

A small white square icon.

Michael Krystek

Berechnung der Messunsicherheit

Grundlagen und Anleitung
für die praktische Anwendung

3., erweiterte Auflage

Beuth

Berechnung der Messunsicherheit



Michael Krystek

Berechnung der Messunsicherheit

Grundlagen und Anleitung
für die praktische Anwendung

3., erweiterte Auflage 2020

Herausgeber:
DIN Deutsches Institut für Normung e. V.

Beuth Verlag GmbH · Berlin · Wien · Zürich

Herausgeber: DIN Deutsches Institut für Normung e. V.

© 2020 **Beuth Verlag GmbH**

Berlin · Wien · Zürich

Saatwinkler Damm 42/43

13627 Berlin

Telefon: +49 30 2601-0

Telefax: +49 30 2601-1260

Internet: www.beuth.de

E-Mail: kundenservice@beuth.de

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechts ist ohne schriftliche Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung in elektronischen Systemen.

Die im Werk enthaltenen Inhalte wurden vom Verfasser und Verlag sorgfältig erarbeitet und geprüft. Eine Gewährleistung für die Richtigkeit des Inhalts wird gleichwohl nicht übernommen. Der Verlag haftet nur für Schäden, die auf Vorsatz oder grobe Fahrlässigkeit seitens des Verlages zurückzuführen sind. Im Übrigen ist die Haftung ausgeschlossen.

Titelbild: © Sergei Dvornikov – stock.adobe.com

Satz: Michael Krystek

Druck: COLONEL, Kraków

Gedruckt auf säurefreiem, alterungsbeständigem Papier nach DIN EN ISO 9706

ISBN 978-3-410-29889-2

ISBN (E-Book) 978-3-410-29890-8

Geleitwort

Vor etwa 20 Jahren hat die Veröffentlichung des *Leitfadens zur Angabe der Unsicherheit beim Messen* (engl.: *Guide to the Expression of the Uncertainty in Measurement* (GUM)) ein neues Denken in der quantitativen Bewertung und Angabe der Güte von Messergebnissen initiiert. Es schien ein vollständiger Bruch mit den klassischen statistischen Auswertemethoden und dem metrologischen Konzept der Fehlerrechnung zu sein. Der GUM, der gemäß den Ideen von Bayes und Laplace eine durchgehende probabilistische Interpretation von Kenntnissen über messbare Größen einführt, diese auch klassischen statistischen Auswerteformeln unterlegt, führt als etwas wesentlich Neues auch Elemente der Informationstheorie in Form der sogenannten Bewertungsmethode Typ-B zur Behandlung nichtstatistischer Kenntnisse in die praktische Messdatenauswertung ein. Damit gelingt Zweierlei: die gleichartige Behandlung von statistischer und nicht-statistischer Information sowie die Anpassung der Messdatenauswertung an die Entwicklung der modernen digitalen Messtechnik, in der die Reproduzierbarkeit/Wiederholbarkeit von Messergebnissen eine nachrangige Bedeutung im Vergleich zu den unbekannten systematischen Effekten hat.

Allerdings ist der GUM weder als Textbuch noch als normatives Dokument formuliert, und weder stellt er sich ganz in den Kontext der Bayesschen Wahrscheinlichkeitstheorie noch in den der klassischen Stochastik. Für den praktischen Messtechniker und die Qualitätsingenieure, aber auch für Studierende technischer und naturwissenschaftlicher Fachrichtungen, die alle auch über Expertise in der statistischen Analyse verfügen, hat dies bisher ein Problem bereitet: Es entstand der Eindruck eines „sich entscheiden Müssens“ bzw. gar der Unverträglichkeit der zugrunde liegenden Konzepte.

Eine zusammenfassende Darstellung des Gebietes von den messtechnischen Grundlagen über die Theoreme der Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Regeln der Statistik sowie unter konsistenter Einbeziehung der Bayes-Laplace-Theorie bis zum praktischen Konzept der Messunsicherheitsbestimmung hat bisher in der deutschsprachigen Literatur gefehlt.

Der Autor Michael Krystek, der über langjährige praktische Erfahrung auf allen genannten Gebieten in Anwendung und Lehre verfügt, hat sich mit Erfolg dieser nicht einfachen, aber wichtigen Aufgabe angenommen. Sein nunmehr vorliegendes Buch „Berechnung der Messunsicherheit — Grundlage und Anleitung für die praktische Anwendung“ meistert nicht nur souverän den erforderlichen Brückenschlag von der Messtechnik bis zur Bayes-Messdatenauswertung, sondern behandelt auch wichtige aktuelle Teilbereiche, die in ihrer Darstellung und

Verständlichkeit deutlich über die vorliegenden GUM-Dokumente hinausgehen, wie beispielsweise die multivariaten Ausgangsgrößen, die Ausgleichsrechnung, Korrelationen in der Messtechnik sowie die Modellbildung.

Dem Autor ist es gelungen, dem Buch eine klare und logische Gliederung zu geben und selbst komplex aussehende mathematische Zusammenhänge verständlich darzustellen. Gut durchdachte und einfache Beispiele in allen Kapiteln runden dieses Konzept ganz im Sinne des Buchtitels ab. Es bereitet viel Freude, das breite Gebiet der Messdatenauswertung und Messunsicherheitsbestimmung eingebettet in seinen klassischen Grundlagen von Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik sowie in Konsistenz mit aktuellen Entwicklungen und Ansätzen zu sehen. Das hier vorliegende Buch ist daher allen Metrologen, Natur- und Technikwissenschaftlern, praktisch in Messtechnik und Qualitätssicherung tätigen Ingenieuren sowie gleichermaßen Hochschullehrern und Studierenden zur Lektüre ausdrücklich zu empfehlen.

Prof. Dr.-Ing Klaus-Dieter Sommer
Vorsitzender des GMA-Fachbereiches
Grundlagen und Methoden der Mess-
und Automatisierungstechnik

Vorwort zur 1. Auflage

Ein vollständiges Messergebnis besteht aus dem Wert der gemessenen Größe und der ihm beigeordneten Messunsicherheit.

Durch die Einführung des *Leitfadens zur Angabe der Unsicherheit beim Messen* (GUM) vor fast zwanzig Jahren ist die Berechnung dieser Werte international vereinheitlicht worden. Dies war wegen der Globalisierung des Handels und des weltweiten Gebrauchs des Internationalen Einheitensystems (SI) notwendig geworden, damit die Ergebnisse von in verschiedenen Ländern vorgenommenen Messungen leicht miteinander verglichen werden können.

Vor der Einführung des GUM wurde zur Berechnung der Messunsicherheit die sogenannte „Fehlerrechnung“ angewendet. Diese hatte jedoch den Nachteil, dass nur die Messdaten allein zur Berechnung eines besten Schätzwertes der Messgröße und ihrer Unsicherheit herangezogen werden konnten. Zusätzlich vorhandene Information, wie z. B. Vorkenntnisse über die Messgröße und die Eigenschaften des Messgerätes oder Kenntnisse über nicht direkt gemessene Einflussgrößen ließen sich nicht in die Auswertung mit einbeziehen. Insbesondere stellte die Behandlung systematischer Messabweichungen ein Problem dar.

Seit der Veröffentlichung des GUM sind immer wieder Stimmen zu hören, dass dieses Dokument für den Anwender zu kompliziert sei. Dies ist zum Teil richtig und zum Teil falsch. Wer nur die Regeln des GUM *anwenden* will, für den gibt der GUM klare Anweisungen, wie zu verfahren ist. Das Problem ist wohl eher, die Regeln des GUM auch zu *verstehen*. Das vorliegende Buch versucht diese Lücke zu schließen, indem es sich nicht als ein „Leitfaden für den Leitfaden“ versteht, sondern dem Leser die im GUM fehlende Information bereitstellt.

Bei der Anwendung der Methoden des GUM auf die in der Realität vorkommenden Probleme gibt es im Wesentlichen zwei Schwierigkeiten für den Anwender, nämlich die Modellbildung und die sinnvolle und korrekte Anwendung der Ermittlungsmethode B. Wenn diese beiden Schwierigkeiten überwunden sind, kann die Auswertung der Messdaten mit den heute vorhandenen Programmen zur Berechnung der Messunsicherheit erledigt werden. Deshalb konzentriert sich dieses Buch auf diese beiden Aspekte der Messdatenauswertung.

Das erste Kapitel dient der Einführung und soll den Leser motivieren, sich mit den Methoden der Messdatenauswertung intensiver auseinanderzusetzen. Das zweite Kapitel geht dann auf die Grundbegriffe der Messtechnik ein, die ausführlich erläutert werden. Diese Begriffe sind dem Messtechniker vertraut, aber sie haben zum Teil in der Vergangenheit einen Bedeutungswandel erfahren, der sich in den neuen Normen und Richtlinien widerspiegelt.

Die Modellbildung setzt sehr viel Erfahrung voraus, und jedes neue Modell stellt meistens wieder eine Herausforderung dar. Um dem Anwender eine Hilfestellung beim Aufstellen von Modellen zu geben, wurden im dritten Kapitel Hinweise und allgemeingültige Regeln zusammengestellt, deren Beachtung insbesondere bei komplexen Modellen viel Ärger vermeiden kann. Dabei wird auch auf die im GUM verwendeten linearen und quadratischen Näherungsverfahren und ihre Grenzen ausführlich eingegangen.

Eine korrekte Anwendung der Methoden des GUM und eine Bewertung der damit erhaltenen Ergebnisse setzt Grundkenntnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie und der mathematischen Statistik voraus, ohne die sich diese Methoden für kompliziertere Messaufgaben nicht einsetzen lassen. Dies gilt insbesondere für die Ermittlungsmethode B, die auf Wahrscheinlichkeitsverteilungen und einer Interpretation der Wahrscheinlichkeit beruht, die vielen Anwendern nicht vertraut ist. Um den Sinn der im GUM festgelegten Regeln zu verstehen, ist zusätzliches Wissen notwendig. Dieses Wissen zu vermitteln, ist die Aufgabe der Kapitel vier und fünf, die den Hauptteil dieses Buches darstellen.

Im letzten Kapitel wird die traditionelle Methode der Messdatenauswertung mit den Methoden des GUM verglichen, um dem Leser zu ermöglichen, Unterschiede und Gemeinsamkeiten zu erkennen. Dieser Vergleich ist durchaus kritisch und zeigt, dass es im GUM noch Verbesserungspotenzial gibt.

Michael Krystek

Vorwort zur 2. Auflage

Der gesamte Text wurde für die zweite Auflage gründlich überarbeitet, um ihn noch besser verständlich zu machen. Dabei wurden auch Fehler beseitigt, auf die mich einige Leser hingewiesen haben. Zusätzlich wurde das Buch um zwei weitere Abschnitte erweitert. Zum Kapitel 3 wurde ein Abschnitt über graphische Modellierung hinzugefügt, zum Kapitel 4 ein Abschnitt über Abschätzungen. Außerdem wurde das Buch um eine Liste der Definitionen, eine Liste der Theoreme und ein Symbolverzeichnis ergänzt.

Berlin, im Juni 2015

Michael Krystek

Vorwort zur 3. Auflage

Der Text wurde für die dritte Auflage überarbeitet um die Änderungen zu berücksichtigen, die sich durch die Revision des Internationalen Einheitensystems (SI) ergeben haben. Noch vorhandene Fehler im Text der 2. Auflage, auf die mich Leser dankenswerterweise hingewiesen haben, wurden korrigiert. Außerdem wurden noch ein Anhang über multivariate Unsicherheitsberechnungen und ein Anhang über systematische Messabweichungen hinzugefügt. Damit gibt es nun inhaltlich keinen Unterschied mehr zwischen der dritte Auflage dieses Buches und der bereits erschienenen englischen Fassung.

Berlin, im Februar 2020

Michael Krystek

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Die Bedeutung der Messunsicherheit	1
1.2	Das Wesen der Messunsicherheit	4
2	Grundbegriffe der Messtechnik	7
2.1	Größen, Größenwerte, Einheiten	7
2.2	Messen	14
2.3	Wahrer Wert einer Messgröße	16
2.4	Messprinzip, Messmethode, Messverfahren	21
2.5	Genauigkeit, Richtigkeit, Präzision	24
2.6	Messabweichungen	29
2.7	Messunsicherheit	33
3	Das Modell der Auswertung	41
3.1	Methoden der Modellbildung	41
3.2	Modellgleichungen	47
3.3	Unterm Modelle	53
3.4	Modellierungsstrategien	56
3.5	Linearisierung der Modellgleichungen	59
3.6	Quadratische Näherungen	75
3.7	Graphische Modellierung	80
4	Wahrscheinlichkeitstheorie	97
4.1	Der Wahrscheinlichkeitsbegriff	97
4.2	Ereignisse und Ergebnisse	115
4.3	Mathematische Wahrscheinlichkeit	126
4.4	Bedingte Wahrscheinlichkeit	129

4.5	Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten	136
4.6	Das Theorem von BAYES und LAPLACE	142
4.7	Stochastische Unabhängigkeit	146
4.8	Zufallsgrößen	150
4.9	Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen	156
4.10	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen	167
4.11	Transformationen von Zufallsgrößen	173
4.12	Erwartungswerte	177
4.13	Varianzen und Standardabweichungen	185
4.14	Mehrdimensionale Zufallsgrößen	192
4.15	Multivariate Verteilungsfunktionen	195
4.16	Multivariate Dichtefunktionen	199
4.17	Marginalisierung und Randverteilungen	206
4.18	Mehrdimensionale Erwartungswerte	212
4.19	Kovarianzen und Korrelationen	218
4.20	Abschätzungen	226
4.21	Der zentrale Grenzwertsatz	228
5	Statistische Methoden	231
5.1	Grundgesamtheiten und Stichproben	231
5.2	Stichprobenfunktionen	234
5.3	Schätzer	236
5.4	Momentenmethode	243
5.5	Maximum-Likelihood-Methode	246
5.6	Methode der kleinsten Quadrate	256
5.7	BAYES-Methode	264
5.8	Intervall- und Bereichsschätzer	279
6	Konzepte der Messunsicherheit	299
6.1	Die traditionelle Methode	299
6.2	Die Methoden des GUM	308
	Anhänge	317
A	Multivariate Messunsicherheit	319
A.1	Einleitung	319
A.2	Univariate Unsicherheitsberechnungen	319
A.3	Multivariate Unsicherheitsberechnung	326

A.4	Matrixdarstellung	329
A.5	Verallgemeinerung	331
A.6	Überdeckungsbereiche	333
A.7	Zusammenfassung der Berechnungen	335
A.8	Beispiele	338
B	Systematische Messabweichungen	345
B.1	Einleitung	345
B.2	Vorbemerkungen	346
B.3	Ignorieren einer systematischen Abweichung	348
B.4	BAYES-Theorem und Marginalisierung	348
B.5	Das Prinzip der maximalen Entropie	350
B.6	Behandlung systematischer Abweichungen	354
B.7	Thermische Längenänderung	356
B.8	Der Kosinusfehler bei der Längenmessung	360
B.9	Der Einfluss von Formabweichungen	363
B.10	Rauschen als systematische Messabweichung	368
	Liste der Definitionen	375
	Liste der Theoreme	379
	Symbolverzeichnis	381
	Literaturverzeichnis	387
	Sachverzeichnis	395

1 Einleitung

Ich bin bereit zuzugestehen, dass alle Daten eine gewisse Unsicherheit haben und deshalb, wenn möglich, durch zusätzliche Daten bestätigt werden sollten.

(Bertrand Russell, 1940)

Messungen werden durchgeführt, um den Wert einer Größe zu bestimmen. Wir werden dabei aber immer mehr oder weniger große Abweichungen vom tatsächlich vorliegenden Wert erhalten. Dies ist selbst dann der Fall, wenn wir bei der Messung so sorgfältig wie möglich vorgehen. Den wahren Wert einer Messgröße können wir grundsätzlich nicht ermitteln. Er bleibt eine Fiktion. Um die Zuverlässigkeit einer Messung einschätzen zu können und die Vergleichbarkeit von Messergebnissen zu ermöglichen, ist daher immer eine Angabe der Messunsicherheit notwendig. Diese Forderung ist im Bereich der wissenschaftlichen und technischen Messtechnik seit langem selbstverständlich. Zunehmend spielt sie auch bei alltäglichen Messungen eine Rolle.

1.1 Die Bedeutung der Messunsicherheit

Das Messen ist in unserem Alltag allgegenwärtig, auch wenn es den meisten Menschen nicht unmittelbar bewusst wird. Beispiele sind die Zeitmessung mit unseren Uhren, die Geschwindigkeitsmessung mit dem Tachometer in unserem Auto, die Volumenmessung an der Zapfsäule der Tankstelle, die Bestimmung des Gewichts¹ vieler Artikel im Supermarkt oder die Messung des Verbrauchs

¹Korrekterweise sollten wir von einer Bestimmung der Masse sprechen, aber im Alltag wird zwischen Masse und Gewicht meistens kein Unterschied gemacht.

von Wasser, Gas und Strom im Haus. In der Medizin wird die Körpertemperatur gemessen oder die Konzentration von bestimmten Stoffen im Blut oder Urin, um Rückschlüsse auf den Gesundheitszustand eines Menschen zu ermöglichen. Die Konzentration von Schadstoffen in Wasser, Luft und Boden wird bestimmt, die Belastung durch ultraviolette Strahlung oder durch radioaktive Stoffe, die Konzentration von Alkohol in Getränken, um die Steuer festzusetzen, oder in der Atemluft, um einen Verstoß gegen geltende Vorschriften festzustellen usw. Die moderne Gesellschaftsordnung ist ohne die Messtechnik nicht mehr vorstellbar. Die Messtechnik selbst hat sich dabei inzwischen zu einer eigenständigen Wissenschaft entwickelt.

Das Bedürfnis der Menschheit, zu messen und zu wägen, ist sehr alt. Bereits zu Beginn der Zivilisation in vorchristlicher Zeit haben die Menschen Maße verwendet und Messungen durchgeführt. Diese beruhten auf astronomischen Beobachtungen, den Proportionen des menschlichen Körpers oder auf einem Vergleich mit Objekten der Umwelt. Alte Maßeinheiten, wie die Zeiteinheiten Jahr und Tag, die Längeneinheiten Elle und Fuß oder die Leistungseinheit Pferdestärke erinnern uns heute noch daran.

Die Vergleichbarkeit von Messungen wurde zunächst durch willkürlich festgelegte Maßverkörperungen — wie z. B. die Länge des Fußes oder der Elle des gerade regierenden Herrschers — sichergestellt. Im Mittelalter wurden die Maßverkörperungen an gut zugänglichen Plätzen, wie den Außenmauern von Kirchen und Rathäusern angebracht. Durch Vergleich konnten bestimmte Eigenschaften von Objekten quantifiziert und die Gerechtigkeit von Tausch und Handel zumindest lokal einigermaßen sichergestellt werden. Die Messunsicherheit im heutigen Sinne spielte zu diesem Zeitpunkt noch keine Rolle.

Die Entwicklung der Naturwissenschaften und der Technik erforderte eine immer präzisere Messtechnik. Erst eine quantitative Beschreibung der Naturerscheinungen aufgrund von Messungen mit einer möglichst kleinen Unsicherheit ermöglichte eine mathematische Formulierung der Naturgesetze und ihre verlässliche Anwendung durch die Technik. Neue naturwissenschaftliche Erkenntnisse ermöglichten andererseits wieder eine Weiterentwicklung der Messtechnik und eine Steigerung ihrer Genauigkeit. Dabei stellte sich bald heraus, dass Messergebnisse mit mehr oder weniger großen Unsicherheiten behaftet sind, deren Ursachen untersucht und die quantifiziert werden müssen.

Der Übergang von der Einzelstückfertigung der Handwerker und Manufakturen zur Massenfertigung während der Industrialisierung wurde erst durch verlässliche Messergebnisse möglich, aber auch die heutige Globalisierung von Handel und Produktion setzt — neben einem international vereinbarten System

von Maßeinheiten — ein hohes Vertrauen in die Vergleichbarkeit von Messergebnissen voraus, die ohne eine quantitative Angabe über die Genauigkeit einer Messung nicht möglich ist. Die Angabe einer dem Messwert beigeordneten Messunsicherheit dient diesem Zweck.

Wir wollen die Bedeutung einer quantitativen Angabe der Messgenauigkeit noch durch einige willkürlich herausgegriffene Beispiele verdeutlichen.

In vielen Bereichen müssen Messwerte mit Grenzwerten verglichen werden. In der Produktion wird dadurch zum Beispiel die Einhaltung der durch den Konstrukteur vorgegebenen Spezifikationen überprüft, in der Medizin die Entscheidung über das Vorliegen einer Erkrankung erleichtert oder im gesetzlichen Messwesen die Überwachung von Vorschriften ermöglicht. In allen diesen Fällen lässt sich mithilfe der Messunsicherheit entscheiden, ob ein Messergebnis mit großer Wahrscheinlichkeit innerhalb der vorgegebenen Grenzen liegt oder ob die Anforderungen nicht mehr erfüllt werden. Liegt der gemessene Wert sehr dicht bei einem der vorgegebenen Grenzwerte, dann besteht ein größeres Risiko, dass das gemessene Merkmal den festgelegten Anforderungen möglicherweise nicht entspricht. Die dem Messergebnis beigeordnete Messunsicherheit ist dann ein wichtiges Hilfsmittel, um dieses Risiko realistisch einzuschätzen und dadurch eine vernünftige Entscheidung treffen zu können.

Im Falle einer Produkthaftung muss möglicherweise vor Gericht der Nachweis geführt werden, dass die bei der Herstellung und Freigabe des fraglichen Produktes verwendeten Messprozesse geeignet waren. Ohne einen solchen Nachweis unter Berücksichtigung der Messunsicherheit lassen sich Zweifel an den Messergebnissen, die der Bewertung der wesentlichen Produktmerkmale zugrunde gelegt worden sind, nicht sicher ausräumen.

Damit wir Vertrauen in die Richtigkeit von Messergebnissen haben können, müssen die verwendeten Messgeräte oder Messsysteme auf die Einhaltung ihrer Spezifikationen überprüft werden. Auch in diesem Fall spielt die Angabe der Messunsicherheit eine wesentliche Rolle.

In der medizinischen und pharmazeutischen Forschung muss die Wirksamkeit oder gegebenenfalls die Schädlichkeit von neuen Medikamenten nachgewiesen werden. Dazu werden Versuchsreihen durchgeführt. Eine Beurteilung der Signifikanz der sich dabei ergebenden Messergebnisse ist ohne die Kenntnis der Messunsicherheit nicht möglich.

In den Naturwissenschaften werden neue Theorien stets durch Messung der durch sie vorhersagbaren Phänomene überprüft oder bestehende Theorien erweisen sich durch auftretende Widersprüche zu neuen Messergebnissen möglicherweise als falsch oder unzureichend. Spektakuläre Beispiele dieser Art waren

zu Beginn des vorigen Jahrhunderts die allgemeine Relativitätstheorie, durch die A. EINSTEIN die beobachteten Abweichungen in der Bahnbewegung des Planeten Merkur erklären konnte, die mit der klassischen Mechanik von I. NEWTON nicht in Übereinstimmung zu bringen waren, oder die Annahme der Quantisierung der Energie, durch die M. PLANCK die Abweichungen vom WIENSchen Strahlungsgesetz erklären konnte, die bei sorgfältig durchgeführten Messungen durch Wissenschaftler der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt² nachgewiesen werden konnten und die heute als Geburtsstunde der Quantentheorie angesehen werden. In beiden Fällen spielte die Genauigkeit der Messergebnisse eine entscheidende Rolle. Die dem Messergebnis beigeordnete Messunsicherheit dient als ein Maß für diese Genauigkeit.

1.2 Das Wesen der Messunsicherheit

Die im vorhergehenden Abschnitt angeführten Beispiele verdeutlichen, dass die Messunsicherheit keine negative Bedeutung hat oder einen Mangel der Messung beschreibt, sondern dass ihre Angabe dazu dient, die Qualität eines Messergebnisses zu beurteilen. Die Messunsicherheit ist damit ein wesentlicher Bestandteil jedes vollständigen Messergebnisses.

Was aber meinen wir genau, wenn wir sagen, dass einem Messergebnis eine Messunsicherheit beigeordnet ist? Worüber sind wir eigentlich unsicher? Was genau ist das Wesen der Messunsicherheit?

Um diese Fragen zu beantworten, müssen wir zunächst einmal feststellen, dass wir schon vor der Durchführung einer Messung bestimmte Kenntnisse über die möglichen Werte der uns interessierenden Messgröße besitzen. Wäre das nämlich nicht der Fall, dann könnten wir keine Messung durchführen. Bereits die Wahl eines geeigneten Messgeräts setzt in der Regel voraus, dass wir bereits etwas über den Wert der Messgröße wissen.

Eine Krankenschwester greift z. B. zum Fieberthermometer und nicht zu einem Kochthermometer, um die Körpertemperatur eines Patienten zu bestimmen, weil sie genau weiß, in welchem Bereich der Wert der zu messenden Temperatur zu erwarten ist. Über den genauen Wert der Temperatur ist sie allerdings unsicher. Deshalb nimmt sie die Messung vor.

Physiker konstruieren aufwendige und häufig sehr teure Messsysteme, die auf ihren bereits vorhandenen Kenntnissen beruhen und verändern sie entsprechend, wenn neue Erkenntnisse vorliegen, denn die Suche nach neuen wissen-

²heute Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB)

schaftlichen Erkenntnissen ist stets ein iterativer Prozess. Neue Messungen werden auf der Grundlage der aus den vorhergehenden Messungen gewonnenen Information durchgeführt.

Der Zweck einer Messung ist also, zusätzliche Kenntnisse zu erhalten und damit die Unsicherheit über den Wert einer Messgröße möglichst zu verringern. Wir sind aber bezüglich dieses Wertes niemals vollständig unwissend, unser Wissen ist lediglich unvollkommen.

Als Ergebnis einer Messung erhalten wir einen Wert der interessierenden Messgröße. Aber dieser Wert kann nicht vollkommen genau sein, wie wir uns leicht klar machen können.

Die Krankenschwester hat zwar aufgrund ihrer Kenntnis über den zu erwartenden Temperaturbereich ein geeignetes Thermometer ausgewählt, aber weshalb kann sie über die Genauigkeit der Anzeige dieses Thermometers sicher sein? Auch die Eichung eines Fieberthermometers ist mit einer Unsicherheit behaftet. Aber selbst wenn das nicht der Fall wäre, das Thermometer also als ideal angenommen werden dürfte, kann die Ablesung der Temperatur auf der Skala nicht beliebig genau erfolgen. Es lassen sich noch weitere Gründe finden, warum sich die Körpertemperatur des Patienten nicht genau bestimmen lässt, wie z. B. dass man nicht sicher sein kann, ob sich ein Temperaturgleichgewicht eingestellt hat, oder ob der Wärmeübergang an der Stelle, an der gemessen wurde, möglicherweise unzureichend war.

Jede Messung ist unvollkommen und ist Einflüssen unterworfen, die sich in der Regel nicht genau quantifizieren lassen, oder die uns zum Teil noch nicht einmal vollständig bekannt sind. Diese Einflüsse können vom Messobjekt selbst herrühren (die nicht ideale geometrische Form eines Ziegelsteins erlaubt es z. B. nicht, seine Abmessungen genau zu ermitteln) oder vom Messgerät (z. B. eine Nullpunktabweichung, eine Linearitätsabweichung oder eine Unvollkommenheit der Skalenteilung), sie können auf Umgebungseinflüsse zurückzuführen sein (z. B. Schwankungen der Temperatur, des Luftdrucks und der Luftfeuchtigkeit) oder auf den Bediener des Messgeräts (z. B. eine Ungenauigkeit oder ein Fehler bei der Ablesung der Anzeige, ja sogar eine Voreingenommenheit bezüglich des zu erwartenden Messwertes). Schließlich spielt auch die Wahl eines geeigneten Messverfahrens eine Rolle oder die Stabilität eines für die Kalibrierung des Messgeräts verwendeten Normal- oder Referenzmaterials.

Ein weiterer Grund für die Messunsicherheit ist, dass wir uns oft nicht darüber klar sind, was wir messen. Die ungenaue Festlegung der Messgröße und die unvollkommene Modellierung der Messung sind dann ebenfalls ein Beitrag zur Messunsicherheit, der leider häufig unbeachtet bleibt.

Bisher ist noch nicht davon die Rede gewesen, dass wir aus Erfahrung wissen, dass wir bei einer mehrfachen Wiederholung einer Messung unter sonst gleichen Bedingungen in der Regel nicht den gleichen Messwert erhalten. Wir beobachten, dass Messwerte unregelmäßigen Schwankungen unterliegen, selbst dann, wenn wir uns bemühen, die Messbedingungen möglichst konstant zu halten und systematische Einflussgrößen unter Kontrolle zu bringen.

Eine zufriedenstellende Erklärung der Schwankungen von Messwerten ist bis heute nicht gelungen, obwohl es in der Vergangenheit nicht an Versuchen gemangelt hat, diesen Zustand zu ändern. Wir sprechen in diesem Zusammenhang von „zufälligen“ Schwankungen, ohne dass wir sagen könnten, was das Attribut „zufällig“ denn eigentlich genau bedeutet.

Wenn wir diese mehr philosophische Betrachtung beiseite lassen, dann können wir uns lediglich auf eine möglichst genaue Beschreibung des Phänomens selbst beschränken. Zu diesem Zweck ist in den vergangenen Jahrhunderten eine leistungsfähige mathematische Disziplin entwickelt worden — die Wahrscheinlichkeitstheorie — die es erlaubt, die Gesetzmäßigkeiten zu formulieren, denen die Schwankungen der Messwerte offenbar zu folgen scheinen. Darauf beruht letztlich die heutige Auswertung unserer Messdaten einschließlich der Berechnung der Messunsicherheit zur Einschätzung ihrer Genauigkeit.

Wir haben gesehen, dass durch die Messunsicherheit unsere unvollkommenen Kenntnisse bezüglich des Wertes einer Messgröße charakterisiert werden. Sie kann aber nicht allein auf zufällige Schwankungen des Messwertes zurückgeführt werden. Die Erkenntnis, dass es zwei ihrem Wesen nach verschiedene Beiträge zur Messunsicherheit gibt, ist lange bekannt, aber die Diskussion über ihre korrekte Behandlung beschäftigt uns bis heute.

2 Grundbegriffe der Messtechnik

Eine Größe messen heißt, dieselbe durch eine Zahl darstellen, welche angibt, wie oft die zu Grunde gelegte Einheit in der gemessenen Größe enthalten ist.

(Friedrich Kohlrausch, 1887)

Die Ermittlung von Messergebnissen erfolgt durch Auswerteverfahren, die auf der Anwendung mathematischer Methoden beruhen. Für jede Lösung einer mathematischen Aufgabe ist aber eine eindeutige Festlegung der verwendeten Begriffe erforderlich. Wir werden uns deshalb in diesem Kapitel mit den für die Berechnung von Messergebnissen wesentlichen Grundbegriffen der Messtechnik beschäftigen. Dabei werden wir uns hauptsächlich auf die in der deutschen Norm DIN 1319-1:1995 [DIN1995] und in der derzeit gültigen, im Jahre 2010 erschienenen, korrigierten 3. Auflage des internationalen Wörterbuchs der Metrologie (*International vocabulary of metrology — Basic and general concepts and associated terms (VIM)*, *Corrected version 2010*, deutsche Übersetzung 2011 [VIM]) festgelegten Begriffe und Definitionen beziehen.

2.1 Größen, Größenwerte, Einheiten

Der Begriff „Größe“ hat in der Umgangssprache mehrere Bedeutungen. Er kann z. B. für die Abmessungen irgendeines Objekts oder für die Körpergröße eines Menschen stehen. In der Messtechnik ist dieser Begriff aber mehr im Sinne einer „physikalischen Größe“ zu verstehen, d. h. als ein quantitativ bestimmbares Merkmal (spezielle Eigenschaft) eines Objektes. Man sagt auch, das Objekt sei der *Träger* des Merkmals.

Ein Objekt ist in der Regel gleichzeitig Träger mehrerer Merkmale, wie z. B. Länge, Masse, Volumen, Temperatur, Härte, Farbe, Geruch, usw., aber nicht alle seine Merkmale müssen quantifizierbar sein. Die nicht quantifizierbaren Merkmale, wie z. B. Farbe oder Geruch, heißen Nominalmerkmale³ (VIM:2010, 1.30) und sind keine Größen.

Ein Objekt muss nicht notwendigerweise materieller Art sein, d. h. ein Körper oder eine Substanz, sondern es kann auch ein Phänomen sein, d. h. ein Vorgang oder ein Zustand, wie z. B. eine Strahlung (Licht, ionisierende Strahlung) oder ein elektromagnetisches Feld.

Im Wörterbuch der Metrologie finden wir die folgende Definition für den Begriff „Größe“ (VIM:2010, 1.1):

Definition 2.1 (Größe)

Eine Größe ist eine Eigenschaft eines Phänomens, eines Körpers oder einer Substanz, wobei die Eigenschaft einen Wert hat, der durch eine Zahl und eine Referenz ausgedrückt werden kann.

Eine Größe ist entsprechend der Definition 2.1 zunächst lediglich ein Skalar. Vektoren oder Tensoren, deren Komponenten Größen sind, können jedoch ebenfalls als Größen angesehen werden.

Formelzeichen für Größen werden grundsätzlich *kursiv* geschrieben. Sie sind in der Normenreihe ISO/IEC 80000 *Größen und Einheiten* festgelegt. Ein Formelzeichen kann unterschiedliche Größen angeben.

Der Oberbegriff Größe lässt sich hierarchisch noch in verschiedene Unterbegriffe unterteilen, so wie dies am Beispiel der Größe *Länge* als Oberbegriff in der Abbildung 2.1 gezeigt ist. Diese Größen sind alle von der gleichen Größenart.

Eine Größe hat einen Wert. Dieser Wert wird als „Größenwert“ bezeichnet und ist folgendermaßen definiert (VIM:2010, 1.19):

Definition 2.2 (Größenwert)

Ein Größenwert ist ein Zahlenwert und eine Referenz, die zusammen eine Größe quantitativ angeben.

Die Referenz in dieser Definition kann entweder eine Maßeinheit oder ein Messverfahren oder ein Referenzmaterial oder eine Kombination davon sein. Was unter einer Referenz in diesem Sinne zu verstehen ist, lässt sich am einfachsten durch einige Beispiele verdeutlichen (VIM:2010, 1.19):

³Der Wert eines Nominalmerkmals sollte nicht mit dem *Nennwert* verwechselt werden.

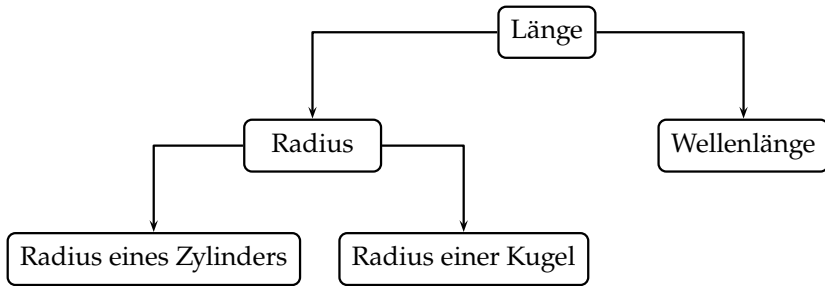


Abbildung 2.1 Hierarchische Unterteilung einer Größe.

Beispiel 2.1

1. Länge eines Stabes: 5,34 m oder 534 cm
2. Masse eines Körpers: 0,152 kg oder 152 g
3. Krümmung eines Bogens: 112 m^{-1}
4. Temperatur einer Probe: -5°C
5. Impedanz eines elektrischen Netzwerkelements bei einer betrachteten Frequenz, wobei j die imaginäre Einheit ist: $(7 + 3j) \Omega$
6. Brechzahl einer Glasprobe: 1,32
7. Rockwellhärte HRC einer Probe: 43,5 HRC
8. Massenanteil von Cd in einer Kupferprobe: $3 \mu\text{g/kg}$ oder $3 \cdot 10^{-9}$
9. Molalität von Pb^{2+} in einer Wasserprobe: $1,76 \mu\text{mol/kg}$
10. Irgendeine Stoffmengenkonzentration von Lutropin in einer Plasmaprobe (Internationaler Standard der WHO 80/552): 5,0 IE/l
11. Eine Kraft, z. B. in kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31,5 \text{ N} \\ 43,2 \text{ N} \\ 17,0 \text{ N} \end{pmatrix}$$

Wir sehen an diesen Beispielen, dass ein Größenwert — je nach Art der Referenz — entweder

- das Produkt aus einer Zahl und einer Maßeinheit (siehe Beispiele 1, 2, 3, 4, 5, 8 und 9) oder
- eine Zahl und eine Referenz zu einem Messverfahren (siehe Beispiel 7) oder
- eine Zahl und ein Referenzmaterial (siehe Beispiel 10)

sein kann. Die Maßeinheit Eins wird für Größen der Dimension Zahl⁴ generell nicht angegeben (Beispiele 6 und 8). Die Zahl kann komplex sein (Beispiel 5). Ein Größenwert kann auf mehr als eine Weise dargestellt werden (Beispiele 1, 2 und 8). Im Falle von Vektor- oder Tensorgrößen hat jede Komponente einen Größenwert (Beispiel 11).

Streng genommen müssen wir Größen und Größenwerte immer unterscheiden. Statt „Höhe eines Berges“ oder „Geschwindigkeit eines Fahrzeugs“ müsste es korrekterweise „Wert der Höhe eines Berges“ oder „Wert der Geschwindigkeit eines Fahrzeugs“ heißen, weil „Höhe“ oder „Geschwindigkeit“ Größen und keine Größenwerte bezeichnen. Im Alltag wird dieser Unterschied aber nicht gemacht, weil jeder aus dem Sinnzusammenhang versteht, was eigentlich gemeint ist. Wir werden im Folgenden diesem Sprachgebrauch folgen und aus dem gleichen Grund auch jeweils das gleiche Formelzeichen für Größen und Größenwerte verwenden. So bedeutet z. B. das Zeichen X sowohl die Größe X selbst, als auch den Größenwert von X . Nur für den Fall, dass unklar sein sollte, was gemeint ist, werden wir einen entsprechenden Zusatz hinzufügen.

Wie wir bereits an den Beispielen sehen konnten, besteht ein Größenwert aus einem Zahlenwert und einer Maßeinheit. Der Begriff „Maßeinheit“ ist wie folgt definiert (VIM:2010, 1.9):

Definition 2.3 (Maßeinheit)

Eine Maßeinheit ist ein reeller skalarer Größenwert, durch Vereinbarung definiert und angenommen, mit dem jeder andere Größenwert einer Größe gleicher Art verglichen werden kann, um das Verhältnis der beiden Größenwerte als Zahl auszudrücken.

Einheiten von Größen gleicher Dimension können mit demselben Namen und Einheitenzeichen bezeichnet sein, auch wenn die Größen nicht von gleicher Art sind. So sind beispielsweise „Joule durch Kelvin“ und J/K jeweils Name und Einheitenzeichen sowohl von einer Einheit der Wärmekapazität als auch von einer Einheit der Entropie, die im Allgemeinen nicht als Größen gleicher Art angesehen werden können. In einigen Fällen sind jedoch spezielle Einheitenamen

⁴Im VIM steht hier „Größen der Dimension Eins“. Es wäre aber besser, von „Größen der Dimension Zahl“ zu sprechen, weil die Werte von Größen dieser Dimension reine Zahlen sind. Diese Auffassung ist in Übereinstimmung damit, dass z. B. die Werte von „Größen der Dimension Länge“ Längenwerte sind oder „Größen der Dimension Masse“ Massenwerte.

Die Benennung „Größe der Dimension Eins“ soll die Konvention widerspiegeln, dass die symbolische Darstellung der Dimension für solche Größen das Zeichen 1 ist (siehe dazu ISO 80000-1:2009, 3.8, Note 3). Diese Auffassung ist aber falsch, denn die Eins ist keine Dimension, sondern eine Zahl. Die Problematik der Dimensionen wird ausführlich in [Kry15] abgehandelt.

auf die Verwendung mit Größen einer speziellen Art beschränkt. Beispielsweise wird die Einheit „Sekunde hoch minus eins“ (s^{-1}) als Hertz (Hz) bezeichnet, wenn sie für Frequenzen verwendet wird, und als Becquerel (Bq), wenn sie für die Aktivität von Radionukleiden verwendet wird.

Einheiten von Größen der Dimension Zahl sind reine Zahlen. In einigen Fällen haben diese Einheiten besondere Namen, wie z. B. Radiant, Steradian und Dezibel, oder sie werden durch Quotienten ausgedrückt, wie Millimol durch Mol (mmol/mol , das entspricht der Zahl 10^{-3}) und Mikrogramm durch Kilogramm ($\mu\text{g/kg}$, das entspricht der Zahl 10^{-9}).

Anstatt der Bezeichnung „Maßeinheit“ wird häufig nur die Kurzbezeichnung „Einheit“ verwendet. Für eine Größe wird diese Kurzbezeichnung oft mit dem Namen der Größe kombiniert, wie beispielsweise bei den Bezeichnungen „Masseinheit“ oder „Einheit der Masse“.

Tabelle 2.1 Namen und Zeichen der sieben Basiseinheiten und die entsprechenden Zeichen ihrer Dimension

Basisgröße		Basiseinheit	
Name	Zeichen der Dimension	Name	Zeichen
Länge	L	Meter	m
Masse	M	Kilogramm	kg
Zeit	T	Sekunde	s
elektrische Stromstärke	I	Ampere	A
thermodynamische Temperatur	Θ	Kelvin	K
Stoffmenge	N	Mol	mol
Lichtstärke	J	Candela	cd

Maßeinheiten können entsprechend ihrer Definition im Prinzip willkürlich gewählt werden, und ihre Festlegung und Verwendung unterliegt nur der jeweils geltenden Konvention, die sich jederzeit ändern kann. Beispiele dafür haben wir heute noch in den angelsächsischen Ländern mit ihren alten Längen- und Volumeneinheiten, wie z. B. Fuß und Gallone, aber auch in der Luftfahrt z. B. bei der Angabe von Flughöhen und Geschwindigkeiten oder in der Seefahrt bei der Angabe von Entfernungen. Es ist aber unzumutbar, wenn jeder seine eigenen Maßeinheiten einführt oder wenn diese von Ort und Zeit abhängen, wie dies früher durchaus üblich war, als Maßeinheiten durch lokale Herrscher willkürlich festgelegt und von diesen jederzeit verändert werden konnten. Im Zuge einer

zunehmenden Globalisierung des Handels zeigte sich nämlich immer stärker die Notwendigkeit einer weltweiten Übereinkunft. Heute beruhen die Maßeinheiten in der Regel auf dem Internationalen Einheitensystem (SI). Dabei handelt es sich um ein Einheitensystem, das die Namen und Zeichen der Einheiten, eine Reihe von Vorsätzen mit ihren Namen und Zeichen sowie Regeln für ihre Anwendung umfasst und das von der im Jahre 1875 gegründeten Generalkonferenz für Maß und Gewicht (CGPM) angenommen wurde. Die Namen und Zeichen der sieben Basiseinheiten sind — zusammen mit den entsprechenden Zeichen ihrer Dimension — in der Tabelle 2.1 aufgeführt.

Eine vollständige Beschreibung und Erläuterung des Internationalen Einheitensystems befindet sich in der SI-Broschüre, die vom Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) in Paris herausgegeben wird und auf der Webseite des BIPM⁵ verfügbar ist. Die deutsche Fassung kann von der Webseite der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB)⁶ heruntergeladen werden.

Neben der Maßeinheit ist der zweite Bestandteil eines Größenwertes sein Zahlenwert. Dieser ist wie folgt definiert (VIM:2010, 1.20):

Definition 2.4 (Zahlenwert einer Größe)

Ein Zahlenwert einer Größe ist eine Zahl im Ausdruck eines Größenwertes, die keine als Referenz dienende Zahl ist.

Für Größen der Dimension Zahl ist die Referenz eine Maßeinheit, die eine Zahl ist, und diese wird nicht als Teil des Zahlenwertes angesehen.

Beispiel 2.2

In einem Stoffmengenanteil entsprechend 3 mmol/mol beträgt der Zahlenwert der Größe 3 und die Maßeinheit ist mmol/mol. Die Maßeinheit mmol/mol entspricht der Zahl 0,001 bzw. 10^{-3} . Diese Zahl ist aber nicht Teil des Zahlenwertes der Größe, der weiterhin 3 beträgt.

Für Größen, die eine Maßeinheit haben (d. h. Größen, die keine Ordinalgrößen sind), wird der Zahlenwert $\{Q\}$ einer Größe Q häufig durch $\{Q\} = q/[Q]$ ausgedrückt, wobei q den Größenwert und $[Q]$ die Maßeinheit bezeichnet. Wenn eine Maßeinheit aber — wie im SI — ein festgelegtes Einheitenzeichen hat, dann ist dieses allein *ohne* eckige Klammern anstelle von $[Q]$ zu benutzen.

Beispiel 2.3

Für den Größenwert von 5,7 kg beträgt der Zahlenwert $\{m\} = (5,7 \text{ kg})/\text{kg} = 5,7$. Derselbe Größenwert kann als 5 700 g ausgedrückt werden. In diesem Fall beträgt der Zahlenwert $\{m\} = (5\,700 \text{ g})/\text{g} = 5\,700$.

⁵<http://www.bipm.org/en/publications/si-brochure/>

⁶<http://www.ptb.de/cms/presseaktuelles/broschueren/>

Wir sehen an diesem Beispiel, dass der *Zahlenwert* einer Größe von der gewählten Einheit abhängt, der *Größenwert* selbst sich aber nicht mit der Änderung seiner Darstellung durch unterschiedlich gewählte Einheiten ändert (die Massenwerte 5,7 kg und 5 700 g sind gleich).

Der Zusammenhang zwischen physikalischen Größen wird durch physikalische Gesetze (Theorien) hergestellt, die in der Regel in der Form von sogenannten Größengleichungen geschrieben werden. Eine Größengleichung ist definiert durch (VIM:2010, 1.22):

Definition 2.5 (Größengleichung)

Eine Größengleichung ist eine mathematische Beziehung zwischen Größen eines Größensystems, unabhängig von den Maßeinheiten.

Beispiel 2.4

Die Gleichung für die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2}v^2,$$

wobei T die kinetische Energie, v die Geschwindigkeit und m die Masse bezeichnet.

Die Gleichung für die Stoffmenge einer Komponente bei der Elektrolyse

$$n = \frac{It}{zF},$$

wobei n die Stoffmenge der Komponente, I die elektrische Stromstärke, t die Dauer der Elektrolyse, z die Wertigkeit der Ionen der Komponente und F die FARADAY-Konstante bezeichnet.

Die Gleichung für die Geschwindigkeit eines Teilchens

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt},$$

wobei $\boldsymbol{v}$ der Vektor der Geschwindigkeit, $\boldsymbol{r}$ der Ortsvektor des betrachteten Teilchens und t die Zeit bezeichnet.

Änderung der Wärmemenge bei der Erwärmung oder Abkühlung eines Körpers

$$\Delta Q = cm\Delta T,$$

wobei ΔQ die zu- oder abgeführte Wärmemenge, m die Masse des Körpers, c seine Wärmekapazität und ΔT die beobachtete Änderung der Temperatur bezeichnet.

Größengleichungen werden uns bei der mathematischen Beschreibung der Messung durch Modellgleichungen wieder begegnen.

2.2 Messen

Messen ist das Ausführen von geplanten Tätigkeiten zum quantitativen Vergleich einer Größe mit einer Einheit und schließt das Zählen mit ein. Der Begriff „Messung“ ist folgendermaßen definiert (VIM:2010, 2.1):

Definition 2.6 (Messung)

Eine Messung ist ein Prozess, bei dem einer oder mehrere Größenwerte, die vernünftigerweise einer Größe zugewiesen werden können, experimentell ermittelt werden.

Eine Messung setzt eine Beschreibung der Größe, zusammen mit dem beabsichtigten Zweck eines Messergebnisses, voraus sowie ein Messverfahren und ein kalibriertes Messsystem, das gemäß einem vorgegebenen Messverfahren arbeitet, einschließlich der Messbedingungen.

In der Messtechnik sind Messgröße und Größe synonyme Begriffe, denn der Begriff „Messgröße“ ist definiert durch (VIM:2010, 2.3):

Definition 2.7 (Messgröße)

Eine Messgröße ist eine Größe, die gemessen werden soll.

Die Spezifikation einer Messgröße erfordert die Kenntnis der Größenart sowie eine Beschreibung des Zustandes des Phänomens, des Körpers oder der Substanz als Träger der Größe einschließlich aller relevanten Komponenten und beteiligten chemischen Wesenseinheiten.

Die Messung einschließlich des Messsystems und die Bedingungen, unter denen die Messung durchgeführt wird, können zu einer Änderung des Phänomens, des Körpers oder der Substanz führen, sodass die Größe, die gemessen wird, sich von der definierten Messgröße unterscheidet. In diesem Fall ist eine angemessene Korrektur erforderlich.

Beispiel 2.5

Die Spannung zwischen den Polen einer Batterie kann abnehmen, wenn zur Durchführung der Messung ein Spannungsmessgerät mit einem signifikantem Leitwert benutzt wird. Die Leerlaufspannung kann aus den Innenwiderständen der Batterie und des Spannungsmessgerätes errechnet werden.

Beispiel 2.6

Die Länge eines Stahlstabes im Gleichgewicht mit der Umgebungstemperatur von 23 °C unterscheidet sich von der Länge bei der Referenztemperatur von 20 °C, welche die Messgröße ist. In diesem Fall ist eine Korrektur erforderlich.

Bei einer Messung kann nicht davon ausgegangen werden, dass sich der Messvorgang in idealer Weise verwirklichen lässt. Wir können deshalb nicht erwarten, dass wir den exakten Wert der betreffenden Größe als Ergebnis der Messung erhalten, sondern wir erhalten ein „Messergebnis“. Dieser Begriff ist folgendermaßen definiert (VIM:2010, 2.9):

Definition 2.8 (Messergebnis)

Ein Messergebnis ist eine Menge von Größenwerten, die einer Messgröße zugewiesen sind, zusammen mit jeglicher verfügbarer relevanter Information.

Ein Messergebnis enthält im Allgemeinen die „relevante Information“ über die Menge der Größenwerte, von denen einige repräsentativer für die Messgröße sein können als andere. Dies kann in Form einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ausgedrückt werden.

Ein Messergebnis wird in der Regel durch einen einzigen Messwert und eine ihm beigeordnete Messunsicherheit ausgedrückt. Wenn die Messunsicherheit für bestimmte Zwecke als vernachlässigbar angesehen werden kann, dann kann das Messergebnis durch einen einzigen Messwert ausgedrückt werden. In vielen Bereichen ist dies die übliche Art, ein Messergebnis anzugeben.

In der traditionellen Literatur und in der 2. Auflage des VIM ist das Messergebnis noch als ein Wert definiert, der einer Messgröße zugewiesen ist und so erklärt, dass er, je nach Kontext eine Anzeige, ein unkorrigiertes oder ein korrigiertes Ergebnis bedeutet. Diese Sichtweise gilt heute als überholt.

Ein Messergebnis besteht aus einer *Menge von Größenwerten*, die durch einen ihrer Werte oder einen daraus berechneten Wert und die dem jeweiligen Wert beigeordnete Unsicherheit repräsentiert werden.

Der Begriff „Messwert“ ist definiert durch (VIM:2010, 2.10):

Definition 2.9 (Messwert)

Ein Messwert ist ein Größenwert, der ein Messergebnis repräsentiert.

Für eine Messung mit wiederholten Anzeigen kann jede Anzeige verwendet werden, um einen entsprechenden Messwert zu liefern. Diese Menge einzelner Messwerte kann dazu verwendet werden, einen resultierenden Messwert zu berechnen, z. B. einen Mittelwert oder einen Median, im Allgemeinen mit einer verringerten beigeordneten Messunsicherheit.

Wenn der Bereich der Werte einer Größe, von denen angenommen werden kann, dass sie die Messgröße repräsentieren, im Vergleich zur Messunsicherheit klein ist, kann ein Messwert als Schätzwert eines im Wesentlichen einzigen

„wahren Wertes“ angesehen werden und ist oft ein Mittelwert oder Median einzelner, durch wiederholte Messungen erhaltener Größenwerte.

In dem Fall, in dem der Bereich der Werte einer Größe, von denen angenommen werden kann, dass sie die Messgröße repräsentieren, im Vergleich zur Messunsicherheit nicht klein ist, ist ein Messwert oft der Schätzwert eines Mittelwertes oder eines Medians der Menge der Werte.

Im GUM werden die Benennungen „Messergebnis“ und „Schätzwert des Wertes der Messgröße“ oder auch nur „Schätzwert der Messgröße“ für die Benennung „Messwert“ verwendet.

2.3 Wahrer Wert einer Messgröße

Wir haben im vorhergehenden Abschnitt im Zusammenhang mit dem Begriff „Messwert“ den Begriff „wahrer Wert“ benutzt. Dieser Begriff wird in der Messtechnik heute immer noch häufig verwendet, ohne dass immer im Einzelnen klar ist, was er tatsächlich bedeutet. Sicher scheint nur zu sein, dass darunter ein tatsächlich vorhandener, wirklicher Wert verstanden werden soll.

Wenn man die genaue Definition eines Begriffs wissen möchte, sieht man üblicherweise in einem guten Lexikon nach oder versucht den Begriff in den entsprechenden Normen zu finden. Leider hilft das in diesem Fall nicht sehr viel weiter, denn es gibt mehrere unterschiedliche Definitionen für den Begriff „wahrer Wert“ in den Normen. Glücklicherweise widersprechen sich die unterschiedlichen Definitionen aber nicht, sondern sie geben die möglichen Standpunkte der Experten aus den verschiedenen Arbeitsgebieten wieder, für welche die jeweilige Norm gültig ist. Wir wollen uns die in den Normen vorhandenen Definitionen etwas genauer ansehen und kommentieren.

In der deutschen Norm DIN 55350-13:1987 [DIN1987] finden wir folgende Definition des wahren Wertes (DIN 55350-13:1987, 1.3):

Der wahre Wert ist der tatsächliche Merkmalswert unter den bei der Ermittlung herrschenden Bedingungen.

Anmerkung 1: Oftmals ist der wahre Wert ein ideeller Wert, weil er sich nur dann feststellen ließe, wenn sämtliche Ergebnisabweichungen vermieden werden könnten, oder er ergibt sich aus theoretischen Überlegungen.

Anmerkung 2: Der wahre Wert eines mathematisch-theoretischen Merkmals wird auch „exakter Wert“ genannt. Bei einem numerischen Berechnungsverfahren wird sich als Ermittlungsergebnis jedoch nicht immer der exakte Wert ergeben.

Beispielsweise ist der exakte Wert einer Fläche eines Kreises mit dem Durchmesser d gleich $\pi d^2/4$.

Nach dieser Definition ist der wahre Wert gleich dem tatsächlichen Wert einer quantifizierbaren (d. h. durch einen Zahlenwert angebbaren und damit auch messbaren) Eigenschaft, also einer Größe, an einem bestimmten Ort und zu einer bestimmten Zeit, unter den an genau diesem Ort und zu genau diesem Zeitpunkt geltenden Bedingungen.

Damit ist auch ohne die Anmerkung 1 bereits klar, dass es sich hier nur um einen *ideellen Wert* handeln kann, selbst dann, *wenn sämtliche Ergebnisabweichungen vermieden werden könnten* (d. h. wenn wir in der Lage wären, eine ideale Messung vorzunehmen), denn schon die vollständige Kenntnis der *herrschenden Bedingungen* ist unmöglich.

Unter diesem Gesichtspunkt ist der zweite Teil der Anmerkung 1 — „oder er ergibt sich aus theoretischen Überlegungen“ — nicht unmittelbar nachvollziehbar, denn auch bei rein *theoretischen Überlegungen* können nicht alle *herrschenden Bedingungen* vollständig berücksichtigt werden. Gemeint ist hier wohl, dass es Fälle gibt, bei denen der „wahre Wert“ aufgrund von allgemein anerkannten physikalischen Gesetzen unabhängig von jeglichen Bedingungen ist, wie z. B. der Wert der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, deren Konstanz der EINSTEINSCHEN Relativitätstheorie entsprechend heute als gegeben vorausgesetzt wird (ein besonders überzeugender experimenteller Nachweis dafür ist von D. SADEH [Sad63] erbracht worden) und deren Wert vom *Committee on Data for Science and Technology (CODATA)* exakt festgelegt worden ist⁷ [MTN08]. Auch die PLANCK-Konstante h , die Elementarladung e , die BOLTZMANN-Konstante k und die AVOGADRO-Konstante N_A sind seit der Revision des SI durch Vereinbarung festgelegte exakte Größenwerte [New+18].

Dagegen handelt es sich bei dem in der Anmerkung 2 angeführten, als „exakter Wert“ bezeichneten *Wert eines mathematisch-theoretischen Merkmals* um einen aus der Mathematik deduktiv ableitbaren Wert, für den die *herrschenden Bedingungen* nur die Gesetze der Mathematik sind. Die Winkelsumme von 180° eines ebenen Dreiecks ist z. B. ein solcher *wahrer Wert*, aber (wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit) z. B. auch das Produkt aus der magnetischen Feldkonstante μ_0 und der elektrischen Feldkonstante ε_0 , denn es gilt $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$.

In der Anmerkung 2 wird außerdem darauf hingewiesen, dass sich *bei einem numerischen Berechnungsverfahren* nicht notwendigerweise immer der exakte Wert

⁷Der Wert der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum wurde durch Messungen bestimmt und dann durch Vereinbarung als ein exakter Wert (ohne Messunsicherheit) festgelegt.

ergibt. Das angegebene Beispiel bedarf aber einer näheren Erläuterung, um zu verstehen, was damit genau gemeint ist. Gemeint sind hier nicht mögliche Rundungsabweichungen, die bei einer numerischen Berechnung auftreten können, sondern die Tatsache, dass die mathematische Konstante π sich nicht durch eine rationale Zahl oder durch eine Dezimalzahl mit endlich vielen Stellen darstellen lässt, sodass jede Näherung von π unweigerlich dazu führen muss, dass das Ergebnis nicht exakt ist. Aus dem gleichen Grund lassen sich auch weder die elektrische noch die magnetische Feldkonstante *numerisch* exakt angeben, obwohl sie exakt definiert sind. Dieses Problem ist grundsätzlich unvermeidbar und tritt bei jeder numerischen Darstellung irrationaler Zahlen auf.

Die Definition des Begriffs „wahrer Wert“ in der internationalen Norm ISO 3534-2:2006 (deutsche Übersetzung DIN ISO 3534-2:2010 [DIN2010]) ist inhaltlich mit der in der deutschen Norm DIN 55350-13:1987 angegebenen Definition identisch, aber weniger ausführlich. Sie lautet (DIN ISO 3534-2:2010, 3.2.5):

Der wahre Wert ist der Wert, der eine vollkommen definierte Größe oder ein vollkommen definiertes quantitatives Merkmal beschreibt, und zwar unter den Bedingungen, die bestehen, wenn diese Größe oder das quantitative Merkmal betrachtet wird.

Anmerkung 1: Der wahre Wert einer Größe oder eines quantitativen Merkmals ist ein theoretischer Begriff und kann im Allgemeinen nicht genau bekannt sein.

In der Anmerkung 1 dieser Definition wird deutlich darauf hingewiesen, dass der wahre Wert *im Allgemeinen nicht genau bekannt sein* kann. Diese Schlussfolgerung lässt sich allerdings auch aus der in DIN 55350-13:1987 gegebenen Definition ziehen und führt zu keiner neuen Erkenntnis.

Problematisch an der Definition des wahren Wertes in der internationalen Norm ISO 3534-2:2006 ist allerdings, dass es darin keine Definition des Begriffs „quantitatives Merkmal“ gibt, d. h. die Definition ist unklar. Da Größen ebenfalls quantitative Merkmale sind (also gewissermaßen eine Teilmenge der quantitativen Merkmale darstellen) [DIN1989], stellt sich die Frage, welche anderen quantitativen Merkmale noch gemeint sein könnten.

Den in den Normen DIN 55350-13:1987 und ISO 3534-2:2006 angegebenen Definitionen des wahren Wertes ist gemeinsam, dass sie ihn als etwas real Existierendes definieren, das aber nicht genau bekannt ist. Die in DIN 1319-1 [DIN1995] angegebene, sehr kurze Definition folgt dagegen einer etwas anderen Philosophie. Die Definition lautet (DIN 1319-1, 1.3):

Der wahre Wert (einer Messgröße) ist der Wert der Messgröße als Ziel der Auswertung von Messungen der Messgröße.

Hier wird nicht — wie in den vorhergehenden Definitionen — gesagt, was der wahre Wert ist, sondern wozu er dienen soll. Dabei wird stillschweigend von folgenden drei Voraussetzungen ausgegangen:

- a) Für jede Messgröße gibt es genau einen wahren Wert.
- b) Der wahre Wert der Messgröße ist ein fester numerischer Wert.
- c) Würde es ideale Messungen geben, dann könnte der wahre Wert ermittelt werden.

Unter der Annahme, dass diese Voraussetzungen tatsächlich zutreffen, kann der wahre Wert als ein unbekannter Parameter des Modells der Auswertung angesehen werden. Das *Ziel der Auswertung von Messungen der Messgröße* ist es dann, einen Schätzwert für diesen Parameter (d. h. für die Messgröße) aus den Messdaten zu bestimmen, der dem wahren Wert möglichst nahe kommt.

Dies setzt allerdings voraus, dass die Messgröße wohldefiniert ist, d. h. dass das Modell der Auswertung vollständig ist. Dies ist aber streng genommen niemals möglich, denn um eine Messgröße *vollständig* zu beschreiben, wäre eine unendliche Menge von Information notwendig, da *alle* Einflussgrößen — sowohl bekannte als auch unbekannte — bei der Modellierung berücksichtigt werden müssten. Da dies aber unmöglich ist, kann die interessierende Größe nur näherungsweise durch ein Modell beschrieben werden, d. h. jedes Modell führt prinzipiell zu einem anderen „wahren“ Wert.

Wir wenden uns jetzt der 1993 im *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM)* (deutsche Übersetzung 1995 [GUM]) angegebenen Definition des wahren Wertes zu. Diese lautet (GUM, B.2.3):

Der wahre Wert (einer Größe) ist der Wert, der mit der Definition einer betrachteten speziellen Größe übereinstimmt.

Anmerkung 1: Diesen Wert würde man bei einer idealen Messung erhalten.

Anmerkung 2: Wahre Werte sind ihrer Natur nach nicht ermittelbar.

Anmerkung 3: Häufiger als der bestimmte Artikel „der“ wird der unbestimmte Artikel „ein“ in Verbindung mit dem „wahren Wert“ verwendet, weil es viele Größenwerte geben kann, die mit der Definition einer betrachteten speziellen Größe übereinstimmen.

Diese Definition stimmte zum damaligen Zeitpunkt mit der in der im gleichen Jahr erschienenen 2. Auflage des Internationalen Wörterbuchs der Messtechnik *International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology* (VIM) angegebenen Definition überein (siehe VIM:1993, 1.19).

Die Definition des wahren Wertes im GUM trägt der bereits angesprochenen Tatsache Rechnung, dass es je nach der Definition der jeweils betrachteten Messgröße unterschiedliche wahre Werte geben kann — für jede Definition der Messgröße einen — die dann alle als ideal anzusehen wären.

In der 3. Auflage des VIM wird dieser Sachverhalt in den Anmerkungen zur Definition des wahren Wertes präzisiert (VIM:2010, 2.11):

Definition 2.10 (wahrer Wert)

Der wahre Wert einer Größe ist der Größenwert, der mit der Definition einer Größe in Übereinstimmung ist.

Anmerkung 1: Im Messabweichungsansatz zur Beschreibung von Messungen wird davon ausgegangen, dass ein wahrer Wert einer Größe eindeutig, aber in der Praxis nicht ermittelbar ist. Der Unsicherheitsansatz erkennt an, dass aufgrund der naturgegebenen unvollständigen Detailkenntnis in der Definition einer Größe es nicht nur einen einzigen wahren Wert einer Größe gibt, sondern eine Menge an wahren Werten, die mit der Definition konsistent sind. Jedoch ist es im Prinzip und in der Praxis nicht möglich, diese Werte zu kennen. Andere Ansätze verzichten ganz auf den Begriff des wahren Werts und beziehen sich auf den Begriff der metrologischen Verträglichkeit von Messergebnissen, um ihre Gültigkeit zu beurteilen.

Anmerkung 2: In dem speziellen Fall von Fundamentalkonstanten wird davon ausgegangen, dass die Größe einen einzigen wahren Wert hat.

Anmerkung 3: Wenn angenommen werden kann, dass die der Messgröße beigeordnete Eigenunsicherheit im Vergleich zu den anderen Komponenten der Messunsicherheit vernachlässigbar ist, kann davon ausgegangen werden, dass die Messgröße einen *im Wesentlichen einzigen* wahren Wert hat. Dies ist der Ansatz des GUM und der sich darauf beziehenden Dokumente, wobei das Wort *wahr* als überflüssig angesehen wird.

Der in der Anmerkung 1 angeführte Messabweichungsansatz beruht auf der im Grundsatz auf C. F. GAUSS zurückgehenden „Fehlerrechnung“, die bis zur Einführung des GUM verwendet wurde, während es sich beim Unsicherheitsansatz um die Vorgehensweise nach der Methode des GUM handelt.

Die in der Anmerkung 2 angesprochenen Fundamentalkonstanten sind Naturkonstanten, d. h. physikalische Größen, bei denen vorausgesetzt wird, dass sich ihr Größenwert weder räumlich noch zeitlich ändert. Sie sind die unbekannten Parameter in den physikalischen Theorien. Die Theorien können ihre

Werte nicht festlegen, sondern diese Werte müssen durch Messungen bestimmt werden. Diese Sonderstellung der Fundamentalkonstanten erklärt auch, warum sie grundsätzlich nur einen einzigen Wert haben können.

Der Wert einer Fundamentalkonstante kann in bestimmten Fällen durch Beschluss auch auf den letzten durch Messungen festgestellten Wert festgelegt werden, wie dies z. B. bei der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum geschehen ist. Dann hat er selbstverständlich keine Unsicherheit mehr.

Aus der Anmerkung 3 dieser Definition geht unmittelbar hervor, dass bei der Berechnung der Messunsicherheit nach dem GUM auf den wahren Wert verzichtet werden kann, vorausgesetzt, die Eigenunsicherheit ist vernachlässigbar klein. Eine ausführlichere Begründung dieses Standpunktes findet sich im Anhang D des GUM [GUM]. Mit dem Begriff „Eigenunsicherheit“ werden wir uns noch ausführlich im Abschnitt 2.7 beschäftigen.

2.4 Messprinzip, Messmethode, Messverfahren

Die experimentelle Ermittlung einer Messgröße kann häufig auf unterschiedliche Art und Weise erfolgen. Grundlage jeder Messung ist ein „Messprinzip“, das folgendermaßen definiert ist (VIM:2010, 2.4):

Definition 2.11 (Messprinzip)

Ein Messprinzip ist ein Phänomen, das als Grundlage einer Messung dient.

Das Phänomen kann physikalischer, chemischer oder biologischer Natur sein. Entscheidend dabei ist, dass es sich um eine Naturerscheinung handelt, die immer wieder in gleicher Weise erzeugt werden kann.

Die meisten Größen sind einer unmittelbaren Messung nicht zugänglich. Wenn es aber einen — zumindest empirisch bekannten und quantitativ erfassbaren — eindeutigen naturwissenschaftlichen Zusammenhang zwischen der Messgröße und einer anderen Größe gibt, die einer direkten Messung leichter zugänglich ist, dann kann dieser dazu verwendet werden, den Wert der Messgröße aus den Messwerten zu berechnen.

Beispiel 2.7

1. Der thermoelektrische Effekt, angewandt auf Temperaturmessungen.
2. Die Energieabsorption, bei der Messung der Stoffmengenkonzentration.
3. Senkung der Glucose-Konzentration im Blut eines nüchternen Kaninchens, bei der Messung der Insulinkonzentration in einem Präparat.

Zusätzlich zum Messprinzip muss noch eine bestimmte „Messmethode“ festgelegt werden. Dieser Begriff ist definiert durch (VIM:2010, 2.5):

Definition 2.12 (Messmethode)

Eine Messmethode ist eine allgemeine Beschreibung des logischen Vorgehens zur Durchführung einer Messung.

Messmethoden können wie folgt unterschieden werden:

- Substitutionsmessmethode
- Differenzmessmethode
- Nullabgleichsmessmethode

oder

- direkte Messmethode
- indirekte Messmethode

Wir geben für jede der genannten Messmethoden ein Beispiel an, um ihre Unterschiede verständlich zu machen:

Beispiel 2.8

Eine *Substitutionsmessmethode* ist die Messung einer *Masse* mit einer Federwaage und einem Satz geeichter Gewichtsstücke. Dabei wird die Längenänderung der Feder bei Belastung durch ein geeichtes Gewichtsstück bekannter Masse und bei Belastung durch das zu messende Objekt als Messprinzip verwendet. Ist die Federkonstante bekannt, dann kann aus den gemessenen Längenwerten der unbekannte Wert der Masse des zu messenden Objekts berechnet werden.

Beispiel 2.9

Eine *Differenzmessmethode* ist die Messung des *Volumens* eines unregelmäßig geformten Körpers (z. B. eines Steins), indem das Volumen der von ihm verdrängten Flüssigkeit bei seinem vollständigen Eintauchen in die Flüssigkeit bestimmt wird. Hier wird das Gesetz von der Erhaltung der Masse als Messprinzip ausgenutzt.

Beispiel 2.10

Eine *Nullabgleichsmessmethode* ist die Messung einer *Masse* mit einer Balkenwaage und einem Satz geeichter Gewichtsstücke. Sind die Arme der Waage genau gleich und ist die Waage im Gleichgewicht, dann sind die Massewerte des geeichten Gewichtsstücks und des zu messenden Objekts gleich. Hierbei wird als Messprinzip ausgenutzt, dass die Summe der beiden Drehmomente null ist.

Beispiel 2.11

Eine *direkte Messmethode* ist die Messung einer *Länge* mit einem Lineal, einem Messschieber oder einem Maßband. Hierbei findet ein direkter Vergleich des Messobjekts mit der Skala des Messmittels statt.

Beispiel 2.12

Eine *indirekte Messmethode* ist die Messung einer *Temperatur* mit einem Flüssigkeitsthermometer. Hier wird die Volumenausdehnung der Flüssigkeit als Messprinzip verwendet. Die Länge der Flüssigkeitssäule in der Glaskapillare ist dann (näherungsweise) proportional zur Temperatur.

Wir sehen, dass die Unterscheidung der Messmethoden in der ersten Gruppe mehr den prozeduralen Aspekt einer Messung betont, während in der zweiten Gruppe mehr Wert darauf gelegt wird, ob ein Messwert unmittelbar abgelesen werden kann oder aus den Messwerten berechnet werden muss.

Die praktische Anwendung eines oder mehrerer Messprinzipien zusammen mit einer Messmethode heißt „Messverfahren“ (VIM:2010, 2.6).

Definition 2.13 (Messverfahren)

Ein Messverfahren ist eine detaillierte Beschreibung einer Messung gemäß einem oder mehreren Messprinzipien und einer Messmethode auf der Grundlage eines Modells der Messung und einschließlich aller Berechnungen zum Erhalt eines Messergebnisses.

Es ist empfehlenswert, ein Messverfahren so genau zu beschreiben, dass die Dokumentation genügend Einzelheiten enthält, um den Anwender in die Lage zu versetzen, eine Messung durchzuführen und auszuwerten. Dabei muss sowohl das Modell der Messung angegeben werden, als auch alle notwendigen Gleichungen und Algorithmen, die zur Berechnung des Messergebnisses benötigt werden. Es empfiehlt sich auch, Hinweise auf relevante Literatur oder Tabellenwerke nicht zu vergessen. Diese Angaben können insbesondere für eine später notwendig werdende Verifikation des Auswerteverfahrens nützlich sein, z. B. im Falle einer Produkthaftung.

Die erreichbare Genauigkeit einer Messung wird in der Regel durch die Wahl des Messverfahrens bestimmt. Ein Messverfahren kann eine Aussage über einen einzuhaltenden Höchstwert der Messunsicherheit (die sogenannte Zielunsicherheit, engl. *target uncertainty*) enthalten, d. h. einen oberen Grenzwert der Messunsicherheit auf der Grundlage des beabsichtigten Verwendungszwecks der Messergebnisse (VIM:2010, 2.34). Eine Messung sollte demnach nicht „so genau wie möglich“, sondern „so genau wie nötig“ sein.

2.5 Genauigkeit, Richtigkeit, Präzision

Leider kommt es immer wieder vor, dass die Begriffe „Auflösung“, „Messgenauigkeit“, „Messrichtigkeit“ und „Messpräzision“ miteinander verwechselt oder im falschen Sinnzusammenhang verwendet werden. Wir wollen deshalb in diesem Abschnitt kurz auf die Definitionen dieser Begriffe eingehen.

Der Begriff „Auflösung“ ist definiert durch (VIM:2010, 4.14):

Definition 2.14 (Auflösung)

Die Auflösung ist die kleinste Änderung einer Messgröße, die in der entsprechenden Anzeige eine merkliche Änderung verursacht.

Die Auflösung kann z. B. vom Rauschen (intern oder extern) oder von einer Reibung abhängen. Sie kann auch vom Wert der Messgröße abhängen.

Bei einem visuell anzeigenden Messgerät ist die Auflösung die kleinste Differenz zwischen den Anzeigen, die noch sinnvoll unterschieden werden können (VIM:2010, 4.15).

Der Begriff „Messgenauigkeit“ ist definiert durch (VIM:2010, 2.13):

Definition 2.15 (Messgenauigkeit)

Die Messgenauigkeit ist das Ausmaß der Annäherung eines Messwerts an einen wahren Wert einer Messgröße.

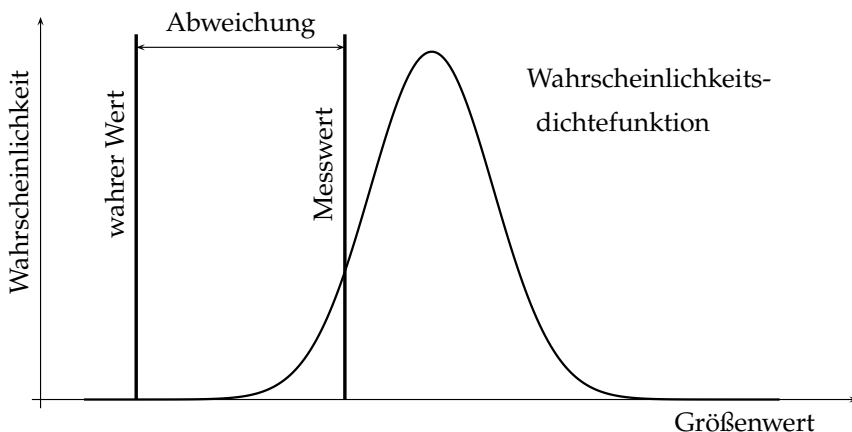


Abbildung 2.2 Zur Definition der Messgenauigkeit

Die Messgenauigkeit ist keine Größe und kann daher nicht quantitativ ausgedrückt werden. Es ist nur eine qualitative Aussage möglich, wie z. B. dass eine Messung genauer als eine andere Messung ist, wenn sie eine kleinere Messabweichung oder Messunsicherheit hat. Auf die Messabweichungen werden wir im nächsten Abschnitt noch ausführlich eingehen.

Die Messgenauigkeit wird manchmal als Ausmaß der Übereinstimmung zwischen Messwerten verstanden, die der Messgröße zugewiesen werden. Diese Auffassung ist aber nicht korrekt, denn die Messgenauigkeit erlaubt entsprechend ihrer Definition keine derartige Aussage (siehe dazu die Abbildung 2.2). Zulässig wäre es dagegen, das Ausmaß der Annäherung eines Messwertes an einen durch Vereinbarung festgelegten Referenzwert als Messgenauigkeit anzusehen, denn der Referenzwert ist ein Größenwert, der als Grundlage für den Vergleich mit Werten von Größen gleicher Art verwendet wird (VIM:2010, 5.18). Dies setzt aber voraus, dass der gewählte Referenzwert als Ersatz für den prinzipiell unbekannten „wahren Wert“ angesehen werden darf.

Der Begriff „Messrichtigkeit“ ist definiert durch (VIM:2010, 2.14):

Definition 2.16 (Messrichtigkeit)

Die Messrichtigkeit ist das Ausmaß der Annäherung des Mittelwerts einer unendlichen Anzahl wiederholter Messwerte an einen Referenzwert.

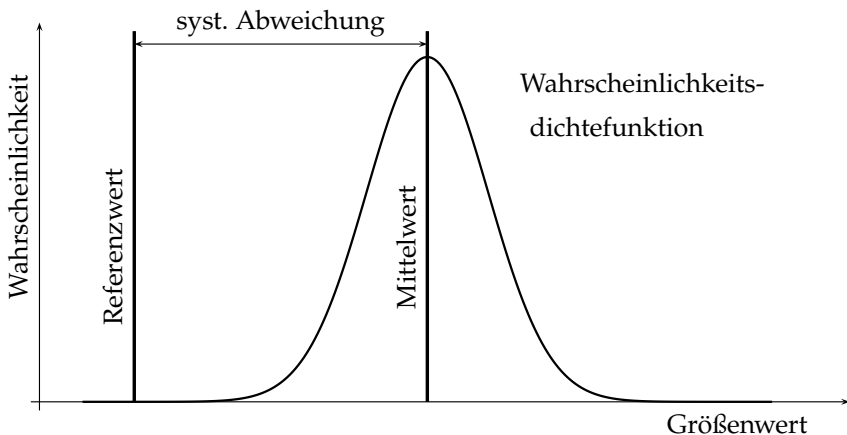


Abbildung 2.3 Zur Definition der Messrichtigkeit

Die Messrichtigkeit ist keine Größe und kann daher nicht quantitativ ausgedrückt werden. Sie steht in umgekehrter Beziehung zur systematischen Messabweichung, hat aber keinen Bezug zur zufälligen Messabweichung. Hinweise zur Beurteilung der Messrichtigkeit sind in der Normenreihe DIN ISO 5725 enthalten. Als Ergänzung zu dieser Normenreihe kann auch der Leitfaden DIN ISO/TR 22971 verwendet werden.

Die Messrichtigkeit spielt auch eine wesentliche Rolle im gesetzlichen Messwesen, allerdings in einem etwas anderen Sinne. In der Eichordnung heißt es dazu (EichO, §36, Abs. 1)

- (1) *Messgeräte müssen so gebaut sein, dass sie für ihren bestimmungsgemäßen Verwendungszweck geeignet sind und unter Nenngebrauchsbedingungen richtige Messergebnisse erwarten lassen.*
- (2) *Referenzbedingungen für die messtechnische Prüfung und Nenngebrauchsbedingungen sind in den Anlagen aufgeführt oder können bei der Bauartzulassung festgelegt werden.*

Demzufolge kann eine Messung als „richtig“ angesehen werden, wenn ihre systematische Messabweichung unter Nenngebrauchsbedingungen des Messgerätes vernachlässigbar klein ist.

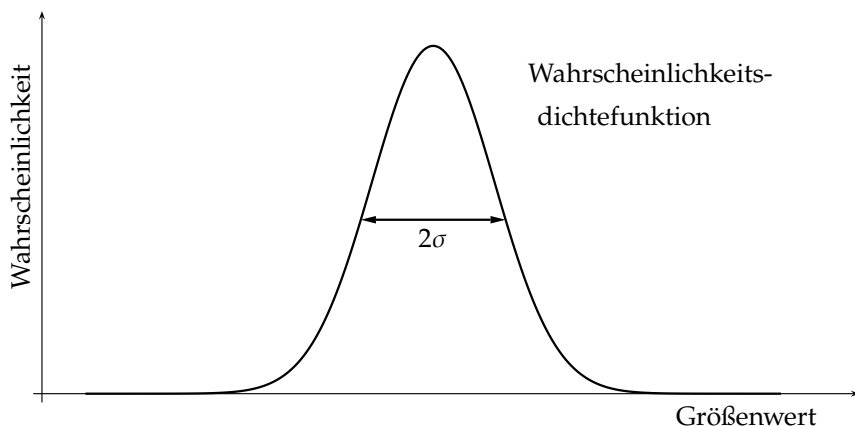


Abbildung 2.4 Zur Definition der Messpräzision. Die Messpräzision ist umgekehrt proportional zur Standardabweichung σ .

Der Begriff „Messpräzision“ ist definiert durch (VIM:2010, 2.15):

Definition 2.17 (Messpräzision)

Die Messpräzision ist das Ausmaß der Übereinstimmung von Anzeigen oder Messwerten, die durch wiederholte Messungen an denselben oder ähnlichen Objekten unter vorgegebenen Bedingungen erhalten wurden.

Die Messpräzision wird im Allgemeinen mithilfe von Kenngrößen, wie der Standardabweichung, der Varianz oder des Variationskoeffizienten unter vorgegebenen Messbedingungen quantifiziert.

Der Begriff „Messpräzision“ wird gebraucht, um die Begriffe „Wiederholpräzision“ (VIM:2010, 2.21), „Vergleichspräzision“ (VIM:2010, 2.23) und „erweiterte Vergleichspräzision“ (VIM:2010, 2.25) einer Messung zu definieren. Die *vorgegebenen Messbedingungen* sind dann die Wiederholbedingungen, die Vergleichsbedingungen oder die erweiterten Vergleichsbedingungen der Messung.

Der Unterschied zwischen der Messrichtigkeit und der Messpräzision ist in der Abbildung 2.5 am Beispiel von Treffern auf einer Zielscheibe veranschaulicht. Der Mittelpunkt der Zielscheibe (Zielpunkt) entspricht dabei dem Referenzwert. Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass eine kleine Streuung der Treffer (Messwerte) einer großen Messpräzision entspricht, und zwar unabhängig von der Messrichtigkeit, die nur die systematische Abweichung der Treffer vom Zielpunkt beschreiben kann. Da es leichter ist, eine systematische Messabweichung zu korrigieren, als die Streuung der Messwerte zu verringern, ist eine große Messpräzision wertvoller als eine große Messrichtigkeit.

Die „Wiederholbedingung“ ist definiert durch (VIM:2010, 2.20):

Definition 2.18 (Wiederholbedingung)

Eine Wiederholbedingung ist eine Messbedingung aus einer Menge von Bedingungen, die dasselbe Messverfahren, dieselben Bediener, dasselbe Messsystem, dieselben Betriebsbedingungen und denselben Ort und wiederholte Messungen an demselben Objekt oder an ähnlichen Objekten während eines kurzen Zeitintervalls umfassen.

Die „Vergleichsbedingung“ ist definiert durch (VIM:2010, 2.22):

Definition 2.19 (Vergleichsbedingung)

Eine Vergleichsbedingung ist eine Messbedingung bei Vorliegen einer Menge von Bedingungen, die dasselbe Messverfahren, denselben Messort und wiederholte Messungen an demselben Objekt oder ähnlichen Objekten über ein längeres Zeitintervall umfasst, aber auch andere sich ändernde Bedingungen einschließen kann.

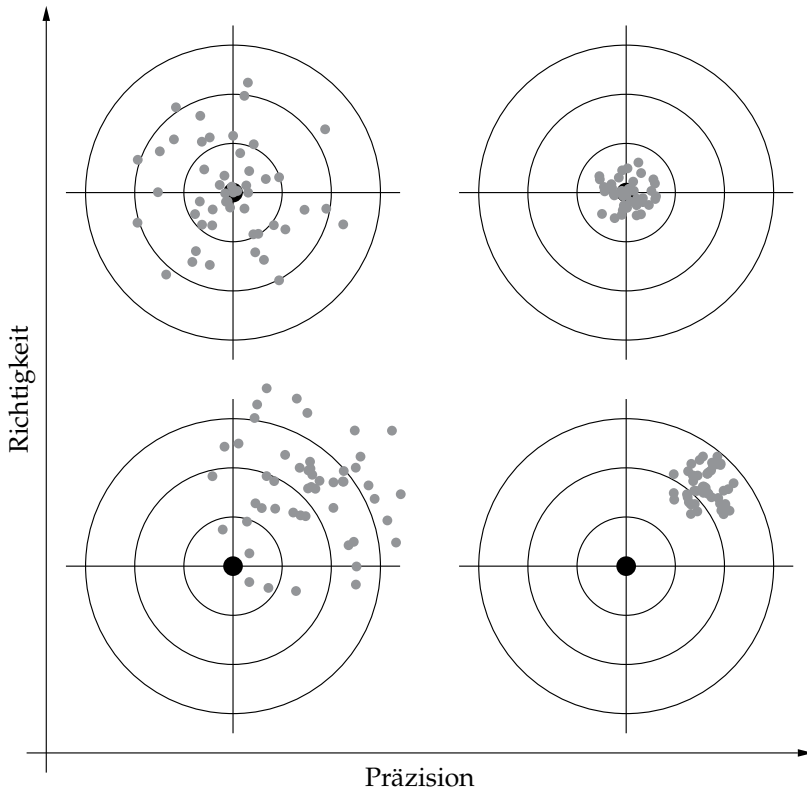


Abbildung 2.5 Vergleich von Richtigkeit und Präzision

Die „erweiterte Vergleichsbedingung“ ist definiert durch (VIM:2010, 2.24):

Definition 2.20 (erweiterte Vergleichsbedingung)

Eine erweiterte Vergleichsbedingung ist eine Messbedingung bei einer Menge von Bedingungen, die unterschiedliche Messorte, Bediener, Messsysteme und wiederholte Messungen an demselben Objekt oder an ähnlichen Objekten umfasst.

Wie wir gesehen haben, sind nur die Auflösung und die Messpräzision quantifizierbar. Die Auflösung spielt eine direkte Rolle bei der Berechnung der Messunsicherheit. Die Messpräzision kann dagegen, solange keine systematischen Messabweichungen auftreten, als ein Maß angesehen werden, das umgekehrt