

Widjaja

Baustatik – einfach und anschaulich

Baustatische Grundlagen

Faustformeln

Wind- und Schneelasten nach Eurocode

5. Auflage

Bauwerk **BBB**
Beuth

Baustatik –

einfach und anschaulich

Prof. Dr.-Ing. Eddy Widjaja

Baustatik – einfach und anschaulich

Baustatische Grundlagen

Faustformeln

Wind- und Schneelasten nach Eurocode

**5., überarbeitete
und erweiterte Auflage**

Beuth Verlag GmbH · Berlin · Wien · Zürich

Bauwerk

© 2020 Beuth Verlag GmbH

Berlin · Wien · Zürich

Saatwinkler Damm 42/43

13627 Berlin

Telefon: +49 30 2601-0

Telefax: +49 30 2601-1260

Internet: www.beuth.de

E-Mail: kundenservice@beuth.de

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechts ist ohne schriftliche Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung in elektronische Systeme.

Die im Werk enthaltenen Inhalte wurden vom Verfasser und Verlag sorgfältig erarbeitet und geprüft. Eine Gewährleistung für die Richtigkeit des Inhalts wird gleichwohl nicht übernommen. Der Verlag haftet nur für Schäden, die auf Vorsatz oder grobe Fahrlässigkeit seitens des Verlages zurückzuführen sind. Im Übrigen ist die Haftung ausgeschlossen.

Druck und Bindung: XXX

Gedruckt auf säurefreiem, alterungsbeständigem Papier nach DIN EN ISO 9706.

ISBN 978-3-410-29809-0

Vorwort zur 5. Auflage

Die ersten vier Auflagen dieses Lehrbuches „Baustatik – einfach und anschaulich“ wurden von den Lesern sehr gut angenommen, worüber wir uns sehr gefreut haben.

In der vorliegenden 5. Auflage wurden alle Kapitel erneut kritisch durchgesehen, gründlich überarbeitet und ergänzt.

Für Anregungen zur Weiterentwicklung und für Verbesserungsvorschläge sind die Autoren auch weiterhin dankbar.

Ich danke Herrn Prof. Klaus Holschemacher für die neue Bearbeitung der Abschnitte über Wind- und Schneelasten und dem Team des Beuth Verlags, insbesondere Frau Dipl.-Ing. Norma Müller und Herrn Malte Wrede, für die ausgezeichnete Unterstützung und Zusammenarbeit bei der Erarbeitung dieses Lehrbuches.

Berlin, im Juli 2020

Eddy Widjaja

Vorwort zur 4. Auflage

In den knapp drei Jahren seit Erscheinen der dritten Auflage wurde das Buch erneut gründlich überarbeitet und ergänzt. In der vorliegenden vierten Auflage wurden u.a. auch die aktuellen Eurocodes eingearbeitet.

Für Anregungen zur Weiterentwicklung und für Verbesserungsvorschläge sind die Autoren auch weiterhin dankbar.

Ich danke den Mitautoren Prof. Schneider und Prof. Holschemacher sowie der Lektorin des Beuth Verlags, Frau Dipl.-Ing. Norma Müller, für die sehr gute Zusammenarbeit.

Berlin, im Juli 2013

Eddy Widjaja

Aus dem Vorwort zur 1. Auflage

Auch im Zeitalter der Anwendung von Statikprogrammen ist die Kenntnis von baustatischen Grundlagen und Zusammenhängen nach wie vor sehr wichtig.

Das vorliegende Buch ist für Baupraktiker und Sachverständige eine nützliche Hilfe, um das einst ermittelte Statikwissen wieder aufzufrischen und zu vertiefen. Ebenso ist „Statik einfach und anschaulich“ für Studierende des Bauingenieurwesens und der Architektur eine gute Ergänzung zu den „klassischen“ Baustatik- und Tragwerkslehre-Vorlesungen.

Es werden zunächst die baustatischen Grundlagen behandelt, nicht nur mathematisch – wie es häufig üblich ist –, sondern zunächst einfach und anschaulich (u.a. mit Hilfe von räumlichen Abbildungen) und dann erst mathematisch. Z.B. werden zuerst die Zusammenhänge zwischen den „wirklichen“ Spannungen und den Schnittgrößen als „Rechenwerte“ ausführlich dargestellt.

Auch komplizierte Fragen, wie z.B. Torsion und Wölbkrafttorsion oder elastische Lagerungen, werden verständlich analysiert und erläutert.

Ausführlich werden auch Fragen des Lastabtrags (wie kommen die Lasten z.B. vom Dach in den Baugrund?) behandelt.

Ein weiterer Themenbereich, der in der Fachliteratur nur sehr stiefmütterlich oder überhaupt nicht behandelt wird, ist der Zusammenhang zwischen dem realen Bauwerk und den für die Berechnung erforderlichen abstrahierten „statischen Systemen“. Dieses „heiße Eisen“ wird an mehreren baupraktischen Beispielen erläutert.

Für eine schnelle Vorbemessung (Abschätzung der erforderlichen Querschnittmessungen) werden für die Standardkonstruktionen und für einige Sonderkonstruktionen Faustformeln angegeben.

Berlin, im Oktober 2006

Eddy Widjaja

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1 Grundlagen der Statik	13
1.1 Zerlegung einer Kraft.....	13
1.1.1 Zeichnerische Lösung.....	13
1.1.2 Rechnerische Lösung.....	14
1.2 Zusammensetzung von Kräften	14
1.2.1 Kräfteparallelogramm.....	14
1.2.2 Kräftepolygon und Seilpolygon.....	14
1.3 Gleichgewicht von Kräften.....	15
1.3.1 Beispiel.....	15
1.3.2 Zeichnerische Lösung.....	15
1.3.3 Rechnerische Lösung.....	16
1.4 Zusammenhang zwischen Spannungen und Schnittgrößen.....	17
1.4.1 Vorbemerkungen.....	17
1.4.2 Normalspannungen/Längskraft (Normalkraft).....	17
1.4.3 Schubspannungen/Querkraft.....	18
1.4.4 Normalspannung aus Biegung/Biegemomente.....	18
1.5 Ermittlung von Schnittgrößen.....	19
1.5.1 Allgemeines.....	19
1.5.2 Definition der positiven Schnittgrößen.....	19
1.5.3 Träger auf zwei Stützen.....	20
1.5.4 Dreigelenkrahmen.....	28
1.5.5 Grafische Ermittlung von Schnittgrößen.....	32
1.6 Stützlinie.....	33
1.6.1 Definition der Stützlinie.....	33
1.6.2 Beispiel 1: Stützlinie für Gleichstreckenlast.....	33
1.6.3 Beispiel 2: Stützlinie bei Teilstreckenlast.....	35
1.6.4 Beispiel 3: Stützlinien bei Einzellasten.....	35
1.6.5 Zeichnerische Ermittlung der Stützlinie.....	35
1.7 Korbbogen.....	36

1.8	Ebene Fachwerke.....	37
1.8.1	Gelenkfachwerke/Fachwerke mit steifen Knoten.....	37
1.8.2	Rechnerische Ermittlung der Stabkräfte.....	38
1.8.3	Kräfteplan.....	45
1.8.4	Cremonaplan.....	45
1.9	Standardformeln für den Träger auf zwei Stützen.....	47
1.9.1	Gelenkig gelagerter Träger.....	47
1.9.2	Einseitig eingespannter Träger.....	48
1.9.3	Beidseitig eingespannter Träger.....	49
1.10	Mathematische Zusammenhänge zwischen Belastung, Querkraft und Biegemoment.....	50
2	Grundlagen der Festigkeitslehre.....	52
2.1	Sicherheitsbetrachtung.....	52
2.1.1	Tragfähigkeitsnachweis nach dem neuen Sicherheitskonzept.....	52
2.2	Gebrauchstauglichkeitsnachweis.....	54
2.2.1	Allgemeines.....	54
2.2.2	Stahlbau (Eurocode 3).....	54
2.2.3	Holzbau (Eurocode 5).....	55
2.2.4	Stahlbetonbau (Eurocode 2).....	56
2.3	Zugbeanspruchung.....	58
2.3.1	Allgemeines.....	58
2.3.2	Dehnung infolge mechanischer Beanspruchung.....	58
2.3.3	Spannungs-Dehnungs-Linie.....	59
2.4	Druckbeanspruchung.....	60
2.5	Dehnungen infolge Temperatur.....	61
2.5.1	Dehnung bei gleichmäßiger Erwärmung.....	61
2.5.2	Dehnung bei ungleichmäßiger Erwärmung.....	61
2.5.3	Zwang bei Temperaturbeanspruchung.....	61
2.6	Biegebeanspruchung.....	62
2.7	Spannungen infolge Überlagerung von Normalkraft und Biegemoment.....	65
2.7.1	Druck- und zugfestes Material.....	65

2.7.2	Nur druckfestes Material (Zugspannungen können nicht aufgenommen werden).....	65
2.7.3	Querschnittskern.....	69
2.8	Schubbeanspruchung bei Biegung.....	70
2.8.1	Allgemeines.....	70
2.8.2	Schubspannungsverteilung bei einem auf Biegung beanspruchten Träger..	71
2.8.3	Beispiel: Schubspannungen im Rechteckquerschnitt.....	73
2.8.4	Schubspannungen infolge Querkraft bei verschiedenen Querschnitten.....	74
2.9	Torsionsbeanspruchungen.....	75
2.9.1	Allgemeine Hinweise/Schubmittelpunkt.....	75
2.9.2	Arten der Torsion.....	75
2.9.2.1	Reine Torsion (nach Saint Venant).....	75
2.9.2.2	Reine Torsion und Wölbkrafttorsion (gemischte Torsion)	77
2.9.3	Torsionsschubspannungen.....	78
2.9.3.1	Beispiel: Torsionsschubspannungen eines Stabes mit Kreisquerschnitt.....	78
2.9.3.2	Torsionsschubspannungen bei dünnwandigen Hohlquerschnitten.....	79
2.9.3.3	Torsionsschubspannungen bei dünnwandigen offenen Querschnitten.....	79
2.9.3.4	Torsionsschubspannungen bei dickwandigen Querschnitten.....	79
3	Stabilitätsprobleme	81
3.1	Allgemeine Hinweise.....	81
3.2	Knicken.....	82
3.3	Knicklängen von Rahmenstielen	83
3.3.1	Grundsätzliches.....	83
3.3.2	Beispiele: Eingeschossige Rahmen.....	84
3.3.3	Beispiele: Stockwerkrahmen.....	85
3.4	Knickspannung nach Euler.....	86
3.5	Knicksicherheitsnachweis (Hinweis).....	87
4	Ermittlung von Verformungen mit Hilfe des „Prinzips der virtuellen Kräfte“	88
4.1	Prinzip der virtuellen Kräfte.....	88

4.2	Zahlenbeispiele.....	90
5	Statisch unbestimmte Systeme	98
5.1	Statische Unbestimmtheit.....	98
5.2	Anwendungsbeispiele.....	99
5.2.1	Auflagerkraft B als Statisch Unbestimmte.....	99
5.2.2	Stützmoment M_1 als Statisch Unbestimmte.....	102
5.2.3	Verformungen von statisch bestimmten und statisch unbestimmten Systemen.....	103
5.3	Reduktionssatz.....	104
5.4	Ersatzstützweite.....	105
5.5	Ungünstigste Laststellung.....	110
6	Gerberträger (Gelenkträger)	112
6.1	Zweifeld-Gerberträger.....	112
6.2	Konstruktive Ausbildung von Gerbergelenken.....	119
7	Statische Systeme/Tragwerksidealisierung/Modellbildung	120
7.1	Allgemeines.....	120
7.2	Beispiele.....	120
8	Lastweiterleitung in Tragwerken	127
8.1	Vertikale Lastweiterleitung.....	127
8.2	Weiterleitung von horizontalen Lasten.....	129
9	Aussteifung von Bauwerken	131
9.1	Allgemeines.....	131
9.2	Grundprinzip der Aussteifung.....	133
9.3	Anordnung von vertikalen Aussteifungselementen.....	134
9.3.1	Statisch bestimmtes Aussteifungssystem.....	134
9.3.2	Statisch unbestimmtes Aussteifungssystem.....	134
9.4	Vertikale Aussteifung.....	135
9.4.1	Vertikale Aussteifungselemente.....	135
9.4.2	Eingespannte Stützen als vertikale Aussteifung.....	135

9.4.3	Rahmen als vertikale Aussteifung	136
9.4.4	Fachwerke (Verbände) als vertikale Aussteifung.....	137
9.4.5	Wandscheiben als vertikale Aussteifung	138
9.5	Horizontale Aussteifung.....	139
9.5.1	Deckenkonstruktionen als Horizontalaussteifung.....	139
9.5.2	Fachwerke (Verbände) als Horizontalaussteifung.....	140
9.5.3	Ringbalken.....	140
9.6	Beispiel: Aussteifung einer Halle.....	140
9.6.1	Hallenaussteifung in Längsrichtung.....	140
9.6.2	Hallenaussteifung in Querrichtung.....	141
9.7	Aussteifungskerne.....	142
9.7.1	Bauwerke mit klassischen Aussteifungskernen.....	142
9.7.2	Tragwerkskerne mit Outriggersystem (Auslegersystem).....	144
9.7.3	Röhrentragwerke.....	145
9.8	Sonderlösungen für Bauwerksaussteifungen.....	146
9.8.1	Freistehendes Mauerwerk mit Vorspannung.....	146
9.8.2	Wandreihe mit Rahmenwirkung.....	147
9.8.3	Aussteifung mit außen stehenden Verbänden.....	147
9.8.4	Gebäudeaussteifung durch Seilabspannung.....	148
9.8.5	Anbindung an ein ausgesteiftes Gebäude.....	148
9.8.6	Bogen-Seilnetz-Symbiose.....	149
9.8.7	Bogen-Gitterschalen-Symbiose.....	149
10	Faustformeln zur Vorbemessung.....	150
10.1	Lastannahmen.....	150
10.1.1	Stahlbeton-Geschossdecken.....	150
10.1.2	Holzbalkendecke	150
10.1.3	Flachdächer.....	150
10.2	Ersatzstützweite.....	150
10.3	Tragwerke im Geschossbau.....	151
10.3.1	Holzdächer.....	151
10.3.2	Geschossdecken.....	153

10.3.3	Balken/Träger im Geschossbau.....	156
10.3.4	Stützen mit zentrischer Belastung.....	158
10.3.5	Wände.....	159
10.3.6	Fundamente.....	160
10.4	Tragwerke im Hallenbau.....	161
10.4.1	Hallentragwerke aus Stahl.....	161
10.4.2	Hallentagwerke aus Holz.....	164
10.5	Schalentragwerke aus Stahlbeton.....	166
10.5.1	Rotationsschale.....	166
10.5.2	Translationsschalen.....	166
10.5.3	Regelfläche.....	166
10.6	Glas.....	167
10.6.1	Kriterien für die Dimensionierung der Glasdicke.....	167
10.6.2	Lagerung der Glasscheiben und Vordimensionierung.....	167
10.7	Vorbemessungsbeispiel.....	169
10.7.1	Vorbemessung Kehlbalkendach.....	170
10.7.2	Vorbemessung Stahlbetondecke.....	171
10.7.3	Vorbemessung Stahlbetonunterzug.....	172
10.7.4	Vorbemessung Stahlbetonstütze.....	173
10.7.5	Vorbemessung Einzelfundament.....	174
10.7.6	Alternatives Tragsystem: Holzbalkendecke auf Stahlkonstruktion.....	175
10.7.7	Vorbemessung Holzbalkendecke.....	175
10.7.8	Vorbemessung Stahlträger.....	176
10.7.9	Vorbemessung Stahlstütze.....	176
10.7.10	Vorbemessung Einzelfundament.....	177
Anhang: Wind- und Schneelasten nach Eurocode.....		178
A	Windlasten (nach DIN EN 1991-1-4:2010-12).....	178
B	Schnee- und Eislasten (nach DIN EN 1991-1-3:2010-12).....	195
C	Praxisbeispiel.....	211
Literaturangaben.....		230
Stichwortverzeichnis.....		232

1 Grundlagen der Statik

In der Baustatik im engeren Sinne der Statik, werden die Schnittgrößen (Spannungsergebnisse) und die Verformungen ermittelt. Mit Hilfe der Baustatik wird die ausreichende Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit eines Tragwerkes nachgewiesen.

1.1 Zerlegung einer Kraft

Gegeben ist eine Kraft F (Vektor) nach Betrag, Richtung (Winkel α) und Richtungssinn (Pfeilspitze).

Die Kraft F soll in zwei Komponenten F_H und F_V zerlegt werden.

1.1.1 Zeichnerische Lösung

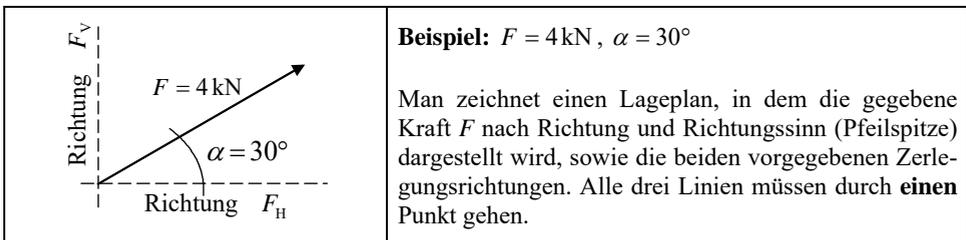


Abb. 1.1: Lageplan

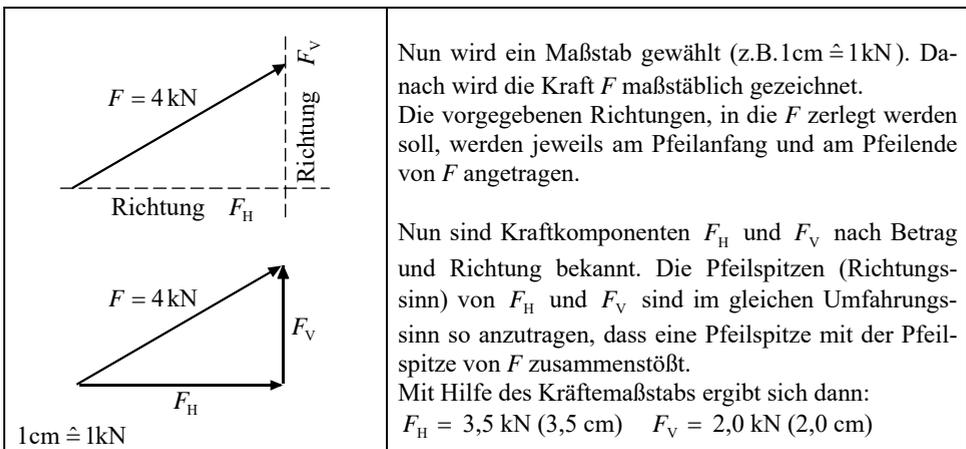


Abb. 1.2: Kräfteck

1.1.2 Rechnerische Lösung

Man zeichnet ein Kräfteck als Skizze aus der bekannten Kraft F und den zu ermittelnden Komponenten F_H und F_V . Die Pfeilspitze der Kraft F_V und die Pfeilspitze von F müssen zusammenstoßen. Die Pfeilspitze von F_H ergibt sich aus der Bedingung, dass F_H und F_V den gleichen Umlaufungssinn haben müssen. Nun folgt rechnerisch:

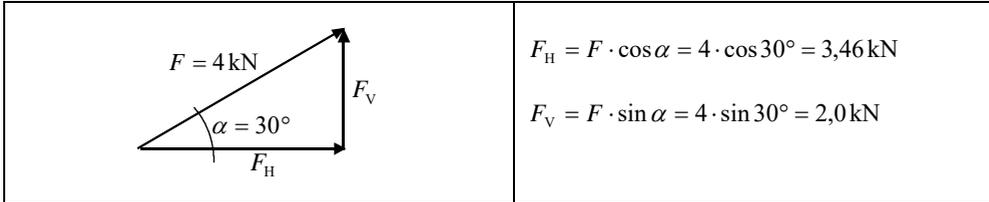


Abb. 1.3: Kräfteck

1.2 Zusammensetzung von Kräften

1.2.1 Kräfteparallelogramm (1586 von S. Stevin beschrieben)

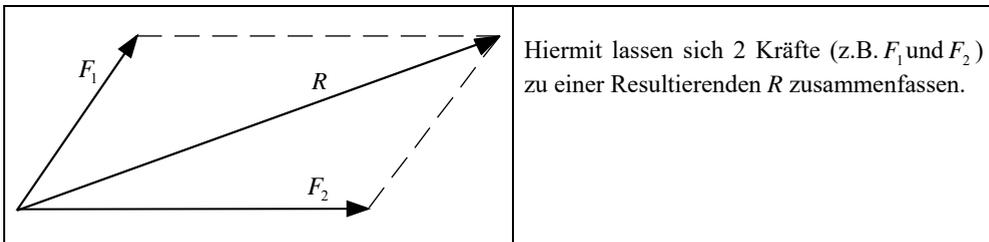


Abb. 1.4: Kräfteparallelogramm

1.2.2 Kräftepolygon und Seilpolygon (seit P. Varignon 1654–1722 bekannt)

Hiermit lassen sich beliebig viele Kräfte zu einer Resultierenden R zusammenfassen

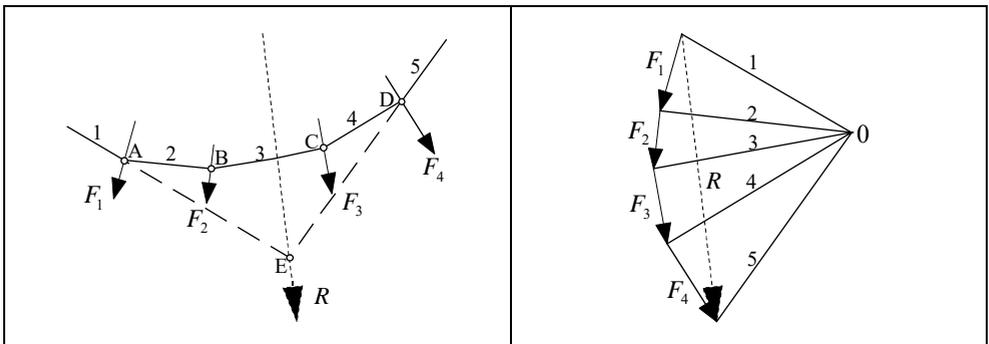


Abb. 1.5: Lageplan (Kräftepolygon) und Kräfteplan (Seilpolygon)

Vorgehensweise:

- 1) Zunächst wird ein Maßstab gewählt (z.B. $1 \text{ cm} \hat{=} 1 \text{ kN}$), dann werden im Kräfteplan die Kräfte F_1 bis F_4 hintereinander gezeichnet. Der Anfangspunkt der ers-

ten Kraft und der Endpunkt der letzten Kraft werden verbunden. Somit erhält man die resultierende Kraft R in Größe und Richtung.

- 2) Dann wird ein beliebiger „Pol“ 0 gewählt und jeweils Anfangs- und Endpunkt jeder Kraft mit dem Polpunkt verbunden. Es ergeben sich die Seilstrahlen 1 bis 5.
- 3) Die Strahlen werden nun nacheinander parallel verschoben in den Lageplan. Der erste Seilstrahl 1 schneidet im Lageplan die erste Kraft F_1 an Punkt A. In A wird der Seilstrahl 2 parallel zum Kräfteplan angetragen als „Verbindung“ zur Kraft F_2 ; es ergibt sich der Punkt B. In B wird der Seilstrahl 3 parallel zum Kräfteplan angetragen und bis zur Kraft F_3 gezogen. An diesem Punkt C wird der Seilstrahl 4 parallel zum Kräfteplan angetragen und bis zum Schnittpunkt D mit der Kraft F_4 verlängert. Im Punkt D wird nun der „letzte Seilstrahl“ 5 angetragen und verlängert bis zum Schnitt mit dem „ersten Strahl“ 1. Durch diesen Schnittpunkt E wird die Wirkungslinie von R parallel zum Kräfteplan angetragen. Somit ist die Lage von R bekannt.

Dieses Prinzip wurde bereits 1824 zur Berechnung einer 311 m weit gespannten Hängebrücke über die Newa in St. Petersburg angewendet.

1.3 Gleichgewicht von Kräften

1.3.1 Beispiel

Gegeben: 1 Kraft und 2 Kraftrichtungen, die durch einen Punkt gehen (Abb. 1.6)

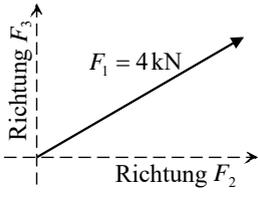
	<p>Aufgabe: Die drei Kräfte F_1, F_2, F_3 sollen ins Gleichgewicht gebracht werden. Wie groß müssen die Kräfte F_2 und F_3 sein und wie ist ihr jeweiliger Richtungssinn (Pfeilspitzen)? Die gesuchten Kräfte F_2 und F_3 werden im Lageplan zunächst als Zugkräfte (Positivbild) angetragen.</p>
--	---

Abb. 1.6: Lageplan

Folgenden Satz sollte man sich merken:

Drei Kräfte, die im Gleichgewicht stehen sollen, müssen im Lageplan durch einen Punkt gehen.

1.3.2 Zeichnerische Lösung

Die Kraft F_1 wird aus dem Lageplan maßstäblich entsprechend eines gewählten Maßstabs (z.B. 1 cm $\hat{=}$ 1 kN) übertragen (Abb. 1.7).

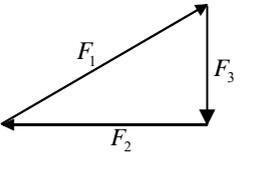
	<p>Die beiden Kraftrichtungen von F_2 und F_3 (vgl. Abb. 1.6) werden jeweils an dem Anfangs- bzw. Endpunkt von F_1 angetragen und zum Schnitt gebracht (Abb. 1.7). Die Pfeilspitzen von F_2 und F_3 ergeben sich aus folgender Bedingung: Bei Kräften, die im Gleichgewicht stehen, dürfen im Kräfteck keine Pfeilspitzen zusammenstoßen.</p>
---	--

Abb. 1.7: Kräfteck

Um festzustellen, ob es sich bei F_2 bzw. F_3 um Zug- oder Druckkräfte handelt, vergleicht man die „wirklichen“ Pfeilspitzen im Kräfteck (Abb. 1.7) mit denen im Lageplan (Abb. 1.6) angenommenen Pfeilspitzen (Positivbild). Stimmen die Pfeilspitzen jeweils überein, so handelt es sich um Zugkräfte (positives Vorzeichen). Stimmen sie nicht überein, so sind es Druckkräfte (negatives Vorzeichen).

Auf das vorliegende Beispiel angewendet, ergibt sich:

$$F_2 = -3,5 \text{ kN (Druck)}$$

$$F_3 = -2,0 \text{ kN (Druck)}$$

Es handelt sich somit um Druckkräfte.

1.3.3 Rechnerische Lösung

Man skizziert ein Kräfteck und zeichnet die Pfeilspitzen so ein, dass keine Pfeilspitzen zusammenstoßen.

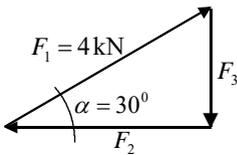


Abb. 1.8: Kräfteck

Rechnerisch ergibt sich:

$$|F_2| = F_1 \cdot \cos 30^\circ = 3,46 \text{ kN}$$

$$|F_3| = F_1 \cdot \sin 30^\circ = 2,0 \text{ kN}$$

Durch Vergleich der Pfeilspitzen mit den positiv (Zug) eingetragenen Kräften F_2 und F_3 im Lageplan (Abb. 1.6) folgt:

$$F_2 = -3,46 \text{ kN (Druck)}$$

$$F_3 = -2,00 \text{ kN (Druck)}$$

Fazit aus den Abschnitten 1.1 bis 1.3

Kraftzerlegung

Wird eine Kraft in zwei Komponenten zerlegt, so muss die Pfeilspitze der im Kräfteck zuletzt angetragenen Kraft mit der Pfeilspitze der zu zerlegenden Kraft zusammenstoßen. Die Pfeilspitzen der Komponenten ergeben sich, indem sie den gleichen Umlaufungssinn haben müssen.

Gleichgewicht

Soll Gleichgewicht dargestellt werden, so müssen die Kräfte im Kräfteck alle den gleichen Umlaufungssinn haben. **Es dürfen an keiner Stelle zwei Pfeilspitzen zusammenstoßen.**

1.4 Zusammenhang zwischen Spannungen und Schnittgrößen

1.4.1 Vorbemerkungen

Bei Lösungen von statischen Fragestellungen und bei den gängigen statischen Berechnungen werden auf mathematischem Wege in der Regel zunächst die Schnittgrößen ermittelt und daraus die Spannungen. Die Schnittgrößen (Biegemoment, Querkraft, Längskraft) sind jedoch reine Rechenwerte. Sie kommen in der Realität nicht vor. Man arbeitet mit Ihnen, weil sich so statische Zusammenhänge einfacher mathematisch darstellen lassen. In den folgenden Abschnitten werden die Zusammenhänge zwischen Spannungen (Realität) und Schnittgrößen (Rechenwerte) qualitativ dargestellt.

1.4.2 Normalspannung σ_N / Längskraft (Normalkraft) N

Bei Belastung z.B. einer Stütze durch eine vertikale Last F ergeben sich in einem Querschnitt, der sich im ausreichenden Abstand von der Lastangriffsstelle befindet, Druckspannungen σ_N (Spannung = Kraft je Flächeneinheit).

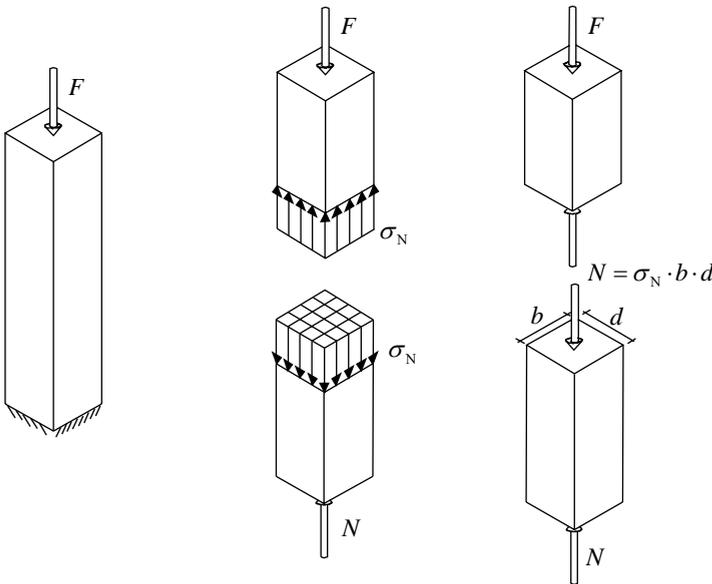


Abb. 1.9: Druckkraft/Druckspannungen

Der Rechenwert für die Resultierende der Druckspannungen σ_N wird Längskraft (Normalkraft) N genannt. Sie ergibt sich aus der Addition der Spannungen über die Querschnittsfläche:

$$N = \sigma_N \cdot b \cdot d$$

1.4.3 Schubspannungen τ / Querkraft V ¹

In den Querschnitten eines vertikal belasteten Trägers treten neben Normalspannungen σ aus Biegung (Biegemomenten), auch sog. Schubspannungen τ auf.

Sie haben innerhalb eines Querschnitts unterschiedliche Größen. Beim Rechteckquerschnitt verändert sich die Größe z.B. parabelförmig. Die Resultierende dieser Schubspannungen ist die Querkraft V (Rechenwert).

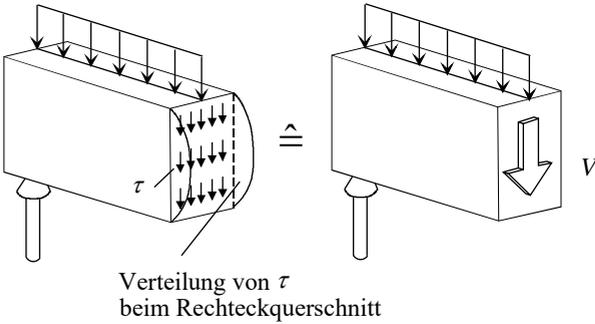


Abb. 1.10: Schubspannungen / Querkraft aus Biegung

1.4.4 Normalspannung aus Biegung σ / Biegemomente M

Wird ein Träger durch Vertikallasten beansprucht, so verformt er sich (Abb. 1.11).

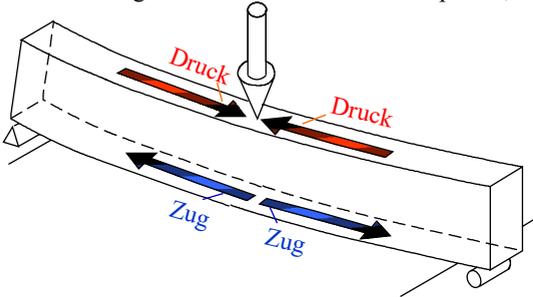


Abb. 1.11: Verformungsfigur eines Trägers

Aus der Anschauung heraus ist klar, dass am obersten Rand des Trägers die größte Stauchung des Materials und am untersten Rand die größte Dehnung auftritt. Im mittleren Bereich der Querschnittshöhe liegt eine Faser, die weder eine Stauchung noch eine Dehnung erfährt. Diese wird als „Neutrale Faser“ (NF) oder auch als „Nulllinie“ bezeichnet. Unterhalb der NF nehmen die Dehnungen ausgehend von null bis zu einem Maximalwert am unteren Rand zu und oberhalb der NF gilt das Entsprechende für die Stauchungen.

Auf Grund des Hookeschen Gesetzes $\sigma = E \cdot \varepsilon$ (Spannung = Elastizitätsmodul x Dehnung) sind die Spannungen proportional zu den Dehnungen. Die Spannungsverteilung über die Querschnittshöhe wird am unverformten Träger in Abb. 1.12 dargestellt.

¹ Bisher wurde die Querkraft mit Q bezeichnet. Im Rahmen der europäischen Normung hat man sich auf die neue Bezeichnung V geeinigt.

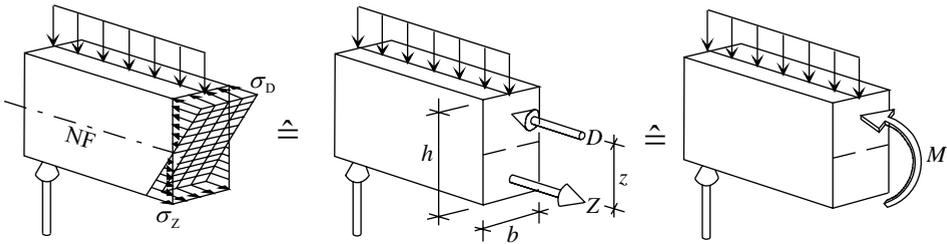


Abb. 1.12: Spannungsverteilung über die Querschnittshöhe

Aus Gründen der vereinfachten Darstellung in den weiteren Rechnungen werden die dreieckig verteilten Spannungen jeweils zu einer resultierenden Druckkraft D und zu einer resultierenden Zugkraft Z zusammengefasst. Bezeichnet man den Abstand von D und Z (diese resultierenden Kräfte greifen jeweils im Schwerpunkt des Spannungsdreiecks an) mit z , so ergibt sich das Moment (Moment eines Kräftepaars) zu $M = Z \cdot z = D \cdot z$, da $D = Z$ ist. Für eine nochmalige Vereinfachung in der Darstellung kann man das Kräftepaar D und Z als „krummen Pfeil“ darstellen mit der Bezeichnung M (vgl. Abb. 1.12).

1.5 Ermittlung von Schnittgrößen

1.5.1 Allgemeines

In der Statik werden die Aufgaben in der Regel mit Hilfe mathematischer Formulierungen gelöst. Man geht bei der Bemessung (Wahl der Querschnitte und Nachweis, dass die Konstruktion standsicher ist) wie folgt vor:

Es werden zunächst die Schnittgrößen M , V , N (Rechenwerte) und daraus die (wirklichen) Spannungen ermittelt. Dann wird nachgewiesen, dass die vorhandenen Spannungen vom Querschnitt und dem gewählten Material mit einem bestimmten Sicherheitsabstand zur Bruchfestigkeit aufgenommen werden können.

Beim „neuen Sicherheitskonzept“, das auch den Eurocodes zugrunde liegt, wird im Detail etwas anders vorgegangen, aber das Grundprinzip ist das Gleiche.

Im Folgenden wird an einfachen Beispielen die Ermittlung der Schnittgrößen mit Hilfe des Schnittprinzips bei statisch bestimmten Systemen (Systeme, die alleine mit Gleichgewichtsbedingungen berechenbar sind) gezeigt.

1.5.2 Definition der positiven Schnittgrößen

Hinweis:

Schnittgrößen werden an der Schnittstelle immer positiv angetragen (Abb. 1.13). Sie treten in einer Schnittstelle immer als „Paar“ auf. Aus Gleichgewichtsgründen müssen sie sich in ihrer Wirkung gegenseitig aufheben.

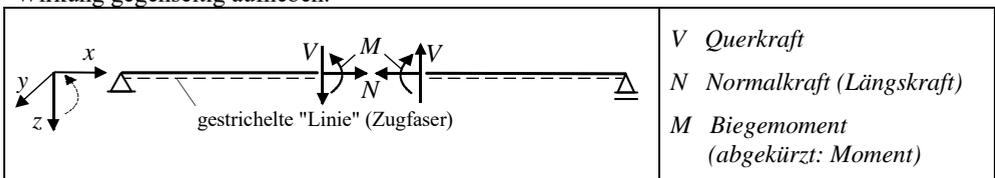


Abb. 1.13: Positive Schnittgrößen

Symbol \triangle $\hat{=}$ „Festes Lager“, d.h. es können zwei Lagerkraftkomponenten wirken.

Symbol \triangleleft $\hat{=}$ „Bewegliches Lager“, d.h. es kann nur eine Lagerkraft wirken und zwar senkrecht zur „Bewegungsrichtung“

Es gibt 2 Möglichkeiten für die **Definition** von **positiven** Schnittgrößen (vgl. Abb. 1.13).

1. Möglichkeit:

Schnittgrößen sind positiv, wenn sie am linken Schnittufer im Sinne des positiven Achsenkreuzes wirken.

2. Möglichkeit:

Biegemomente M sind positiv, wenn sie auf der Seite der „gestrichelten Linie“ (Zugfaser) Zug erzeugen.

Querkräfte V sind positiv, wenn sie am linken Schnittufer nach unten und am rechten nach oben wirken.

Normalkräfte N sind positiv, wenn sie als Zugkräfte wirken.

1.5.3 Träger auf zwei Stützen

Hinweis zu den folgenden Zahlenbeispielen: Schnittgrößen werden immer „positiv“ angetragen. Ergibt die Berechnung ein negatives Vorzeichen, so wirkt die Schnittgröße in Wirklichkeit entgegengesetzt.

Beispiel 1: Träger auf 2 Stützen mit Einzellast

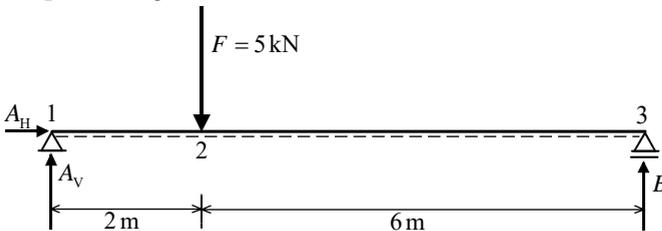


Abb. 1.14: Träger auf 2 Stützen mit Einzellast

Auflagereaktionen

Die Auflagerreaktionen ermittelt man mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_V = 0$$

$$\sum F_H = 0$$

$$\sum M_i = 0$$

Man kann die Kraft-Gleichgewichtsbedingungen $\sum F_V = 0$ und $\sum F_H = 0$ auch durch Momenten-Gleichgewichtsbedingungen ersetzen, indem man verschiedene Bezugspunkte für das jeweilige Momentengleichgewicht wählt [Rubin–96].

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum M_3 = 0: \quad -A_V \cdot 8 + 5 \cdot 6 = 0 \qquad A_V = 30/8 = 3,75 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0: \quad B_V \cdot 8 - 5 \cdot 2 = 0 \qquad B_V = 10/8 = 1,25 \text{ kN}$$

$$\sum F_H = 0: \quad A_H = 0$$

$$\text{Kontrolle: } \sum F_V = 0: \quad -A_V + F - B = 0 \qquad -3,75 + 5 - 1,25 = 0 \qquad 0 = 0$$

Schnittgrößen

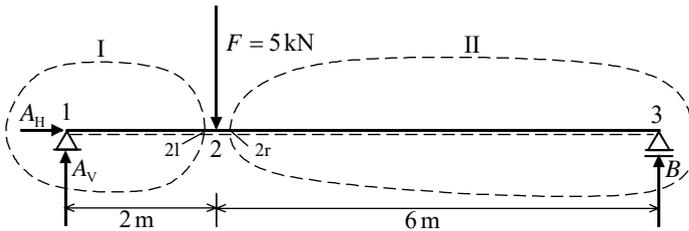


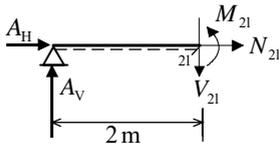
Abb. 1.14a: Rundschnitte

In Abb. 1.14a greift die Last F an der Stelle 2 an. Für die Berechnung der Querkräfte muss zwischen der Stelle 2l (links neben Angriffspunkt von F) und 2r (rechts neben Angriffspunkt von F) unterschieden werden (Abb. 1.14a). Die Stellen 2l und 2r liegen unendlich dicht an der Stelle 2, so dass **2l, 2 und 2r geometrisch an der gleichen Stelle liegen**, also 2 m vom linken Auflagerpunkt entfernt.

Ermittlung der Schnittgrößen

Die Schnittgrößen an den Stellen 2l und 2r werden mit Hilfe von „Rundschnitten“ und Gleichgewichtsbedingungen ermittelt.

Schnitt I: (linkes Schnittufer)

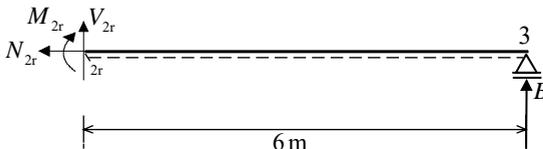


$$\sum M_2 = 0: \quad -A_V \cdot 2 + M_{2l} = 0 \quad M_{2l} = A_V \cdot 2 = 3,75 \cdot 2 = 7,50 \text{ kNm}$$

$$\sum F_V = 0: \quad -A_V + V_{2l} = 0 \quad V_{2l} = A_V = 3,75 \text{ kN}$$

$$\sum F_H = 0: \quad A_H + N_{2l} = 0 \quad N_{2l} = -A_H = 0$$

Schnitt II: (rechtes Schnittufer)



$$\sum M_2 = 0: \quad -M_{2r} + B_V \cdot 6 = 0 \quad M_{2r} = B_V \cdot 6 = 1,25 \cdot 6 = 7,50 \text{ kNm}$$

$$\sum F_V = 0: \quad -V_{2r} - B_V = 0 \quad V_{2r} = -B_V = -1,25 \text{ kN}$$

$$\sum F_H = 0: \quad N_{2r} = 0$$

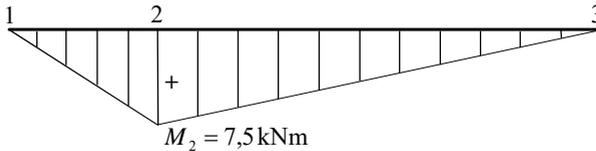
Aus den Ergebnissen ist ersichtlich:

$$M_{2l} = M_{2r} = 7,50 \text{ kNm} = M_2$$

Zustandslinien

Die ermittelten Schnittgrößen können grafisch dargestellt werden. Man erhält so die M -Linie, die V -Linie und die N -Linie (Zustandslinien). Die Bereiche zwischen den Zustandslinien und der Bezugslinie nennt man Zustandsflächen.

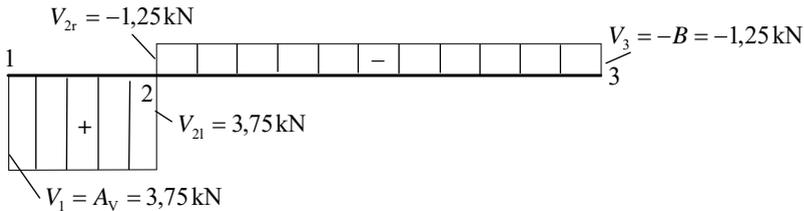
M -Linie (Fläche)



Hinweis:

Unter Einzellasten F treten in einer M -Linie Knicke auf. Zwischen diesen Knicken verläuft die M -Linie geradlinig.

V -Linie (Fläche)



Hinweis:

Unter einer Einzellast F treten Sprünge auf, die jeweils die Größe (Betrag) der angreifenden Einzellasten haben.

Kontrolle:

Die Flächeninhalte (Beträge) der positiven und negativen Flächenanteile müssen gleich sein.

$$3,75 \cdot 2 = 1,25 \cdot 6 \quad 7,5 = 7,5$$

N -Linie (Fläche)

$$1 \quad \quad \quad 3 \quad N = 0$$

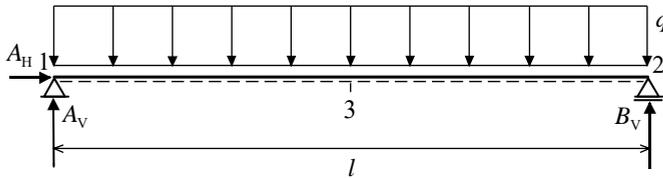
Beispiel 2: Träger auf 2 Stützen mit Gleichstreckenlast

Abb. 1.15: Träger auf 2 Stützen mit Gleichstreckenlast

Auflagerreaktionen

$$\sum M_2 = 0: \quad -A_V \cdot l + q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0 \quad A_V = \frac{q \cdot l}{2}$$

$$B_V = A_V = \frac{q \cdot l}{2} \text{ (Symmetrie)}$$

$$\sum F_H = 0: \quad A_H = 0$$

Schnittgrößen

	$\sum F_V = 0: \quad -A_V + V_1 = 0 \quad V_1 = A_V$ $\sum F_H = 0: \quad A_H + N_1 = 0 \quad N_1 = -A_H = 0$ $M_1 = 0 \text{ (Gelenk)}$
--	--

	$\sum M_3 = 0: \quad -A_V \cdot \frac{l}{2} + q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} + M_3 = 0$ $M_3 = A_V \cdot \frac{l}{2} - \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{q \cdot l^2}{8}$ $M_3 = \frac{q \cdot l^2}{8}$ $\sum F_V = 0: \quad -A_V + q \cdot \frac{l}{2} + V_3 = 0$ $V_3 = A_V - q \cdot \frac{l}{2} = \frac{q \cdot l}{2} - q \cdot \frac{l}{2} = 0$
--	---