→ Aperçu

L'INFINI

BRIAN CLEGG & OLIVER PUGH

edp sciences

Dans la même collection :

Stephen Hawking, 2016, ISBN : 978-2-7598-1966-9

L'intelligence artificielle, 2015, ISBN : 978-2-7598-1772-6

Les mathématiques en images, 2015, ISBN : 978-2-7598-1737-5

La génétique en images, 2015, ISBN : 978-2-7598-1767-2

La logique en images, 2015, ISBN : 978-2-7598-1748-1

La relativité en images, 2015, ISBN : 978-2-7598-1728-3

Le temps en images, 2014, ISBN : 978-2-7598-1228-8

La théorie quantique en images, 2014, ISBN : 978-2-7598-1229-5

La physique des particules en images, 2014, ISBN : 978-2-7598-1230-1

La psychologie en images, 2014, ISBN : 978-2-7598-1231-8

Édition originale : Infinity, © Icon Books Lts, London, 2013.
Traduction : Alan Rodney - Relecture : Gaëlle Courty

Imprimé en France par Présence Graphique, 37260 Monts
Mise en page de l'édition française : studiowakeup.com

ISBN : 978-2-7598-1771-9

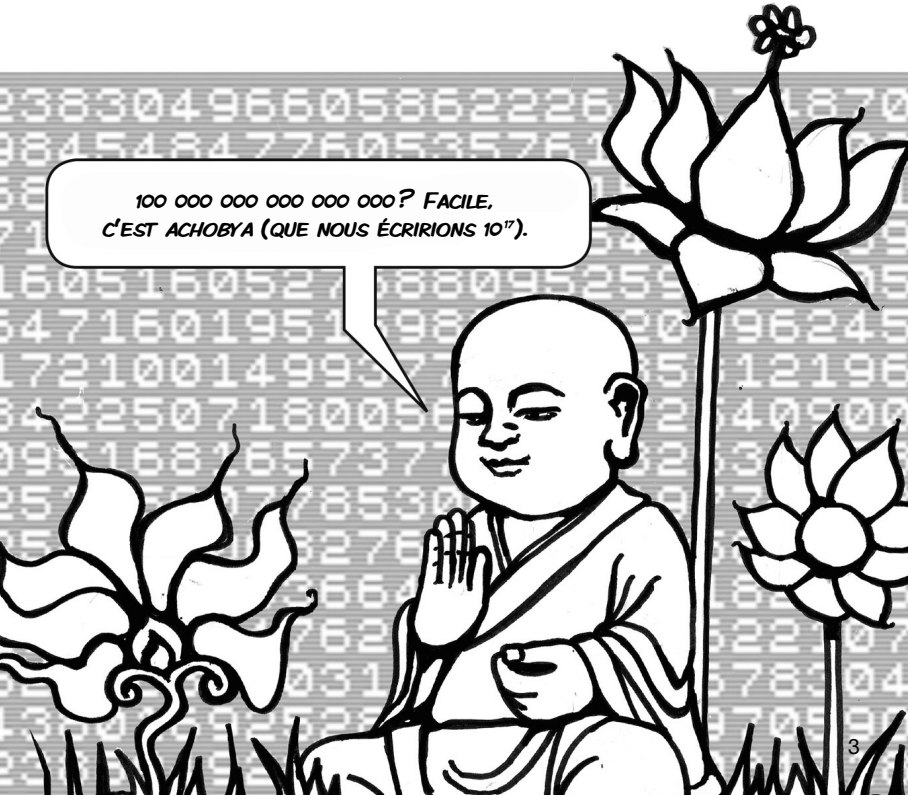
Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays. La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinés à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (alinéa 1er de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du code pénal.

© EDP Sciences, 2016

Les grands nombres

Comme une foule de gens peuvent vous le confirmer, l'infini est un vaste sujet. Il vous entraîne vers l'histoire, la philosophie et le monde réel, mais la meilleure approche, pour débuter, est bien celle des mathématiques. Il est donc raisonnable de l'aborder sans se brusquer, en commençant par les **grands nombres**.

En attribuant un nom à un nombre qui paraît bien long, vous avez l'illusion de le maîtriser – et plus ce nombre est grand, plus votre maîtrise est impressionnante. On en trouve l'écho dans les récits de la jeunesse du premier Bouddha, Siddhârta Gautam. Au cours de sa mise à l'épreuve pour obtenir la main de Gopa, il devait donner les noms de nombres de plus en plus élevés, et totalement dénués de sens. Il a non seulement réussi ce concours, mais a poursuivi l'exercice avec des nombres encore plus grands.



Vous avez dit « Googolé » ?

Il est bien joli de pouvoir donner des noms à des nombres que nous rencontrons tous les jours, mais combien d'entre nous utiliserons un jour ce nombre ?

10 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000

Il se trouve que ce nombre énorme porte un nom, googol, ayant posé problème à l'infortuné ex-major Charles Ingram, qui était parvenu à la dernière question du show télévisuel britannique *Who Wants to be a Millionaire ?* (« Qui veut gagner des millions ? »). La question était la suivante : « Quel est le nom attribué au nombre 1 suivi de 100 zéros ? Un « googol », un « mégatron », un « gigabit » ou un « nanomol » ? Ingram, réfléchissant à haute voix, a manifesté une préférence pour « nanomol », jusqu'à ce qu'un toussotement audible parmi les spectateurs sur le plateau l'oriente « discrètement » vers la bonne réponse : googol. À vrai dire, qui pourrait le blâmer ? « Googol » sonne comme un mot enfantin.

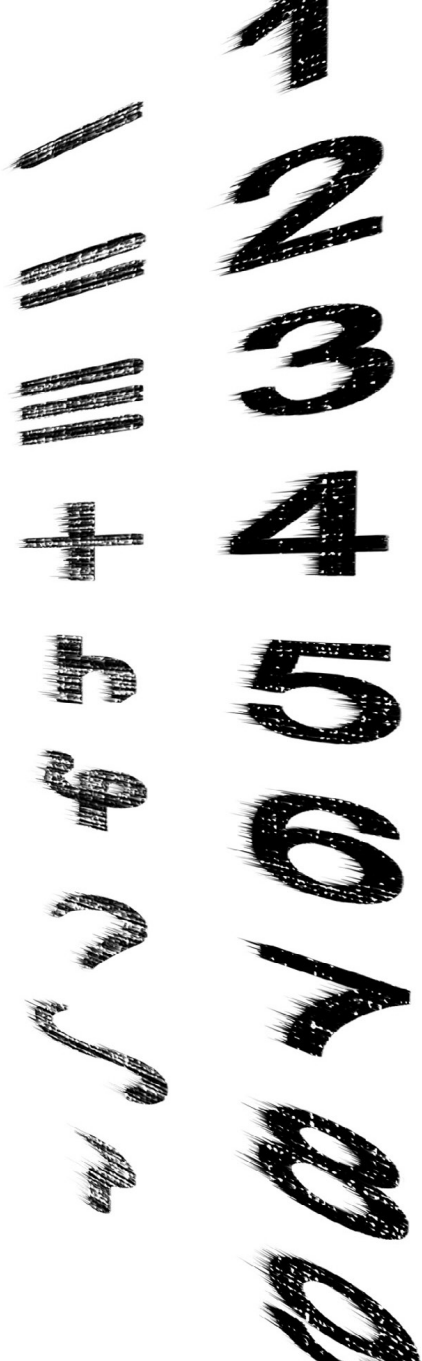
Googol est enfantin – et ce, à juste titre. En 1938, le mathématicien américain Ed Kasner était chez lui en train de faire des opérations avec des nombres sur son tableau noir. Son neveu Milton Sirrota, qui avait 9 ans à l'époque, lui avait rendu visite. Apercevant le plus grand des nombres inscrits, il se serait exclamé : « On dirait un googol ! »

L'histoire n'est pas pour autant très convaincante. Il n'y avait aucune raison pour que Kasner ait pris la peine d'écrire un tel nombre sur son tableau noir.

Des symboles hérités de l'Inde

Pour utiliser un nombre quelconque, nous avons besoin de **symboles** qui représentent des valeurs numériques. Ceux équivalents de nos mots « un », « deux », « trois » et ainsi de suite (1, 2, 3…) sont arrivés en Occident depuis l'Inde en passant par le monde arabe. Les plus anciens signes primitifs connus du système moderne ont été trouvés dans des cavernes et gravés sur des pièces autour de la ville de Mumbai remontant au Ier siècle de notre ère.

Les nombres 1 à 3 se composaient de un, deux ou trois traits, comme pour les chiffres en latin mais à l'horizontal, bien qu'avec un peu d'imagination on retrouve les mêmes traits dans les nombres de notre écriture moderne. Les marques pour 4 et 9 sont des ancêtres assez proches des symboles que nous utilisons aujourd'hui.



Les symboles indiens ont été introduits et adoptés par le monde arabe, puis ont gagné l'Occident au XIIIe siècle grâce à deux manuscrits, l'un écrit par un philosophe à Bagdad et l'autre par un voyageur venant de Pise. Le premier texte, dont l'original en arabe a été perdu, a été écrit par **Al-Khwarizmi** (env. 780–850 de notre ère) au IXe siècle. La traduction en latin de ce texte, *Algoritmi de numero Indorum*, a été réalisée environ trois siècles plus tard, mais on estime qu'il a été considérablement modifié au passage.

La version du patronyme Al-Khwarizmi apparaissant dans le titre de l'ouvrage est ordinairement considéré comme étant à l'origine du mot « algorithme », quoique parfois associé aussi au mot grec pour désigner les nombres, à savoir arithmos.

Le livre des calculs

Le voyageur de Pise s'appelait **Leonardo Fibonacci** (env. 1170–1250). (Son père, un diplomate de Pise, était Guglielmo Bonacci et « Fibonacci » est la contraction de *filius Bonacci* (« fils de Bonacci »).) Il a voyagé beaucoup en Afrique du Nord et il est devenu le plus éminent des mathématiciens de son époque. Son nom, d'ailleurs, est inévitablement lié à la suite de Fibonacci (cf. p. 15) qui l'a rendu célèbre mais qu'il n'avait pas découvert personnellement en réalité. Bien que *Numero Indorum* ait été traduit en latin, un peu avant que le livre de Fibonacci *Liber abaci* (« *Le livre du calcul* ») ne soit publié en 1202, il semblerait que le *Liber abaci* ait eu une influence déterminante pour l'introduction du système indien en Occident.

0, un outil puissant

Les symboles que nous employons pour les nombres sont arbitraires. ¶, ß, √, π, л feraient aussi bien l'affaire que 1, 2, 3, 4, 5. Toutefois, les nouveaux nombres indiens ont apporté avec eux un outil des plus puissants. Les systèmes de comptage antérieurs, utilisés par les Babyloniens jusqu'aux Romains, se basaient sur des encoches (dans des plateaux de glaise), des marques séquentielles qui servaient à compter des objets. Nous sommes plus familiarisés avec les chiffres romains – où nous voyons bien la séquence de gravure dans I, II, III, IV, V – où le V est effectivement un IIII barré et le IV est un V moins I. Mais le problème avec le système romain était qu'il n'y avait pas de procédure évidente pour additionner, par exemple, XIV à XXI.

Archimède : *L'Arénaire*

Quels que soient les symboles utilisés, les grands nombres gardaient tout leur attrait. Dans un traité intitulé *Le compteur de sable* (*L'Arénaire*, Ψάμμιτης), le philosophe grec **Archimède** (env. 287–212 avant J.-C.) démontrait au roi tyran Gélon de Syracuse qu'il était en mesure de calculer le nombre de grains de sable nécessaires pour remplir l'Univers.

En réalité, nous savons peu de chose au sujet d'Archimède, mais il nous reste un certain nombre de ses écrits, qui le révèlent excellent mathématicien et ingénieur très pragmatique. On dit de lui qu'il a conçu des machines de guerre pour défendre Syracuse, depuis des « grues arrache-mâts » aux très grands miroirs métalliques qui permettaient de focaliser les rayons du Soleil sur des navires ennemis, en y mettant le feu.

À la différence des autres livres d'Archimède, *L'Arénaire* n'était pas d'un genre très pratique. Mais derrière l'amusement de l'exercice se cachait un élément sérieux. Ce qu'Archimède prévoyait de faire était de démontrer que le système de numérotation grec, qui culminait à une myriade de myriades ($10^4 \times 10^4 = 10^8$ soit 100 millions) et où la myriade (μυριάς) valait dix mille (10^4), pouvait être étendu sans limite. D'abord, il avait estimé le rayon de l'Univers à environ 1 800 millions de kilomètres (soit un peu au-delà de l'orbite de Saturne).

Archimède a ensuite estimé combien de grains de sable seraient nécessaires pour prendre la place d'un bourgeon de coquelicot, puis combien de bourgeons pour remplir une sphère de la largeur d'un doigt, et ainsi de suite jusqu'à atteindre la taille de son « univers », en utilisant son nouveau système de comptage. Son compte final suggérait que l'Univers pouvait contenir 10^{51} grains de sable (1 suivi de 51 zéros).

Archimède mentionnait aussi une œuvre du philosophe Aristarque (qui a été perdue malheureusement) proposant un modèle héliocentrique, avec le Soleil au centre de l'Univers, plutôt que géocentrique, avec la Terre au centre de l'Univers. Archimède avait estimé aussi la taille de cet Univers, significativement plus grande que dans le modèle traditionnel. Dans l'Univers d'Aristarque, il aurait fallu quelque 10^{63} grains pour le remplir.

La poésie de l'infini

Le poète **John Donne** (1572–1631) a rendu hommage à l'exploit d'Archimède en déclarant : « Des hommes ont calculé combien de grains de sable suffiraient à remplir l'immense vide entre la Terre et le Firmament. » Donne s'est même servi de ce nombre énorme pour souligner combien il était négligeable comparé à la nature sans limite de l'infini et de l'éternité.

L'Arénaire a peut-être servi d'inspiration aux premiers vers du poème « Augures d'innocence » de **William Blake** (1757–1827) : « *Apercevoir un monde dans un grain de sable / Et le ciel dans une fleur sauvage, / Tenir l'infini dans le creux de la main / Et l'éternité dans une heure.* »

Les suites de nombres

Dans la pratique, Archimède n'a utilisé qu'une toute petite fraction de son système, mais les Grecs étaient aussi familiers **des suites** de nombres qui se prolongent à l'infini. Les suites font partie de toute culture. La plupart des enfants peuvent réciter des comptines (« Un, deux, trois, nous irons au bois… ») pour se rappeler de l'ordre de la suite des nombres à compter.

Une fois que les enfants ont compris la structure de base des nombres et comment la suite des entiers* fonctionne, ils se mettent souvent à compter de plus en plus loin, interminablement. Mais au fait, où s'arrêtent les nombres ? Les enfants semblent chercher le plus grand nombre possible, mais n'y arrivent pas, fatalement. Ils pourraient compter à haute voix pour le restant de leurs jours et il y aura toujours autant de nombres devant que ceux déjà récités depuis le point de départ. Alors, imaginons qu'il existe un plus grand nombre, que l'on appellera max. Qu'est-ce qui nous empêche de poursuivre en faisant l'addition *max + 1, max + 2* ? Le bal continuera à tout jamais.

305, 306, 307 … 549, 550, 551
… 810, 811, 812 … max, max+1
max+2, max+3, max+4, max+5
max+6, max+7, max+8, max+9
max+10, max+11, max+12, max

* Les termes signalés par un astérisque sont expliqués dans le glossaire p. 172.

Évidemment, les nombres à compter ne fournissent pas seulement la simple suite de nombres que la plupart d'entre nous reconnaîtrions. Par exemple, vous pouvez créer une suite en doublant la valeur du nombre précédent :

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 \ldots$$

Ou des suites de nombres croissants en alternant deux pas en avant, un pas en arrière :

$$1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6, 5, 7 \ldots$$

Puis, il y a la suite de Fibonacci et d'autres qui reposent sur l'addition des nombres précédents :

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 \ldots$$

Ou des suites qui impliquent des multiplications :

$$1, 2, 2, 4, 8, 32, 256, 8192 \ldots$$

Et nul besoin de s'en tenir aux nombres entiers. Bien avant même l'époque des Grecs anciens, nous connaissions l'existence des suites de fractions, comme par exemple :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \ldots$$

D’étranges suites

À première vue, des séquences qui s’étirent à l’infini paraissent anodines, mais on se rend compte assez rapidement que certaines sont bien étranges. Dans une série*, nous pouvons additionner les nombres au fur et à mesure pour obtenir une somme. Avec une série très simple, qui alterne 1 et –1, on obtient :

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots$$

Ce qui, avouons-le, n’est pas d’un niveau scientifique transcendant. La somme totale est de 0, chaque 1 étant annulé par un –1 :

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) \ldots = 0$$

Mais est-ce si évident que ça ? Car si l’on déplace d’un cran les parenthèses, on obtient une série avec des 1 qui s’annulent, sauf le premier, et donc la somme vaut 1 :

$$1(-1+1)(-1+1)(-1+1) \ldots = 1$$

La même série peut se terminer par 0 et par 1. Pour reformuler la situation, on pourrait dire : « Si vous allumez et éteignez une ampoule un nombre infini de fois, pouvez-vous savoir si, à la fin, la lampe est allumée ou éteinte ? » La réponse peut être soit l’un soit l’autre. C’est une réponse de mathématicien – le physicien vous dira que l’ampoule sera certainement éteinte dans la mesure où elle aura grillé.

Prenons un autre exemple simple de suite où chaque nombre est la moitié de celui qui le précède :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1\frac{7}{8}$$

Il semble, au fur et à mesure que nous ajoutons élément après élément…

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1\frac{15}{16}$$

… que la somme s'approche de plus en plus de la valeur 2 :

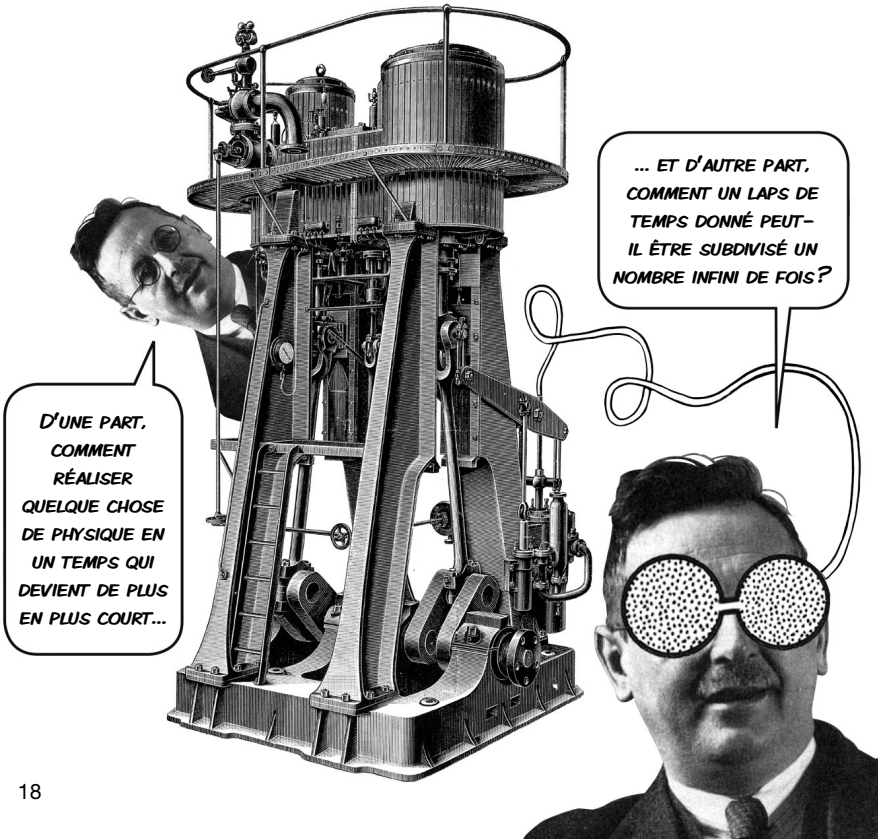
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = 1\frac{31}{32}$$

… bien que dans la pratique, on notera toujours un petit écart, quelle que soit la longueur de la suite :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \ldots + \frac{1}{MAX} = 1\frac{(MAX-1)}{MAX}$$

Nous pourrions dire que la suite tend vers 2 si nous y introduisons un nombre infini d'éléments – mais qu'est-ce que cela signifie précisément ? Et comment une suite infinie de choses pourrait-elle s'additionner pour aboutir à une quantité finie ?

La machine infinie

En 1949, le mathématicien et physicien allemand **Hermann Weyl** (1855–1955), contemporain d'Einstein, a imaginé une « machine infinie », inspirée de cette suite des fractions. La machine aurait été programmée de manière à effectuer la première addition en 1 seconde (à titre d'exemple), la deuxième addition en ½ seconde, la troisième en ¼ de seconde, et ainsi de suite. En principe, la machine exécuterait une infinité de pas en un temps fini.

Mais, dans la pratique, deux difficultés se présentent.