). Es fällt jedoch keine Spannung über $R_a = 0$ ab, und es wird demzufolge auch keine Leistung in R_a umgesetzt. Es gilt: $P_a(K) = 0 \cdot I_K = 0 \text{ W}$.

Im Leerlauffall liegt die maximal mögliche Spannung (Leerlaufspannung U_L) über dem Lastwiderstand. Jetzt fließt aber kein Strom mehr ($R_a \rightarrow \infty$), sodass auch in diesem Fall keine Leistung in R_a umgesetzt wird. Es gilt: $P_a(L) = U_L \cdot 0 = 0 \text{ W}$.

Alle Betriebsfälle $0 < R_a < \infty$ liegen zwischen dem Leerlauffall und dem Kurzschlussfall (Bild 3.17 – rechts). Sie sind durch einen definierten Leistungsumsatz P_a im Lastwiderstand gekennzeichnet. Die jeweilige Leistung $P_a = U_a \cdot I_a$ wird von der Lage des Arbeitspunktes in der Strom-Spannungs-Kennlinie (Bild 3.17) bestimmt. Bezieht man die im Lastwiderstand umgesetzte Leistung $P_a = P_{ab}$ auf die von der Quelle zugeführte Leistung P_{zu} , so

erhält man den Wirkungsgrad für eine der beiden Ersatzschaltungen (Spannungs- oder Stromquelle) eines elektrischen Stromkreises.

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} \quad (3.13)$$

Die im Lastwiderstand umgesetzte Leistung P_{ab} wird über das Verbraucher-Zählpfeilsystem und die von der Quelle zugeführte Leistung P_{zu} wird über das Quellen-Zählpfeilsystem beschrieben. Dieser Wirkungsgrad gilt immer nur für eine vom Anwender definierte Schnittstelle, die den elektrischen Stromkreis in einen aktiven und einen passiven Zweipol trennt.

Der Wirkungsgrad einer schaltungstechnischen Anordnung beschreibt das Verhältnis von der im Lastwiderstand umgesetzten Leistung zu der durch die Quelle zugeführten Leistung.

Beschreibt man den aktiven Zweipol über eine reale Spannungsquelle (Bild 3.12 – links), so ergibt sich folgender Wirkungsgrad:

$$\eta_U = \frac{P_a}{P_q} = \frac{U_a \cdot I_a}{U_q \cdot I_a} = \frac{U_a}{U_q} = \frac{R_a}{R_i + R_a} \quad (3.14)$$

Fasst man dagegen den aktiven Zweipol als reale Stromquelle auf (Bild 3.12 – rechts), so ergibt sich ein anderer Wirkungsgrad:

$$\eta_I = \frac{P_a}{P_q} = \frac{U_a \cdot I_a}{U_a \cdot I_q} = \frac{I_a}{I_q} = \frac{R_i}{R_i + R_a} \quad (3.15)$$

Addiert man die beiden Wirkungsgrade, so erhält man folgende Aussage:

$$\eta_U + \eta_I = \frac{R_a}{R_i + R_a} + \frac{R_i}{R_i + R_a} = 1$$

Das bedeutet, dass sich die Wirkungsgrade einer Anordnung mit einer realen Spannungsquelle und einer Anordnung mit einer realen Stromquelle zu 100 % (ideale elektrische Quelle) ergänzen. Fasst man eine belastete reale Spannungsquelle mit dem Wirkungsgrad η_U als belastete reale Stromquelle mit η_I auf, so verändert sich der Wirkungsgrad auf den Wert $\eta_I = 1 - \eta_U$ (und umgekehrt).

Eine ideale Spannungsquelle ($R_i = 0$) würde infolge $U_a = U_q$ einen Wirkungsgrad von 100% aufweisen. Eine ideale Stromquelle ($R_i \rightarrow \infty$) hätte dann mit $I_a = I_q$ ebenfalls den Wirkungsgrad von 100%. Ideale Quellen gibt es aber nicht.

3.5.2 Anpassungsfall

Viele praktische Anwendungsfälle (insbesondere in der Nachrichten- und Datentechnik) verfolgen das Ziel, die geringen Leistungen, die innerhalb eines Übertragungsprozesses

verfügbar sind, in maximaler Form im Lastwiderstand umzusetzen. Hier steht die Frage nach der Größe des Lastwiderstandes für $P_a \rightarrow \max.$ im Vordergrund.

Eine Funktion $y = f(x)$ durchläuft an der Stelle x ein Maximum (oder ein Minimum), an der der Anstieg der Funktion gleich null ist. Für die weiteren Überlegungen interessiert hier der Zusammenhang $P_a = f(R_a)$.

$$\text{Mit } I_a = \frac{U_q}{R_i + R_a} \text{ erhält man: } P_a = U_a \cdot I_a = I_a^2 \cdot R_a = \frac{U_q^2 \cdot R_a}{(R_i + R_a)^2}$$

Zur Bestimmung des Anstieges der Funktion wird mit der Quotientenregel die erste Ableitung gebildet und null gesetzt:

$$\frac{dP_a}{dR_a} = \frac{U_q^2 (R_i + R_a)^2 - U_q^2 \cdot 2R_a (R_i + R_a)}{(R_i + R_a)^4} = 0$$

Ein Bruch ist null, wenn der Zähler gleich null ist: $U_q^2 (R_i + R_a)^2 = U_q^2 \cdot 2R_a (R_i + R_a)$

Durch Kürzen erhält man $R_i + R_a = 2R_a$ und somit Gleich. (3.16).

$$R_a = R_i \quad (3.16)$$

- Ein Lastwiderstand ist zum Zwecke der maximalen Leistungsaufnahme an den Innenwiderstand der Quelle anzupassen (Leistungsanpassung).

Im Anpassungsfall liegt über $R_a = R_i$ die halbe Leerlaufspannung, und es fließt der halbe Kurzschlussstrom (vgl. Bild 3.17 – rechts). Daraus kann die maximal umsetzbare Leistung berechnet werden:

$$P_{a,\max} = U_a \cdot I_a \Big|_{R_i=R_i} = \frac{U_L}{2} \cdot \frac{I_K}{2}$$

Der Kurzschlussstrom ergibt sich über das OHMSche Gesetz. Es gilt: $I_K = U_L / R_i$.

$$P_{a,\max} = \frac{U_L^2}{4R_i} = \frac{I_K^2 \cdot R_i}{4} \quad (3.17)$$

Lehrbeispiel 3.5:

Auf welchen Widerstandswert muss R_4 im Bild 3.18 eingestellt werden, damit die Verbraucherleistung P_{AB} maximal wird? Geg.: $R_i = 20 \, \Omega$; $R_1 = 30 \, \Omega$; $R_2 = R_3 = 20 \, \Omega$

Lösung: Der an den Punkten A und B angeschlossene Widerstand $R_{AB} = R_a$ muss gleich dem Innenwiderstand R_i der Quelle sein (Anpassung).

Dann gilt: $R_i = R_a = R_1 // (R_2 + R_3 + R_4) = \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$

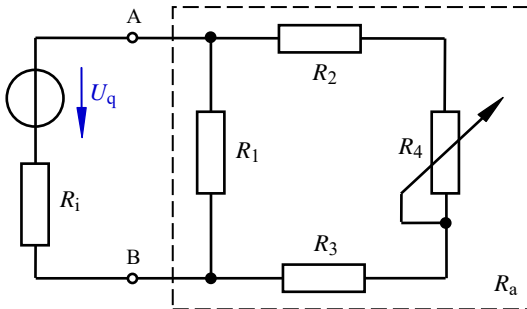


Bild 3.18: Schaltung zum Lehrbeispiel 3.5

Durch Umstellen nach R_4 erhält man das Ergebnis: $R_4 = \frac{R_1 \cdot (R_1 + R_2 + R_3) - R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 - R_i} = 20 \, \Omega$

3.5.3 Diskussion von Lastfällen

Die aktuellen Lastverhältnisse in einem Grundstromkreis können aus seiner Strom-Spannungs-Kennlinie abgelesen werden. Die Verbindungsgerade zwischen der Leerlaufspannung und dem Kurzschlussstrom wird als Quellenkennlinie bezeichnet (vgl. Bild 3.17). Der Kehrwert ihres Anstieges ist ein Maß für den Innenwiderstand der Quelle ($\tan \alpha$ im Bild 3.11).

$$R_i = \frac{U_L}{I_K} \quad (3.18)$$

Zeichnet man nun noch die Lastwiderstandsgerade für R_a ein, so ergibt sich ein Schnittpunkt, der als Arbeitspunkt AP bezeichnet wird (Bild 3.17 – rechts und Bild 3.19).

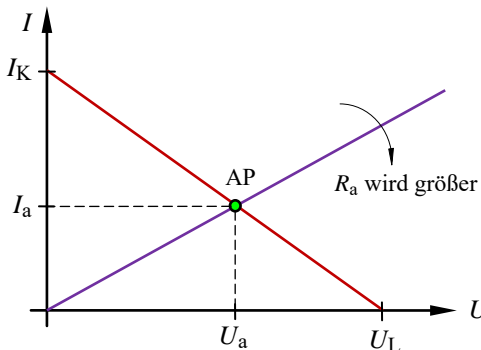


Bild 3.19: Änderung des Arbeitspunktes bei Variation des Lastwiderstandes

Bei kleinen Lastwiderständen liegt der Arbeitspunkt in der Nähe des Kurzschlussstromes I_K . Mit Vergrößerung des Lastwiderstandes wandert der Arbeitspunkt auf der Quellenkennlinie in Richtung der Leerlaufspannung U_L .

- Der Anpassungsfall ist dadurch gekennzeichnet, dass der Arbeitspunkt bei $0,5 \cdot U_L$ und $0,5 \cdot I_K$ und somit genau auf der „Mitte“ der Quellenkennlinie liegt.

Lehrbeispiel 3.6:

Gegeben ist ein Grundstromkreis mit U_L und R_i . Wie verändern sich die Größen U_a , I_a , P_a und η_U bei Variation des Lastwiderstandes? Erarbeiten Sie dazu eine Tabelle, die eine Übersicht zum Wert der jeweiligen Größe bei Kurzschluss (K), im Anpassungsfall (A) und bei Leerlauf (L) gibt.

Tabelle 3.1: Spezielle Lastfälle im Grundstromkreis

	R_a	U_a	I_a	P_a	η_U
K:	0	0	I_K	0	0
A:	R_i	$\frac{U_L}{2}$	$\frac{I_K}{2}$	$\frac{U_L \cdot I_K}{4}$	0,5
L:	∞	U_L	0	0	1

Daraus kann dann eine allgemeingültige Funktionsdarstellung abgeleitet werden. Zur Normierung bezieht man die Variablen auf feste Größen (Bezugsgrößen).

Solche normierten Darstellungen $\frac{y}{y_0} = f \left\{ \frac{x}{x_0} \right\}$ weisen gegenüber einer normalen Funktionsdarstellung

$y = f(x)$ folgende Vorteile auf und werden aus diesen Gründen auch häufig in der Elektrotechnik angewendet:

- Durch die Relativdarstellung sind alle aus dem Funktionsverlauf ableitbaren Aussagen in allgemeiner Form gültig und somit unabhängig von den aktuellen Werten der Quelle und der Last.
- Die Achseneinteilung ist ohne Kenntnis der Werte der Bauelemente und unabhängig von den Einheiten der darzustellenden Größen möglich.
- Eine normierte Darstellung kann problemlos in eine logarithmische Darstellung überführt werden.

Für Funktionsdarstellungen innerhalb des Grundstromkreises bietet sich die Normierung in der Art an, dass man Spannungen auf die Leerlaufspannung, Ströme auf den Kurzschlussstrom und Leistungen auf die maximal umsetzbare Leistung bezieht (Bild 3.20). So erhält jede Ordinatenachse eine Einteilung zwischen null und eins (vgl. [11] – Lehrbeispiel 1.3). Die Einteilung der Abszissenachse wird übersichtlich, wenn man den variablen Lastwiderstand auf den Innenwiderstand der Quelle bezieht.

Der Spannungsverlauf im Bild 3.20 a) beschreibt zugleich den Verlauf des Wirkungsgrades, wenn die Quelle als Spannungsquelle aufgefasst wird. Der Stromverlauf im Bild 3.20 b) beschreibt zugleich den Verlauf des Wirkungsgrades, wenn die Quelle als Stromquelle aufgefasst wird.

Die Leistung durchläuft bei $R_a = R_i$ ihr Maximum [Gleich. (3.16) und (3.17)].

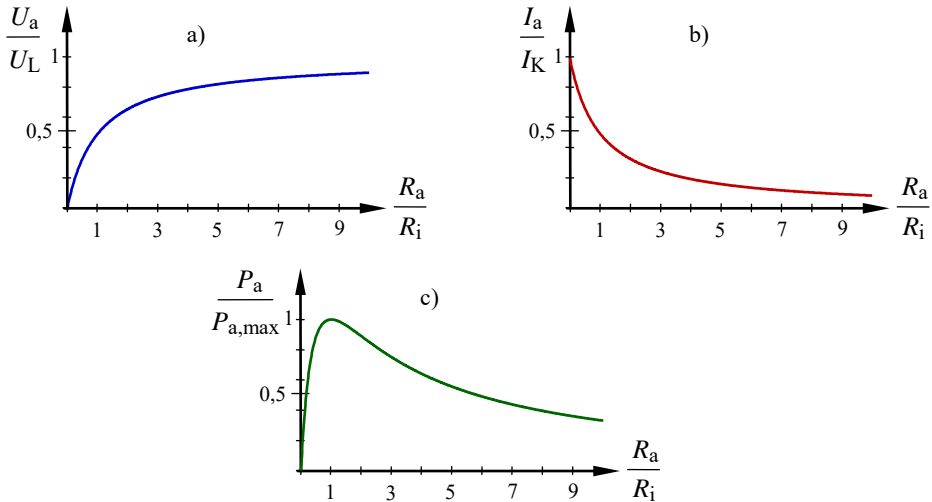
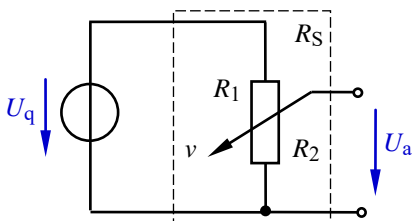


Bild 3.20: Funktionsdarstellung bei variabler Last
a) Spannungsverlauf b) Stromverlauf c) Leistungsverlauf

3.5.4 Belasteter Spannungsteiler

Viele schaltungstechnische Realisierungen (z.B. Verstärkerschaltungen, u.v.a.) benötigen mehrere Versorgungsspannungen. Da aus Aufwandsgründen nicht für jede Spannung ein Netzteil verwendet werden kann, setzt man häufig Spannungsteilerschaltungen ein. Sie sollen eine geringe Leistungsaufnahme haben und ein möglichst lineares Verhalten aufweisen.

Bei einem unbelasteten Spannungsteiler ändert sich die Ausgangsspannung U_a linear mit der Schleiferstellung v des Stellwiderstandes $R_S = R_1 + R_2$ (Bild 3.21).



$$\frac{U_a}{U_q} = \frac{R_2}{R_S} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = v \quad (3.19)$$

Bild 3.21: Unbelasteter Spannungsteiler

Bei einem belasteten Spannungsteiler (Bild 3.22) ändert sich dagegen infolge der Existenz des Lastwiderstandes R_a die Ausgangsspannung U_a nicht mehr linear mit der Schleiferstellung v des Stellwiderstandes $R_S = R_1 + R_2$.

Das nichtlineare Verhalten entsteht durch die variable Widerstandskombination $R_2 // R_a$. Es wird ein Festwiderstand (R_a) zu einem veränderlichen Widerstand (R_2) parallel geschaltet.

Die Schleiferstellung v' kann über die Spannungsteilerregel berechnet werden.

$$v' = \frac{U_a}{U_q} = \frac{R_2 // R_a}{R_1 + R_2 // R_a} = \frac{R_2 \cdot R_a}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_a + R_2 \cdot R_a}$$

$$v' = \frac{U_a}{U_q} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_a}} \quad (3.20)$$

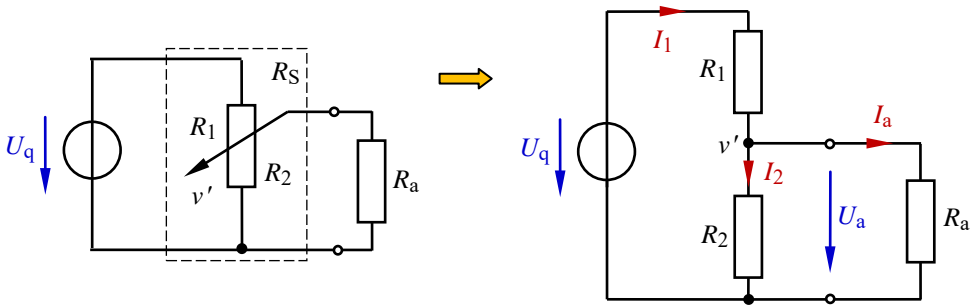


Bild 3.22: Belasteter Spannungsteiler

Nun wird deutlich, dass der Ausdruck $R_1 \cdot R_2 / R_a$ in Gleich. (3.20) das nichtlineare Verhalten eines belasteten Spannungsteilers [vgl. Gleich. (3.19) und (3.20) miteinander] bewirkt.

Dimensioniert man einen belasteten Spannungsteiler jedoch so, dass der Lastwiderstand viel größer als der Stellwiderstand ist [$R_a \gg (R_1 + R_2)$], so erhält man ein nahezu lineares Verhalten des Teilers.

- In der schaltungstechnischen Praxis gilt die Regel, dass diese Bedingung schon hinreichend erfüllt ist, wenn der „Querstrom des Teilers“ I_2 fünf- bis zehnmal größer als der Laststrom I_a ist. Die Ausgangsspannung U_a ändert sich dann fast linear mit der Schleiferstellung, und der Querstrom I_2 bleibt nahezu konstant (vgl. Bild 3.22 – rechts).

$$I_2 \approx (5 \dots 10) \cdot I_a \quad (3.21)$$

Lehrbeispiel 3.7:

Eine Quelle mit $U_q = 10 \text{ V}$ und einem Stellwiderstand $R_S = R_1 + R_2 = 100 \Omega$ wird mit verschiedenen Widerständen R_a belastet (wie im Bild 3.22). Berechnen Sie die Ausgangsspannung U_a über dem Lastwiderstand als Funktion von R_2 für $R_a = \infty$, $1 \text{ k}\Omega$, 100Ω und 10Ω (z.B. mit EXCEL).

Für die verschiedenen Spannungen über R_a soll folgende Zuordnung gelten:

$$U_{a1} \text{ für } R_{a1} = \infty, \quad U_{a2} \text{ für } R_{a2} = 1 \text{ k}\Omega, \quad U_{a3} \text{ für } R_{a3} = 100 \Omega, \quad U_{a4} \text{ für } R_{a4} = 10 \Omega.$$

Stellen Sie die Funktionsverläufe $U_{ax} = f(R_2)$ und $I_{2x} = f(R_2)$ in jeweils einem Diagramm mit R_a als Parameter grafisch dar. Diskutieren Sie diese Verläufe aus der Sicht des Anwenders.

Tabelle 3.2: Wertetabelle zum Lehrbeispiel 3.7

R_2 / Ω	U_{a1} / V	U_{a2} / V	U_{a3} / V	U_{a4} / V	R_2 / Ω	U_{a1} / V	U_{a2} / V	U_{a3} / V	U_{a4} / V
0	0	0	0	0	60	6	5,86	4,84	1,76
10	1	0,99	0,92	0,53	70	7	6,86	5,78	2,26
20	2	1,97	1,72	0,77	80	8	7,87	6,9	3,08
30	3	2,94	2,48	0,97	90	9	8,92	8,26	4,74
40	4	3,91	3,23	1,18	100	10	10	10	10
50	5	4,88	4,0	1,43					

Die Wertetabelle zeigt, dass sich die Ausgangsspannung bei $R_{a2} = 1 \text{ k}\Omega$ noch nahezu linear mit der Schleiferstellung ändert. Sie weicht im ungünstigsten Fall ($R_2 = 50 \Omega$) um 2,4 % vom Verhalten eines unbelasteten Spannungsteilers ($R_{a1} = \infty$) ab. Der in der Tabelle 3.2 nicht berechnete Querstrom bleibt bei R_{a2} nahezu konstant.

Mit zunehmender Belastung (R_a wird kleiner \downarrow) nimmt das nichtlineare Verhalten des Teilers zu. Diese Sachverhalte werden noch deutlicher, wenn man die Funktionen $U_{ax} = f(R_2)$ und $I_{2x} = f(R_2)$ in jeweils einem Diagramm mit R_a als Parameter grafisch darstellt (Bild 3.23). Bei $R_{a4} = 0,1 \cdot R_S = 10 \Omega$ können Spannungswerte von $U_a > 0,5 \cdot U_q$ nur noch mit einer Einstellung $R_2 > 0,9 \cdot R_S$ erreicht werden.

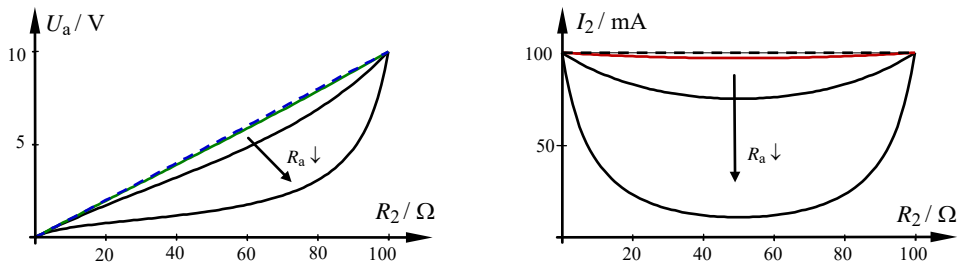


Bild 3.23: Funktionsdarstellungen zum Lehrbeispiel 3.6

Mit einem unendlich großen Lastwiderstand (gestrichelte Geraden im Bild 3.23) arbeitet der Teiler als unbelasteter Teiler linear. Ein Lastwiderstand, der um den Faktor 10 größer ist als der Stellwiderstand, führt aus praktischer Sicht noch zu einer akzeptablen linearen Arbeitsweise des Teilers [vgl. Gleich. (3.21)]. Eine weitere Verringerung des Verhältnisses zwischen Lastwiderstand und Stellwiderstand ist bezüglich der Forderung nach einem linearen Verhalten nicht vertretbar. Die Ausgangsspannung ändert sich dann extrem nichtlinear (Bild 3.23 – links) und der Querstrom weist große Änderungen auf.

Schlussfolgerung: Ein belasteter Spannungsteiler sollte so dimensioniert werden, dass der Wert des Lastwiderstandes hinreichend größer als der Wert des Stellwiderstandes ist. Es gilt: $R_a \gg R_S$.

In der Praxis kann man sich den Lastwiderstand aber in der Regel nicht aussuchen. Demzufolge ist der Stellwiderstand an die Forderung $R_a \gg R_S$ anzupassen. Berücksichtigt man dabei die Empfehlung der Gleich. (3.21) in Kombination mit der Aussage des Bildes 3.23 über den Faktor 10, so ergibt sich die folgende Situation: $R_S = R_a / 10 = 0,1 \cdot R_a$.

4 Grundsaltungen der elektrischen Messtechnik

4.1 Messbereichserweiterung

Mit einem unbeschalteten Messwerk kann man nur relativ kleine Spannungen und Ströme (Vollausschlagspannung U_M und Vollausschlagstrom I_M) messen. Zur Vergrößerung der messbaren Spannung bzw. des messbaren Stromes ist eine Erweiterung des Messbereiches erforderlich. Man spricht dann von einem Messgerät (Messwerk mit Messzubehör).

Messwerke nehmen Leistung auf. Diese Leistung wird aus dem Produkt von Vollausschlagspannung und Vollausschlagstrom berechnet. Es gilt: $P_M = U_M \cdot I_M$.

Messwerke besitzen demzufolge einen nicht vernachlässigbaren Innenwiderstand, der diese Leistung aufnimmt und zur Verfälschung von Messergebnissen führt.

$$R_{iM} = \frac{U_M}{I_M} \quad (4.1)$$

• Spannungsmessbereichserweiterung:

Zur Vergrößerung der messbaren Spannung um den Erweiterungsfaktor n ist zu einem Messwerk ein Vorwiderstand R_V in Reihe zu schalten (Bild 4.1).

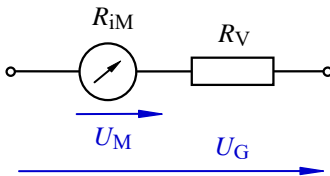


Bild 4.1: Schaltung zur Erweiterung des Spannungsmessbereiches

Der Vorwiderstand muss einen Spannungsabfall erzeugen, der genau der Differenz zwischen einer maximal zu messenden Spannung U_G (Mess-Gerät) und der Vollausschlagspannung U_M (Messwerk) entspricht.

$$\frac{U_M}{U_G} = \frac{R_{iM}}{R_{iM} + R_V} = \frac{1}{n} \quad \text{bzw.:} \quad n \cdot R_{iM} = R_{iM} + R_V$$

$$R_V = R_{iM} \cdot (n - 1) \quad (4.2)$$

Durch den Vorwiderstand vergrößert sich der resultierende Innenwiderstand der Messanordnung. Der Hersteller von Vielfachmessgeräten gibt dem Anwender einen Umrechnungsfaktor an, der als spannungsbezogener Innenwiderstand (z.B.: $R_{iV}^* / U = 20 \text{ k}\Omega / \text{V}$) bezeichnet wird. Der tatsächliche Innenwiderstand eines Spannungsmessgerätes ergibt sich

dann aus dem eingestellten Messbereich MB_U , multipliziert mit dem spannungsbezogenen Innenwiderstand.

$$R_{iG} = MB_U \cdot \frac{R_{iV}^*}{U} \quad (4.3)$$

• Strommessbereichserweiterung:

Zur Vergrößerung des messbaren Stromes um den Erweiterungsfaktor n wird zum Messwerk ein Nebenwiderstand R_N parallel geschaltet (Bild 4.2).

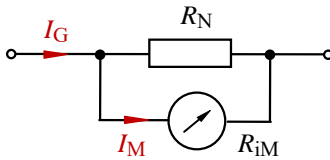


Bild 4.2: Schaltung zur Erweiterung des Strommessbereiches

Durch den Widerstand R_N muss die Differenz zwischen dem maximal zu messenden Strom I_G und dem Vollausschlagstrom I_M fließen.

$$\frac{I_M}{I_G} = \frac{R_N}{R_N + R_{iM}} = \frac{1}{n} \quad \text{bzw.:} \quad n \cdot R_N = R_N + R_{iM}$$

$$R_N = \frac{R_{iM}}{n - 1} \quad (4.4)$$

Lehrbeispiel 4.1:

Ein Messwerk soll in einem Vielfachmessgerät eingesetzt werden. Es hat eine Vollausschlagspannung von $U_M = 100 \text{ mV}$ und einen Vollausschlagstrom von $I_M = 30 \text{ }\mu\text{A}$.

Berechnen Sie die erforderlichen Widerstände zur Messbereichserweiterung für:

- einen Spannungsmessbereich von $U_G = 1,5 \text{ V}$
- einen Strommessbereich von $I_G = 3 \text{ A}$

Zu a) Die geforderte Messbereichserweiterung wird mit der im Bild 4.1 dargestellten Schaltung vorgenommen. Durch beide Elemente fließt der gleiche Strom I_M (\rightarrow).

Für die Spannungen gilt: $U_G = U_M + U_V$

$$R_V = \frac{U_V}{I_M} = \frac{U_G - U_M}{I_M} = \frac{1,4 \text{ V}}{30 \text{ }\mu\text{A}} = 46,6 \text{ k}\Omega$$

Zu b) Die geforderte Messbereichserweiterung wird mit der im Bild 4.2 dargestellten Schaltung vorgenommen. Über beiden Elementen liegt die gleiche Spannung $U_M (\rightarrow)$.

Für die Ströme gilt: $I_G = I_M + I_N$

$$R_N = \frac{U_M}{I_N} = \frac{U_M}{I_G - I_M} = \frac{100 \text{ mV}}{3 \text{ A}} = 33,3 \text{ m}\Omega$$

4.2 Aufnahme von Kennlinien

Das elektrische Verhalten eines Bauelementes kann mit einer oder mehreren Kennlinien (Kap. 6) in sehr übersichtlicher Form beschrieben werden. Zur Aufnahme solcher Kennlinien wird der Zusammenhang zwischen zwei Größen (z.B. Spannung und Strom) unter definierten Randbedingungen in einem vorgegebenen Wertebereich messtechnisch erfasst.

Eine Strom-Spannungs-Kennlinie wird aus einer Reihe von Kombinationsmessungen ermittelt [$I_\nu = f(U_\nu)$]. Die so zu messenden Wertepaare ν ($1 \leq \nu \leq n$) werden mit Messgeräten bestimmt, die infolge ihrer Leistungsaufnahme P_M einen nicht vernachlässigbaren Innenwiderstand R_{iM} besitzen. Diese Innenwiderstände verursachen bei Kombinationsmessungen eine Verfälschung der gemessenen Spannung bei einer stromrichtigen Messung bzw. des gemessenen Stromes bei einer spannungsrichtigen Messung. Der Anwender hat die Aufgabe, eine sinnvolle Entscheidung über die jeweils geeignete Messschaltung zu treffen.

4.2.1 Stromrichtige Messung

Als Messobjekt soll ein ohmscher Widerstand R_x betrachtet werden, an dem eine Kombinationsmessung mit der stromrichtigen Messschaltung (Bild 4.3) durchgeführt wird.

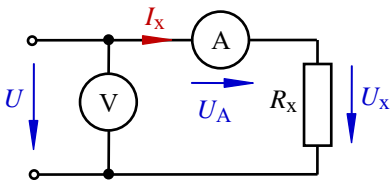


Bild 4.3: Stromrichtige Messung

Für den gemessenen Wert R_x' gilt: $R_x' = \frac{U}{I_x} > R_x = \frac{U_x}{I_x}$

Da die Gesamtspannung U größer als der Spannungsabfall U_x ist, wird ein zu großer Widerstandswert bestimmt. Durch Einsetzen von $U_x = U - U_A$ kann folgende Messwertkorrektur vorgenommen werden:

$$R_x = \frac{U_x}{I_x} = \frac{U - U_A}{I_x} = \frac{U}{I_x} - \frac{U_A}{I_x} = \frac{U}{I_x} - R_{iA}$$

$$R_x = R_x' - R_{iA} \quad (4.5)$$

Diese Messschaltung sollte man anwenden, wenn der Innenwiderstand des Strommessers viel kleiner als der Widerstand des Messobjektes ist. Dann gilt: $R_x \approx R_x'$.

$$R_{iA} \ll R_x \quad (4.6)$$

Wenn diese Bedingung nicht oder nur unzureichend erfüllt ist, muss die spannungsrichtige Messschaltung verwendet oder eine Korrekturrechnung mit (4.5) durchgeführt werden. Der Innenwiderstand des Strommessers verfälscht ansonsten das Ergebnis der Messung.

4.2.2 Spannungsrichtige Messung

Nun wird die Messung mit der spannungsrichtigen Messschaltung durchgeführt. Da der Gesamtstrom I größer als der Strom I_x ist, wird für das Messobjekt ein zu kleiner Widerstandswert ermittelt.

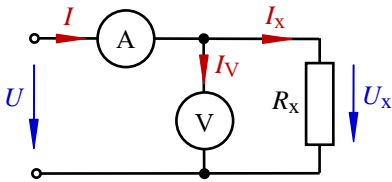


Bild 4.4: Spannungsrichtige Messung

Für den gemessenen Wert R_x'' gilt: $R_x'' = \frac{U_x}{I} < R_x = \frac{U_x}{I_x}$

Durch Einsetzen von $I_x = I - I_V$ ist wieder eine Messwertkorrektur möglich.

$$R_x = \frac{U_x}{I_x} = \frac{U_x}{I - I_V} = \frac{1}{\frac{I}{U_x} - \frac{I_V}{U_x}}$$

$$R_x = \frac{1}{\frac{1}{R_x''} - \frac{1}{R_{iV}}} \quad (4.7)$$

Diese Messschaltung sollte man anwenden, wenn der Innenwiderstand des Spannungsmessers viel größer als der Widerstand des Messobjektes ist. Dann gilt: $R_x \approx R_x''$.

$$R_{iV} \gg R_x \quad (4.8)$$

Wenn diese Bedingung nicht oder nur unzureichend erfüllt ist, muss die stromrichtige Messschaltung verwendet oder eine Korrekturrechnung mit Gleich. (4.7) durchgeführt werden. Der Innenwiderstand des Voltmeters verfälscht ansonsten das Ergebnis der Messung.

Lehrbeispiel 4.2:

Welche Widerstandswerte ermittelt man für R_x (siehe Tabelle 4.1) mit der spannungsrichtigen (R_x'') und der stromrichtigen (R_x') Messung? Geg.: $R_{iA} = 2 \Omega$ und $R_{iV} = 50 \text{ k}\Omega$

Tabelle 4.1: Lösungen zum Lehrbeispiel 4.2

R_x	$R_x'' = R_x \parallel R_{iV}$		$R_x' = R_x + R_{iA}$	
1 Ω	1 Ω	✓	3 Ω	
10 Ω	9,99 Ω	✓	12 Ω	
100 Ω	99,8 Ω	✓	102 Ω	
1 k Ω	980,4 Ω		1002 Ω	✓
10 k Ω	8,33 k Ω		10002 Ω	✓
100 k Ω	33,33 k Ω		100 k Ω	✓

Das Häkchen (✓) soll auf die jeweils günstigere Messschaltung hinweisen:

Spannungsrichtig: $R_x'' = R_x \parallel R_{iV}$

Stromrichtig: $R_x' = R_x + R_{iA}$

4.3 Messgeräte mit Nullindikator

Messtechnische Anordnungen mit Nullabgleich arbeiten nach der Kompensationsmethode. Ihr Funktionsprinzip ist dem einer Balkenwaage, bei der ein Massevergleich mit dem Ziel des Gleichgewichts einer unbekannten Masse mit einem Massennormal durchgeführt wird, sehr ähnlich. Wenn es sich dabei um eine Schaltung mit zwei Spannungsquellen handelt, spricht man von einer Kompensatorschaltung. Sie wird z.B. zur sehr genauen Messung von Spannungen eingesetzt (Bild 4.5).

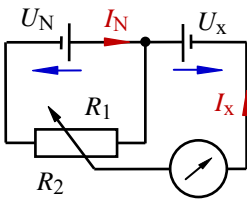


Bild 4.5: Prinzip einer Kompensatorschaltung

Mit dem Widerstandsverhältnis R_1/R_2 wird die Anordnung so abgeglichen, dass der Strom I_x null wird. Dann fließt in der Schaltung nur noch ein Strom I_N , und die Spannungsteilerregel liefert eine Aussage zum unbekannten Spannungswert U_x .

$$U_x = U_N \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (4.9)$$

Besteht die Schaltung dagegen aus parallelen Zweigen, die in der Mitte durch einen Querzweig miteinander verbunden sind (Brückenzweig zwischen den Punkten C und D im Bild 4.6), so spricht man von einer Brückenschaltung.

Eine typische Messanordnung dieser Art ist die WHEATSTONEsche Brückenschaltung. Sie wird im Gleichstromkreis zur Messung von unbekannten Widerstandswerten R_x eingesetzt. Im unabgeglichenen Zustand (Bild 4.6) fließt ein Strom I_G durch das Galvanometer im Querzweig der Brücke. Ein Galvanometer ist ein Strommesser mit beidseitigem Ausschlag und der Nullpunktanzeige in der Skalenmitte.

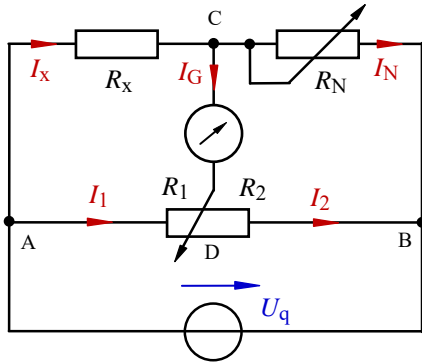


Bild 4.6: WHEATSTONEsche Brückenschaltung

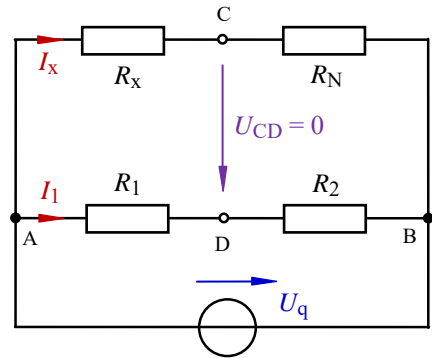


Bild 4.7: Abgeglichene Brückenschaltung

Durch Veränderung des Normalwiderstandes R_N (Grobabgleich) und des Widerstandsverhältnisses R_1/R_2 (Feinabgleich) kann der Strom im Querzweig der Brücke auf $I_G = 0$ abgeglichen werden. Dieser abgeglichene Zustand vereinfacht die Schaltung (Bild 4.7), in der das Potential im Punkt C gleich dem Potential des Punktes D ist ($U_{CD} = 0$).

Im oberen Zweig und im mittleren Zweig fließt jetzt jeweils nur noch ein Strom. Wenn die Potentialdifferenz zwischen den Punkten C und D null ist ($U_{CD} = 0$), sind die Spannungen über R_x und R_1 gleich groß. Gleiches gilt für die Spannungen über R_N und R_2 . Dann muss auch das Verhältnis der beiden Spannungen in der oberen Reihenschaltung gleich dem Verhältnis der beiden Spannungen in der unteren Reihenschaltung sein. Es gilt:

$$\frac{U_x}{U_N} = \frac{U_1}{U_2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{I_x \cdot R_x}{I_x \cdot R_N} = \frac{I_1 \cdot R_1}{I_1 \cdot R_2}$$

Durch Kürzen der Ströme erhält man die so genannte Brückengleichung.

$$R_x = R_N \cdot \frac{R_1}{R_2} \quad (4.10)$$

Danach errechnet sich ein unbekannter Widerstand aus einem Normalwiderstand R_N , der die Größenordnung des Messobjektes (z.B. 10 Ω , 100 Ω , 1 k Ω , 10 k Ω , ...) angibt und bei einer Brücke als Messbereich eingestellt werden kann, multipliziert mit einem Widerstandsverhältnis R_1/R_2 (Ziffernfolge des gesuchten Widerstandswertes).

Ein weiteres typisches Messgerät mit Nullindikator ist die THOMSONSche Brückenschaltung. Diese Brücke wird zur Messung niederohmiger Widerstände R_x (z.B. für Leitungswiderstände – dicke Linien im Bild 4.8) eingesetzt. Der Widerstand R_N ist ein niederohmiger Präzisionswiderstand. Die Brücke wird mit den Widerständen R_1 und R_3 abgeglichen. Durch Verwendung eines Tandem-Potentiometers (zwei gleiche einstellbare Widerstände auf einer Welle) gilt: $R_1 = R_3$. Die Brückenschaltung wird so dimensioniert, dass R_2 gleich R_4 ist.

Lehrbeispiel 4.3:

Leiten Sie für eine THOMSONSche Brücke die allgemeine Berechnungsvorschrift für den unbekannten Widerstand R_x her. Für die Widerstände der Leitungen gilt: $(R_5 \text{ bis } R_7) \ll (R_1 \text{ bis } R_4)$.

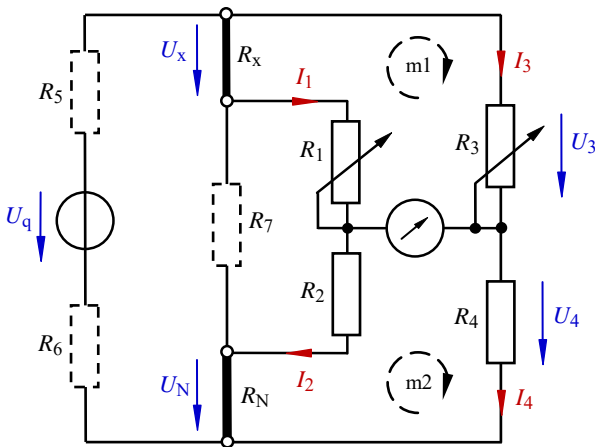


Bild 4.8: THOMSONSche Brücke

Im abgeglichenen Zustand ($I_G = 0$) gilt: $I_1 = I_2$ sowie: $I_3 = I_4$ und: $I_x = I_N$

Durch Bestimmung der Spannung U_x kann eine Berechnungsvorschrift für R_x gefunden werden.

Für die Masche m1 gilt: $U_3(\downarrow) - U_1(\downarrow) - U_x(\downarrow) = 0$

$$U_x = U_3 - U_1 \quad \Rightarrow \quad I_x \cdot R_x = I_3 \cdot R_3 - I_1 \cdot R_1$$

$$R_x = \frac{I_3 \cdot R_3 - I_1 \cdot R_1}{I_x} = \frac{I_3 \cdot R_3 - I_1 \cdot R_1}{I_N} \quad (*)$$

Zur Berechnung von $I_x = I_N$ dient die Spannung U_4 , die über die Masche m2 bestimmt wird:

$$U_4(\downarrow) - U_N(\downarrow) - U_2(\downarrow) = 0$$

$$U_4 = U_N + U_2 \quad \Rightarrow \quad I_4 \cdot R_4 = I_N \cdot R_N + I_2 \cdot R_2 \quad \text{mit:} \quad I_1 = I_2 \quad \text{und:} \quad I_3 = I_4$$

$$I_3 \cdot R_4 = I_N \cdot R_N + I_1 \cdot R_2$$

Durch Einsetzen und Umstellen erhält man $I_N = I_x$: $I_N = \frac{I_3 \cdot R_4 - I_1 \cdot R_2}{R_N}$ [in Gleich. (*) einsetzen]:

$$R_x = \frac{I_3 \cdot R_3 - I_1 \cdot R_1}{I_N} = R_N \cdot \frac{I_3 \cdot R_3 - I_1 \cdot R_1}{I_3 \cdot R_4 - I_1 \cdot R_2}$$

Mit $R_1 = R_3$ (Tandem-Potentiometer) und $R_2 = R_4$ (Dimensionierung) ergibt sich Gleich. (4.10).

$$R_x = R_N \cdot \frac{I_3 \cdot R_1 - I_1 \cdot R_1}{I_3 \cdot R_2 - I_1 \cdot R_2} = R_N \cdot \frac{(I_3 - I_1) \cdot R_1}{(I_3 - I_1) \cdot R_2} = R_N \cdot \frac{R_1}{R_2}$$

4.4 Allgemeine Berechnung von Brückenschaltungen

In vielen Bereichen der allgemeinen Elektrotechnik findet man brückenähnliche schaltungstechnische Konfigurationen, die sich auf eine schaltungstechnische Struktur zurückführen lassen, die der WHEATSTONESchen Brückenschaltung im nicht abgeglichenen Zustand entspricht (Bild 4.9). Der Widerstand R_5 im Bild 4.9 (rechts) soll den Innenwiderstand des Strommessers nachbilden. Solche Strukturen bestehen aus:

- zwei Widerstandsdrückene ($R_3 - R_5 - R_1$) bzw. ($R_4 - R_2 - R_5$) im Bild 4.9 (rechts) und
- zwei Widerstandsterne ($R_1 - R_5 - R_2$) bzw. ($R_3 - R_4 - R_5$) im Bild 4.9 (rechts).

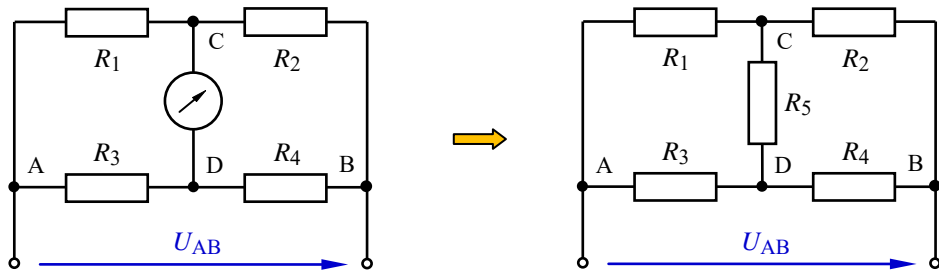


Bild 4.9: Brückenkongfiguration

Für solche Schaltungen kann z.B. der Gesamtwiderstand R_{AB} nicht direkt bestimmt werden. Es ist demzufolge notwendig, eines der beiden Dreiecke ($A - D - C$) oder ($D - B - C$) in eine Sternschaltung oder einen der beiden Sterne (C oder D) in eine Dreieckschaltung umzurechnen.

4.4.1 Allgemeine Umrechnung in eine Sternschaltung

Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen ist eine beliebige Dreipolochaltung. Die innere schaltungstechnische Konfiguration sei nicht bekannt (Bild 4.10). Eine solche Dreipolochaltung kann z.B. durch eine Sternschaltung nachgebildet werden (Bild 4.11). Dazu ist es zunächst erforderlich, die drei Anschlussklemmen einheitlich zu bezeichnen.

Diese Nachbildung wird zur Ersatzschaltung, wenn beide Konfigurationen an allen drei Anschlusspunkten (A , B und C) gleiches elektrisches Verhalten aufweisen. Dann kann die Ersatzschaltung die Aufgabe der originalen Dreipolochaltung übernehmen.

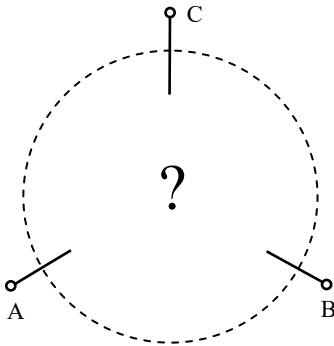


Bild 4.10: Allgemeine Dreipolschaltung

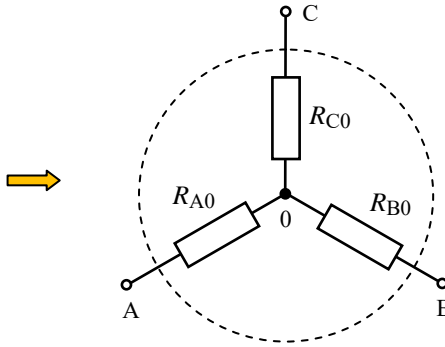


Bild 4.11: Umrechnung in eine Sternschaltung

Dieses gleiche elektrische Verhalten (schaltungstechnische Äquivalenz) ist nur möglich, wenn die Widerstände beider Schaltungen zwischen den Punkten A und B sowie zwischen B und C und auch zwischen den Punkten A und C gleich sind.

$$R_{AB} = R_{A0} + R_{B0} \quad (\text{Punkt C offen})$$

$$R_{BC} = R_{B0} + R_{C0} \quad (\text{Punkt A offen})$$

$$R_{AC} = R_{A0} + R_{C0} \quad (\text{Punkt B offen})$$

Geht man davon aus, dass die Widerstände R_{AB} , R_{BC} und R_{AC} gemessene Werte der strukturell unbekannten Dreipolschaltung (Bild 4.10) sind, so können die Aufbauwiderstände der Ersatzschaltung wie folgt aus den Messwerten berechnet werden:

Zunächst wird die erste Gleichung nach R_{A0} und die zweite Gleichung nach R_{C0} umgestellt.

$$R_{A0} = R_{AB} - R_{B0} \quad (4.11)$$

$$R_{C0} = R_{BC} - R_{B0} \quad (4.12)$$

Diese Ergebnisse werden in die dritte Gleichung eingesetzt:

$$R_{AC} = R_{AB} - R_{B0} + R_{BC} - R_{B0}$$

Durch Umstellen nach R_{B0} erhält man:

$$R_{B0} = \frac{R_{AB} + R_{BC} - R_{AC}}{2} \quad (4.13)$$

Setzt man nun Gleich. (4.13) in die Gleich. (4.11) bzw. (4.12) ein, kann man die beiden anderen Ersatzwiderstände berechnen.

$$R_{A0} = \frac{R_{AB} + R_{AC} - R_{BC}}{2} \quad (4.14)$$

$$R_{C0} = \frac{R_{AC} + R_{BC} - R_{AB}}{2} \quad (4.15)$$

4.4.2 Dreieck-Stern-Transformation

Zur Umrechnung einer Dreieckschaltung in eine äquivalente Sternschaltung (und umgekehrt) benötigt man eine allgemeingültige Berechnungsvorschrift, die auch als Transformation bezeichnet wird.

Die Widerstände der Sternschaltung treffen sich im Sternpunkt 0. Ihre Indizierung ist demzufolge in eindeutiger Form möglich. Die Widerstände der Dreieckschaltung dürfen dagegen nicht mit den Bezeichnungen ihrer Anschlussklemmen indiziert werden. Der Gesamtwiderstand (z.B.) zwischen den Punkten A und C im Bild 4.12 errechnet sich wie folgt: $R_{AC} = R_b \parallel (R_a + R_c)$. Aus diesem Grund werden die einzelnen Aufbauwiderstände der Dreieckschaltung mit der Klemmenbezeichnung des gegenüber liegenden Punktes indiziert. Zur Vermeidung von Verwechslungen wird zusätzlich ein Kleinbuchstabe verwendet.

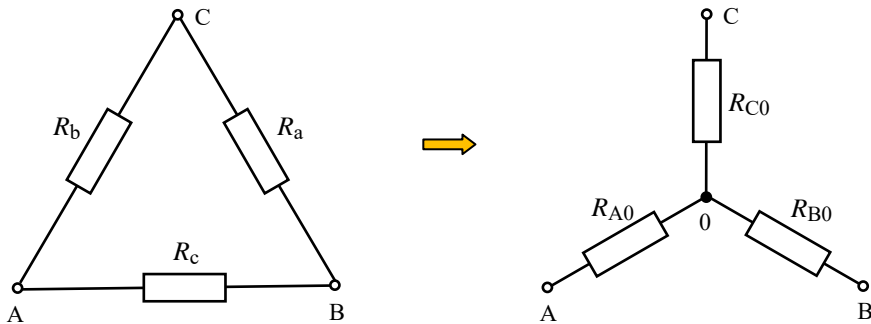


Bild 4.12: Dreieck-Stern-Umwandlung

Beide Anordnungen sind wieder zueinander schaltungstechnisch äquivalent, wenn sie an allen drei Anschlusspunkten gleiches elektrisches Verhalten aufweisen. Demzufolge müssen zwischen jeweils zwei Anschlüssen gleiche Widerstandsverhältnisse vorliegen. Es gilt:

$$A - B: \quad R_c \parallel (R_b + R_a) = R_{A0} + R_{B0} \qquad B - C: \quad R_a \parallel (R_c + R_b) = R_{B0} + R_{C0}$$

$$C - A: \quad R_b \parallel (R_c + R_a) = R_{A0} + R_{C0}$$

Durch Lösung dieses Gleichungssystems findet man Bestimmungsgleichungen zur Berechnung der unbekannten Widerstände R_{A0} , R_{B0} und R_{C0} . Diese Ergebnisse sind aber auch durch Überlegung ableitbar, wenn man die Parallelzeichen auflöst.

$$\frac{R_b \cdot R_c + R_a \cdot R_c}{R_a + R_b + R_c} = R_{A0} + R_{B0}$$

$$\frac{R_a \cdot R_c + R_a \cdot R_b}{R_a + R_b + R_c} = R_{B0} + R_{C0}$$

$$\frac{R_b \cdot R_c + R_a \cdot R_b}{R_a + R_b + R_c} = R_{A0} + R_{C0}$$

Die linken Seiten der drei Gleichungen unterscheiden sich nur im Zähler. Auf beiden Seiten jeder Gleichung stehen jeweils zwei Summanden. Bei näherer Betrachtung der ersten beiden Gleichungen stellt man fest, dass immer ein Summand der linken Seite gleich einem der beiden Summanden auf der rechten Seite ist. Die dritte Gleichung liefert mit der Probe die Bestätigung der Richtigkeit der angestellten Überlegung.

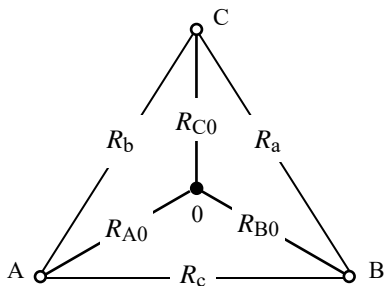
$$R_{A0} = \frac{R_b \cdot R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad (4.16)$$

$$R_{B0} = \frac{R_a \cdot R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad (4.17)$$

$$R_{C0} = \frac{R_a \cdot R_b}{R_a + R_b + R_c} \quad (4.18)$$

Der Anwender solcher Umrechnungen ist nun nicht vorrangig an Zusammenstellungen von Formeln interessiert. Er benötigt vielmehr das Wissen über die allgemeingültigen Gesetzmäßigkeiten, die einer solchen Transformation zu Grunde liegen (Transformationsregeln).

Denkt man sich die beiden Ersatzschaltungen des Bildes 4.12 übereinander geblendet, so erkennt man die Aussage dieser Transformationsregel:

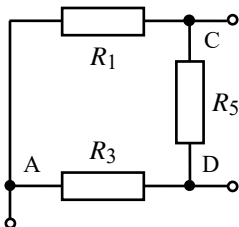


Ein Sternwiderstand ergibt sich aus dem Produkt der beiden (am betrachteten Punkt angeschlossenen) Dreieckswiderstände, dividiert durch die Summe aller drei Dreieckswiderstände.

Bild 4.13: Modell zur Dreieck-Stern-Umwandlung

Lehrbeispiel 4.4:

Lesen Sie mit dem Modell im Bild 4.13 die transformierten Sternwiderstände der linken Masche des Bildes 4.9 (nicht abgegliche Brückenkonfiguration) ab.



$$R_{A0} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3 + R_5}$$

$$R_{D0} = \frac{R_3 \cdot R_5}{R_1 + R_3 + R_5}$$

$$R_{C0} = \frac{R_1 \cdot R_5}{R_1 + R_3 + R_5}$$

Bild 4.14: Auszug aus Bild 4.9

4.4.3 Stern-Dreieck-Transformation

Die Umrechnung von Stern nach Dreieck kann analog zum Abschnitt 4.4.2 vorgenommen werden, wenn statt der Widerstände jetzt mit Leitwerten gearbeitet wird.

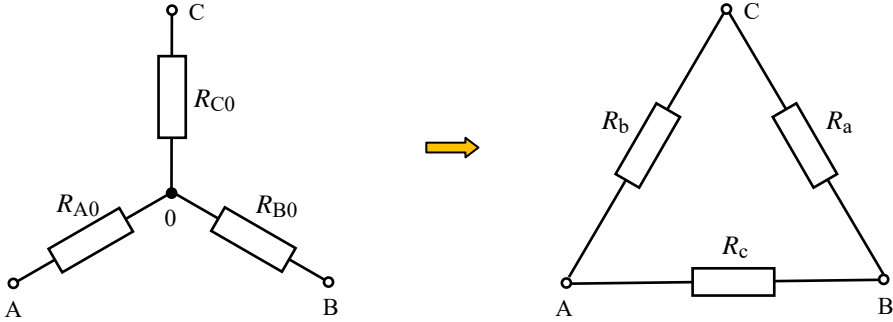


Bild 4.15: Stern-Dreieck-Umwandlung

$$G_a = \frac{G_{B0} \cdot G_{C0}}{G_{A0} + G_{B0} + G_{C0}} \quad (4.19)$$

$$G_b = \frac{G_{A0} \cdot G_{C0}}{G_{A0} + G_{B0} + G_{C0}} \quad (4.20)$$

$$G_c = \frac{G_{A0} \cdot G_{B0}}{G_{A0} + G_{B0} + G_{C0}} \quad (4.21)$$

Um das Rechnen mit Leitwerten zu umgehen, kann auch eine andere Berechnungsvorschrift hergeleitet werden. Als Ausgangspunkt wählt man die Gleichungen (4.16) bis (4.18). Durch Multiplikation von jeweils zwei dieser drei Gleichungen und Addition der drei Ergebnisse erhält man:

$$R_{A0} \cdot R_{B0} + R_{B0} \cdot R_{C0} + R_{A0} \cdot R_{C0} = \frac{R_a R_b R_c^2 + R_a^2 R_b R_c + R_a R_b^2 R_c}{(R_a + R_b + R_c)^2}$$

$$R_{A0} \cdot R_{B0} + R_{B0} \cdot R_{C0} + R_{A0} \cdot R_{C0} = \frac{R_a R_b R_c (R_a + R_b + R_c)}{(R_a + R_b + R_c)^2}$$

$$R_{A0} \cdot R_{B0} + R_{B0} \cdot R_{C0} + R_{A0} \cdot R_{C0} = \frac{R_a R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} = R_a \cdot \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

Ein wiederholtes Einsetzen der Gleichungen (4.16) bis (4.18) führt zu einer Vorschrift zur Berechnung der Dreieckswiderstände aus den Sternwiderständen.

$$R_{A0} R_{B0} + R_{B0} R_{C0} + R_{A0} R_{C0} = R_a R_{A0} = R_b R_{B0} = R_c R_{C0}$$

$$R_a = \frac{R_{A0}R_{B0} + R_{B0}R_{C0} + R_{A0}R_{C0}}{R_{A0}} \quad (4.22)$$

$$R_b = \frac{R_{A0}R_{B0} + R_{B0}R_{C0} + R_{A0}R_{C0}}{R_{B0}} \quad (4.23)$$

$$R_c = \frac{R_{A0}R_{B0} + R_{B0}R_{C0} + R_{A0}R_{C0}}{R_{C0}} \quad (4.24)$$

Auch aus diesen Gleichungen kann eine allgemeingültige Transformationsregel abgeleitet werden. Es gilt wieder das im Bild 4.14 dargestellte Modell:

Ein Dreieckswiderstand ergibt sich aus der Summe der möglichen Produkte jeweils zweier Sternwiderstände, dividiert durch den gegenüber liegenden Sternwiderstand.

Lehrbeispiel 4.5:

Rechnen Sie den Stern C des Bildes 4.9 in eine äquivalente Dreieckschaltung um.

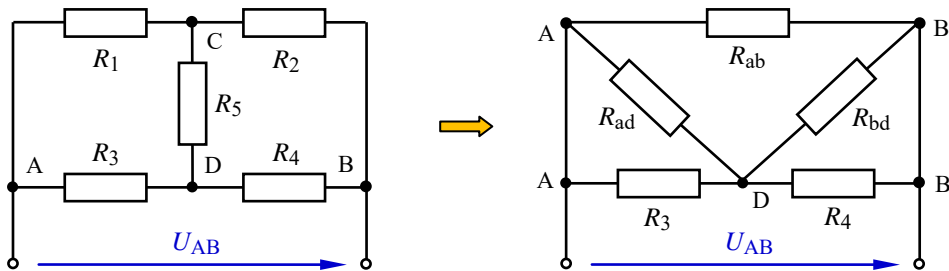


Bild 4.16: Stern-Dreieck-Umwandlung im Lehrbeispiel 4.5

Durch diese Transformation existiert der Sternpunkt C nicht mehr. Die Widerstände der äquivalenten Dreieckschaltung verbinden nun die Punkte A – D, B – D und A – B. Sie werden zur Vermeidung von Verwechslungen gemäß Abschn. 4.4.2 mit Kleinbuchstaben indiziert.

Durch Anwendung der Transformationsregel erhält man:

$$R_{ad} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_5 + R_2 R_5}{R_2}$$

$$R_{bd} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_5 + R_2 R_5}{R_1}$$

$$R_{ab} = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_5 + R_2 R_5}{R_5}$$

Die Anwendung des Modells im Bild 4.13 erspart den mühseligen Umgang mit den Gleich. (4.22) bis (4.24) bzw. das Rechnen mit Leitwerten gemäß Gleich. (4.19) bis (4.21).

5 Verfahren zur Berechnung linearer Netzwerke

5.1 Netzwerkberechnung nach KIRCHHOFF

Mit den KIRCHHOFFschen Sätzen können lineare oder nichtlineare Netzwerke, in denen zeitinvariante oder zeitlich veränderliche Vorgänge ablaufen, beschrieben werden. Damit steht dem Schaltungstechniker ein allgemeingültiges und zuverlässiges Berechnungsverfahren zur Verfügung.

Die Grundlage für die Berechnung eines Netzwerkes bildet ein Gleichungssystem, das mit dem Maschensatz und dem Knotenpunktsatz [Gleich. (2.4) und (2.5) – siehe auch Gleich. (5.1)] aufgestellt wird. Die Variablen in diesem Gleichungssystem sollten die Zweigströme sein. Da ihre Anzahl im Vergleich zu den Spannungsabfällen kleiner bzw. gleich ist, wird somit der Umfang des Gleichungssystems minimal.

$$\sum_{\nu=1}^n U_{\nu} = 0 \qquad \sum_{\nu=1}^n I_{\nu} = 0 \qquad (5.1)$$

In elektrischen Netzwerken unterscheidet man zwischen unabhängigen und abhängigen Maschen. Unabhängige Maschen liefern relevante Aussagen über das Netzwerk. Abhängige Maschengleichungen tragen dagegen redundante Information, da sie Linearkombinationen zweier oder mehrerer anderer Maschengleichungen darstellen.

Eine beliebige (von k möglichen) Knotenpunktgleichung stellt immer die Linearkombination mehrerer anderer Knotenpunktgleichungen dar. Für das Gleichungssystem dürfen somit nur $(k - 1)$ Knotenpunktgleichungen verwendet werden.

Zur Aufstellung des Gleichungssystems ist eine Netzwerkanalyse erforderlich (vgl. Begriffe im Abschn. 3.1), die mit folgenden Schritten durchgeführt wird:

- Einzeichnen der Zählpfeile für alle Quellen gemäß ihrer aktuellen Polarität.
- Festlegung der Richtung der Zählpfeile für alle z Zweigströme (wählbar).

Die Anzahl der Zweigströme gibt die Anzahl der Unbekannten und damit die Anzahl der Gleichungen an. Sollten statt der Zweigströme die Spannungsabfälle über ausgewählten Widerständen gesucht sein, muss nach Lösung des Gleichungssystems zusätzlich das OHM'sche Gesetz in die Berechnung einbezogen werden.

- Skizzieren des Graphen des Netzwerkes und Angabe des vollständigen Baumes.

Der Graph stellt die idealisierte Struktur eines Netzwerkes (Zweige ohne Bauelemente) dar. Ein vollständiger Baum entsteht aus dem Graphen eines Netzwerkes, wenn alle echten Knotenpunkte miteinander verbunden werden. Dabei darf kein geschlossener Umlauf entstehen. Die Anwendung der Baummethode dient zur Ermittlung der unabhängigen Maschen und wird erst bei größeren Netzwerken (vgl. Abschn. 5.4) notwendig. Netzwerke mit bis zu drei inneren Umläufen (z.B. Lehrbeispiel 5.1) sind noch ohne Baum analysierbar.

- Festlegung des Umlaufsinnnes der unabhängigen Maschen m (wählbar).

Ein Umlauf liefert immer dann eine unabhängige Maschengleichung, wenn er im Graph des Netzwerkes an einer beliebigen Stelle des vollständigen Baumes über einen unabhängigen Zweig (Verbindungszweig – gehört nicht zum Baum) eine Masche erstmalig schließt. Für weitere unabhängige Maschen steht dieser Zweig nun nicht mehr als unabhängiger Zweig zur Verfügung.

- Aufstellen von $(k-1)$ unabhängigen Knotenpunktgleichungen.
- Aufstellen von $m = z - (k-1)$ unabhängigen Maschengleichungen.

Das so aufgestellte Gleichungssystem ist nun über ein geeignetes Verfahren zu lösen. Im Ergebnis erhält man eine Aussage über den Betrag (Zahlenwert) und die Richtung (Vorzeichen) aller Zweigströme des Netzwerkes. Ein negativer Zweigstrom fließt gegen die vom Anwender gewählte Richtung (Stromzählpfeil).

♦ Es gilt die Regel, dass nach erfolgter Richtungsfestlegung keine Änderung der Zählpfeile mehr vorgenommen werden sollte. Ein negativer Strom signalisiert eben die Tatsache, dass im Falle einer messtechnischen Überprüfung der Strommesser genau entgegengesetzt zur gewählten Stromrichtung einzuschalten ist.

Lehrbeispiel 5.1:

Leiten Sie eine allgemeine Berechnungsvorschrift zur Bestimmung aller Zweigströme im Netzwerk des Bildes 5.1 her. Geg.: U_A, U_B, U_C sowie: R_1, R_2 und R_3

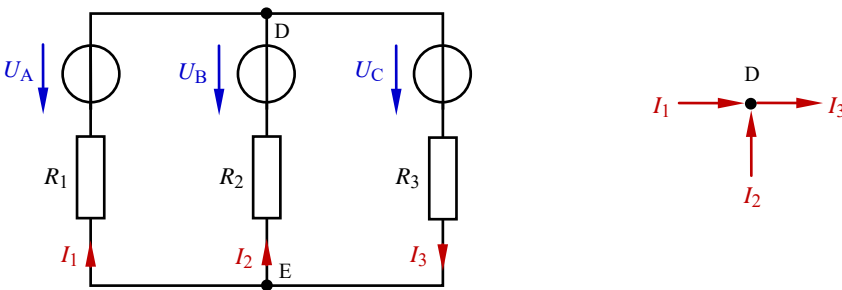


Bild 5.1: Netzwerk zum Lehrbeispiel 5.1

Zur Berechnung der gesuchten Zweigströme sind drei Gleichungen erforderlich. Bei zwei Knotenpunkten darf nur eine Knotenpunktgleichung $(k-1)$ verwendet werden.

Für den oberen Knotenpunkt D gilt: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$

In diesem einfachen Beispiel kann leicht nachgewiesen werden, dass die aus dem unteren Knotenpunkt E abgeleitete Gleichung zu einer Linearkombination der Gleichung (D) mit dem Faktor (-1) führt und nicht im Gleichungssystem verwendet werden darf.

Die restlichen zwei Gleichungen sind nun über den Maschensatz zu bestimmen. Der Baum wäre hier z.B. der Mittelzweig. Die beiden äußeren Zweige sind dann die Verbindungszweige. Bei diesem einfachen und übersichtlichen Netzwerk kann durchaus auf die Ermittlung der unabhängigen Maschen

mit der Baummethode verzichtet werden. Die beiden inneren Umläufe sind hier ganz sicher unabhängige Maschen und sollen im Uhrzeigersinn analysiert werden.

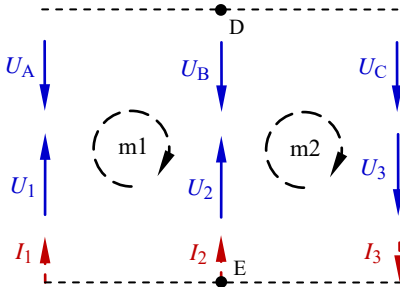


Bild 5.2: Handhabung des Maschensatzes im Lehrbeispiel 5.1

$$(m1) \quad -U_A + U_B - U_2 + U_1 = 0$$

$$(m2) \quad -U_B + U_C + U_3 + U_2 = 0$$

Mit $U_R = I \cdot R$ erhält man das folgende Gleichungssystem für die drei Zweigströme:

$$(D) \quad I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$(m1) \quad I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 = U_A - U_B$$

$$(m2) \quad I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 = U_B - U_C$$

Dieses Gleichungssystem soll nun durch Anwendung des Einsetzverfahrens gelöst werden. Dazu wird zunächst die Knotenpunktgleichung (D) nach $I_3 = I_1 + I_2$ umgestellt und in die Maschengleichung (m2) eingesetzt:

$$(m2) \quad I_2 \cdot R_2 + I_1 \cdot R_3 + I_2 \cdot R_3 = U_B - U_C$$

Stellt man nun noch die Maschengleichung (m1) nach I_1 um:

$$(m1) \quad I_1 = \frac{U_A - U_B + I_2 \cdot R_2}{R_1} \quad \text{und setzt das Ergebnis in (m2) ein,}$$

$$I_2(R_2 + R_3) + \frac{U_A - U_B + I_2 \cdot R_2}{R_1} \cdot R_3 = U_B - U_C$$

$$\text{ergibt sich durch Umstellen nach } I_2: \quad I_2(R_2 + R_3 + \frac{R_2}{R_1} \cdot R_3) = U_B - U_C - \frac{U_A - U_B}{R_1} \cdot R_3$$

$$I_2 = \frac{U_B - U_C - \frac{U_A - U_B}{R_1} \cdot R_3}{R_2 + R_3 + \frac{R_2}{R_1} \cdot R_3}$$

Nach Beseitigung der Doppelbrüche erhält man folgendes Ergebnis:

$$I_2 = \frac{-U_A \cdot R_3 + U_B(R_1 + R_3) - U_C \cdot R_1}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3} \quad (5.2)$$

Durch Einsetzen dieses Teilergebnisses in die Gleichungen (D) und (m1) können dann die anderen beiden Zweigströme bestimmt werden:

$$I_1 = \frac{U_A(R_2 + R_3) - U_B \cdot R_3 - U_C \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3} \quad (5.3)$$

$$I_3 = \frac{U_A \cdot R_2 + U_B \cdot R_1 - U_C(R_1 + R_2)}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3} \quad (5.4)$$

• **Zahlenbeispiel:**

Für $U_A = 24 \text{ V}$, $U_B = 12 \text{ V}$ und $U_C = 5 \text{ V}$ sowie $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ würden sich folgende Zweigströme im Netzwerk ergeben:

$$I_1 = \frac{31}{3} \text{ mA} = 10,3 \text{ mA} ; \quad I_2 = -\frac{5}{3} \text{ mA} = -1,6 \text{ mA} ; \quad I_3 = \frac{26}{3} \text{ mA} = 8,6 \text{ mA}$$

$$\text{Probe: } I_3 = I_1 + I_2 = 8,6 \text{ mA}$$

5.2 Der HELMHOLTZsche Überlagerungssatz

Diesem Verfahren liegt die Überlegung zugrunde, dass jede Quelle in einem elektrischen Netzwerk einen spezifischen Beitrag zu jedem Zweigstrom des Netzwerkes leistet. Durch die vorzeichenbehaftete Überlagerung (Superposition) dieser einzelnen Beiträge kann ein gesuchter Zweigstrom (allerdings nur in einem linearen Netzwerk) ermittelt werden.

Die Berechnung der einzelnen Beiträge gelingt mit der Stromteilerregel und dem OHMSchen Gesetz. Da immer nur eine Quelle im Netzwerk betrachtet wird, sind alle anderen Quellen während der Rechnung wie folgt unwirksam zu machen:

- Spannungsquelle durch Kurzschluss
- Stromquelle durch Leerlauf.

Der Vorteil dieses Verfahrens im Vergleich zur Anwendung der KIRCHHOFFschen Sätze besteht darin, dass nicht immer alle Zweigströme eines Netzwerkes berechnet werden müssen. In der Praxis sind meist nur wenige ausgewählte Zweigströme (z.B. bei Leistungsbetrachtungen) interessant.

Besonders geeignet ist der Überlagerungssatz zur Berechnung von Kurzschlussströmen (vgl. Abschn. 5.3: Zweipoltheorie).

Die Grenzen für dieses Verfahren ergeben sich aus der Größe und der jeweiligen schaltungstechnischen Konfiguration des zu berechnenden Netzwerkes. Hier gilt die Regel, dass mit diesem Verfahren nur Zweigströme berechnet werden sollten, die durch einfache oder doppelte Stromteilungen entstehen. Ansonsten ergeben sich zu große und zu unübersichtliche Lösungsansätze. In solchen Fällen sollte der Anwender ein geeignetes Analyseverfahren zur Berechnung linearer Netzwerke (vgl. auch Abschn. 5.4) benutzen.

Lehrbeispiel 5.2:

Bestimmen Sie durch Anwendung des Überlagerungssatzes den Strom durch den Widerstand R_3 in Form einer allgemeinen Lösung. Geg.: U_A , U_B , U_C sowie R_1 , R_2 und R_3

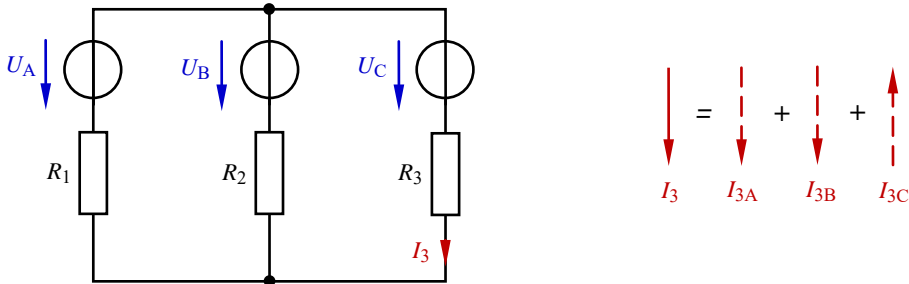


Bild 5.3: Netzwerk zum Lehrbeispiel 5.2

Der Zweigstrom I_3 ergibt sich aus der vorzeichenbehafteten Überlagerung der Beiträge der drei Quellen. Die Quellen A und B treiben einen Strom in Richtung des gesuchten Zweigstromes (positiver Beitrag). Die Quelle C treibt einen Strom gegen die gewählte Richtung von I_3 und erhält somit ein negatives Vorzeichen.

Überlagerung: $I_3 = I_{3A} + I_{3B} - I_{3C}$

Zur weiteren Berechnung lässt man nun immer nur eine Quelle des Netzwerkes wirken.

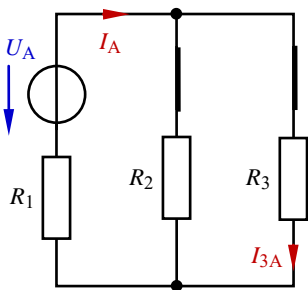


Bild 5.4: Es wirkt die Quelle A

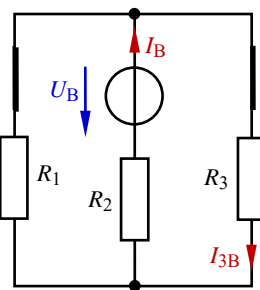


Bild 5.5: Es wirkt die Quelle B

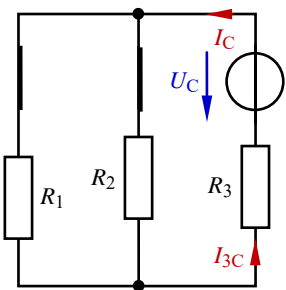


Bild 5.6: Es wirkt die Quelle C

Für die Quelle A erhält man:

$$\text{Stromteilerregel für A: } I_{3A} = I_A \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

$$\text{Gesamtstrom von A: } I_A = \frac{U_A}{R_1 + R_2 // R_3}$$

Für die Quelle B erhält man:

$$\text{Stromteilerregel für B: } I_{3B} = I_B \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3}$$

$$\text{Gesamtstrom von B: } I_B = \frac{U_B}{R_2 + R_1 // R_3}$$

Für die Quelle C gilt: $I_{3C} = I_C$

$$\text{Gesamtstrom von C: } I_C = \frac{U_C}{R_3 + R_1 // R_2}$$

Die Überlagerung dieser drei Komponenten führt zu folgendem Gesamtergebnis:

$$I_3 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \cdot \frac{U_A}{R_1 + R_2 // R_3} + \frac{R_1}{R_1 + R_3} \cdot \frac{U_B}{R_2 + R_1 // R_3} - \frac{U_C}{R_3 + R_1 // R_2}$$

Nach Beseitigen der Parallelzeichen und Auflösung der Doppelbrüche ergibt sich als allgemeine Lösung wieder das Ergebnis des Lehrbeispiels 5.1 [vgl. auch Gleich. (5.4)]:

$$I_3 = \frac{U_A \cdot R_2 + U_B \cdot R_1 - U_C(R_1 + R_2)}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}$$

5.3 Zweipoltheorie

Jedes beliebige elektrische Netzwerk kann durch Festlegen einer Trennstelle in einen aktiven und einen passiven Schaltungsteil getrennt werden. Es entstehen Schaltungen mit zwei Anschlussklemmen, die man als Zweipole bezeichnet (Abschn. 3.1). Die festgelegte Trennstelle muss die Bedingung erfüllen, dass sich alle Zweige mit einer oder mehreren Quellen im aktiven Teil befinden. Der passive Zweipol ist dann eine Widerstandskombination ohne Quellen. Das folgende Schema (Bild 5.7) soll die wesentlichen Schritte innerhalb der Anwendung der Zweipoltheorie zur Berechnung linearer Netzwerke verdeutlichen.

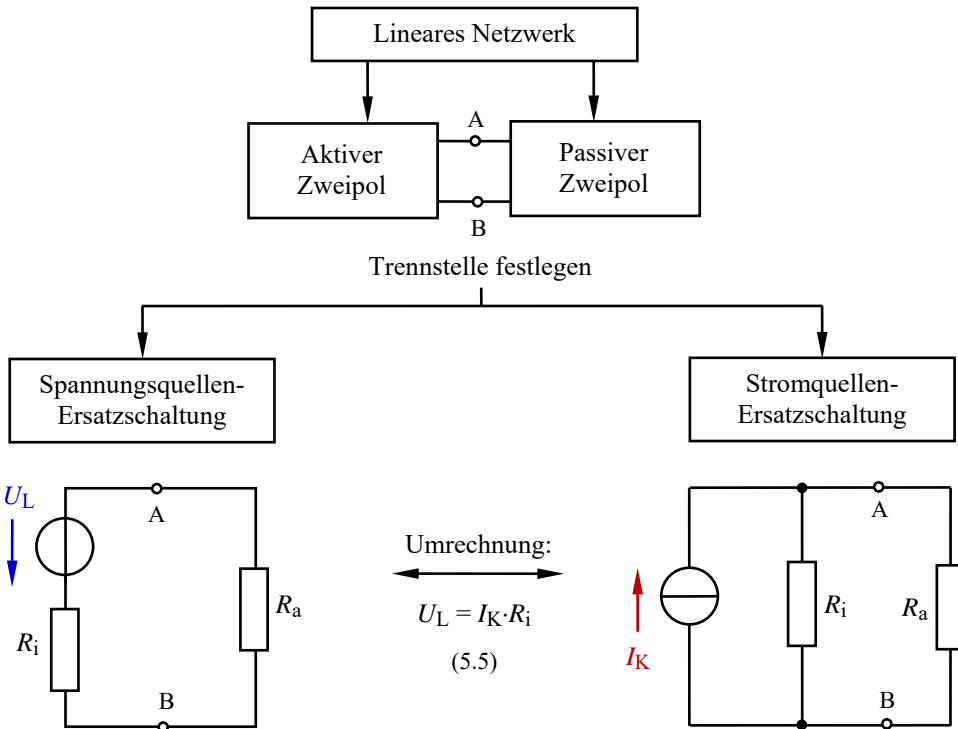


Bild 5.7: Schrittfolge bei der Umrechnung von linearen Netzwerken in einfache Ersatzschaltungen

Bei der Anwendung der Zweipoltheorie zur Berechnung linearer Netzwerke geht man davon aus, dass beide (linearen) Zweipole durch Ersatzschaltungen nachgebildet werden können. Die Ersatzschaltungen müssen die Bedingung erfüllen, dass sie zur jeweiligen Originalschaltung aus der Sicht ihres elektrischen Verhaltens an der Trennstelle schaltungstechnisch äquivalent sind. Das bedeutet, dass sich beim Austausch von Original-Zweipol und Ersatz-Zweipol ein gleiches elektrisches Verhalten an der Trennstelle einstellt.

Je nach schaltungstechnischer Struktur des Netzwerkes ist aus der Sicht einer Trennstelle entweder die Spannungsquellen- oder die Stromquellen-Ersatzschaltung für die Berechnung eines aktiven Zweipols günstiger. Durch eine geschickte Wahl dieser Trennstelle kann der Anwender somit seinen Rechenaufwand im Rahmen der Netzwerkberechnung erheblich reduzieren.

5.3.1 Spannungsquellen-Ersatzschaltung

Die Umrechnung eines aktiven Zweipols in eine Spannungsquellen-Ersatzschaltung ist immer dann sinnvoll, wenn ein oder mehrere Widerstände im aktiven Zweipol zur Trennstelle in Reihe liegen. Beim Auftrennen laufen diese Widerstände leer, sodass sich die Schaltung erheblich vereinfachen kann. Da der Anwender die Lage der Trennstelle wählen darf, legt er damit zugleich die zu verwendende Ersatzschaltung und den erforderlichen Rechenaufwand fest. Für die Positionierung der Trennstelle gilt die Regel, dass möglichst viele Widerstände in den passiven Zweipol abgetrennt werden. Das vereinfacht die Struktur des aktiven Zweipols und reduziert den Rechenaufwand. Beide Maßnahmen (Festlegung der Trennstelle und Wahl der Ersatzschaltung) sollte man daher stets in einem engen Zusammenhang sehen.

Die Elemente der Ersatzschaltung können wie folgt berechnet werden:

- Lastwiderstand R_a :
Widerstandsbestimmung des passiven Zweipols im abgetrennten Zustand.
- Innenwiderstand R_i :
Widerstandsbestimmung des aktiven Zweipols bei abgetrennter Last unter der Bedingung, dass alle Quellen unwirksam sind (Spannungsquellen sind kurzgeschlossen; Stromquellen laufen leer).
- Leerlaufspannung U_L :
Berechnung des Spannungsabfalls an der leer laufenden Trennstelle (z.B. mit dem Maschensatz).

Die Bestimmung eines gesuchten Zweigstromes I_x wird in der Ersatzschaltung (Bild 5.8) durch Berechnung des Stromes durch den Lastwiderstand R_a vorgenommen. Fließt dieser gesuchte Strom im Inneren des passiven Zweipols (also nur durch eine Teilkomponente von R_a), müssen für seine Berechnung zusätzlich entsprechende Stromteiler angesetzt werden.