

GÉOMÉTRIE

Michèle Audin



17 avenue de Hoggar
Parc d'activités de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

Michèle Audin

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur
et CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France.

E-mail : Michele.Audin@math.u-strasbg.fr

Url : <http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin>

ISBN : 2-86883-883-9

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays. La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (alinéa 1er de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du code pénal.

© 2006, EDP Sciences

TABLE DES MATIÈRES

Ceci est un livre.....	1
I. Géométrie affine.....	7
I.1. Le postulat des parallèles.....	7
I.2. Espaces affines.....	8
I.3. Applications affines.....	16
I.4. Trois théorèmes de géométrie plane.....	26
I.5. Appendice : rappels succincts sur les barycentres.....	29
I.6. Appendice : notion de convexité.....	31
I.7. Appendice : coordonnées cartésiennes.....	33
Exercices et problèmes.....	35
II. Géométrie euclidienne, généralités.....	51
II.1. Espaces euclidiens.....	51
II.2. Structure des isométries.....	55
II.3. Groupe orthogonal.....	60
Exercices et problèmes.....	67
III. Géométrie euclidienne plane.....	73
III.1. Angles.....	73
III.2. Isométries et déplacements du plan.....	85
III.3. Similitudes planes.....	89
III.4. Inversions et faisceaux de cercles.....	94
Exercices et problèmes.....	110
IV. Constructions à la règle et au compas.....	127
IV.1. La règle du jeu.....	128
IV.2. Les nombres constructibles.....	130
IV.3. Applications à des problèmes de construction.....	133
IV.4. La question des polygones réguliers.....	134
IV.5. Remarques supplémentaires.....	138
Exercices et problèmes.....	138

V. Géométrie euclidienne dans l'espace	143
V.1. Isométries et déplacements de l'espace.....	143
V.2. Produit vectoriel, calculs d'aires.....	147
V.3. Sphères, triangles sphériques.....	151
V.4. Polyèdres, formule d'Euler.....	153
V.5. Polyèdres réguliers.....	156
Exercices et problèmes.....	161
VI. Géométrie projective	177
VI.1. Espaces projectifs.....	177
VI.2. Sous-espaces projectifs.....	179
VI.3. Liaison affine/projectif.....	181
VI.4. Dualité projective.....	187
VI.5. Homographies.....	190
VI.6. Birapport.....	196
VI.7. Droite projective complexe, groupe circulaire.....	200
Exercices et problèmes.....	206
VII. Coniques et quadriques	221
VII.1. Quadriques et coniques affines, généralités.....	221
VII.2. Classification et propriétés des coniques affines.....	228
VII.3. Quadriques et coniques projectives.....	239
VII.4. Birapport sur une conique et théorème de Pascal.....	247
VII.5. Quadriques affines et géométrie projective.....	250
VII.6. Cercles, inversions, faisceaux de cercles.....	259
VII.7. Rappels sur les formes quadratiques.....	265
Exercices et problèmes.....	276
VIII. Courbes, enveloppes et développées	291
VIII.1. Enveloppe d'une famille de droites dans le plan.....	293
VIII.2. Courbure d'une courbe plane.....	299
VIII.3. Développées.....	301
VIII.4. Appendice : rappels sur les courbes paramétrées.....	302
Exercices et problèmes.....	305
IX. Surfaces dans l'espace	315
IX.1. Exemples de surfaces dans l'espace.....	315
IX.2. Géométrie différentielle des surfaces de l'espace.....	318
IX.3. Propriétés métriques des surfaces.....	331
IX.4. Appendice : quelques formules.....	341
Exercices et problèmes.....	343

Indications pour les exercices	349
Chapitre I.....	349
Chapitre II.....	355
Chapitre III.....	359
Chapitre IV.....	371
Chapitre V.....	371
Chapitre VI.....	381
Chapitre VII.....	387
Chapitre VIII.....	396
Chapitre IX.....	400
Bibliographie	407
Index	411

CECI EST UN LIVRE...

Je me souviens que j'ai plusieurs fois essayé de me servir d'une règle à calcul, et que plusieurs fois aussi j'ai commencé des manuels de maths modernes en me disant que si j'allais lentement, si je lisais toutes les leçons dans l'ordre en faisant les exercices et tout, il n'y avait aucune raison pour que je cale.

Georges Perec, *in* [37].

Une première version de ce livre est parue en 1998. Puis une deuxième, en anglais, en 2003. La présente édition est destinée aux étudiants de licence (L3) et de « master » de mathématiques ainsi qu'à celles et ceux qui préparent le CAPES ou l'agrégation. Elle s'adresse donc à des lecteurs qui ont étudié de la géométrie de façon plus ou moins expérimentale au lycée et de l'algèbre linéaire de façon plus formelle pendant deux années d'université. Elle est issue de l'enseignement que j'ai donné aux étudiants de ces filières et des enseignements que j'en ai moi-même tirés.

Deux idées directrices

La première idée est de fournir un exposé rigoureux, basé sur la définition d'un espace affine *via* l'algèbre linéaire, mais qui n'hésite pas à être terre à terre et élémentaire. C'est pourquoi j'ai souhaité expliquer comment l'algèbre linéaire peut

être utilisée en géométrie élémentaire et en même temps montrer de la « vraie » géométrie : des triangles, des sphères, des polyèdres, des angles inscrits, des inversions, des paraboles...

Il est en effet très satisfaisant pour les mathématiciens de définir un espace affine comme un ensemble de points sur lequel opère un espace vectoriel (et c'est ce que je fais ici) mais cette approche formelle, si élégante soit-elle, ne doit pas occulter l'aspect « phénoménologique » de la géométrie élémentaire, son esthétique propre : oui, le théorème de Thalès exprime simplement que les projections sont des applications affines, non, il n'est pas nécessaire d'orienter un plan euclidien pour y définir des angles orientés... tout ça n'empêche ni le cercle d'Euler d'être tangent aux cercles inscrit et exinscrits, ni les droites de Simson d'envelopper une hypocycloïde à trois rebroussements !

Ce parti pris oblige à aborder certains sujets sous des éclairages différents. Par exemple, les inversions planes traitées de façon naïve au chapitre III font des retours plus abstraits dans le chapitre de géométrie projective et dans celui sur les quadriques. De même l'étude des coniques projectives au chapitre VII vient après celle des coniques affines... alors qu'il aurait été plus simple — au moins pour l'auteur ! — de tout déduire du traitement projectif.

La deuxième idée est de produire un texte ouvert : les ouvrages destinés aux étudiants préparant le CAPES sont trop souvent fermés sur le programme de ce concours, ce qui ne donne pas l'impression que les mathématiques soient une science en mouvement (ni en fête, d'ailleurs !). Malgré l'aspect limité du programme traité ici, j'espère intéresser *aussi* des lectrices plus avancées.

Enfin, les mathématiques sont une activité humaine comme les autres et une bonne partie du contenu du livre ressortit à la culture la plus classique puisqu'on y évoque notamment l'arc-en-ciel selon Newton, les sections coniques d'Apollonius, la difficulté à dessiner des cartes de la Terre, la géométrie d'Euclide et le postulat des parallèles, la mesure des latitudes et des longitudes, les problèmes de perspective des peintres de la Renaissance⁽¹⁾, les polyèdres platoniciens. J'ai essayé de le montrer dans la façon de l'écrire⁽²⁾ et dans la bibliographie.

Quoi de neuf ?

Ce n'est pas juste une nouvelle édition. J'ai corrigé de nombreuses erreurs figurant dans les éditions précédentes (en français et en anglais), inclus quelques

⁽¹⁾Le traité de géométrie de Dürer [18] est destiné aux amateurs d'art, pas aux mathématiciens.

⁽²⁾La façon d'écrire les mathématiques fait aussi partie de la culture. Comparer les « onze propriétés de la sphère » de [27] et les « quatorze façons de décrire la pluie » de [19].

additifs (écrits pour la traduction en anglais) et un bref nouveau chapitre sur les constructions à la règle et au compas (tout au long des exercices, j'ai aussi un peu plus insisté sur les problèmes de construction).

Les prérequis

Il s'agit du programme des deux premières années de la licence, algèbre linéaire et formes quadratiques⁽³⁾, un peu d'algèbre (groupes, sous-groupes, opérations de groupes...)⁽⁴⁾, la définition d'une application différentiable et un peu de topologie des espaces vectoriels normés (c'est-à-dire de \mathbf{R}^n), dans le dernier chapitre, des avatars du théorème des fonctions implicites, pour un ou deux exercices avancés seulement, un peu d'analyse complexe.

Les exercices

Chaque chapitre se termine par des exercices. J'en ai ajouté une bonne cinquantaine pour cette édition. Il faut faire des exercices. Il faut *chercher* les exercices. Un exercice n'est pas quelque chose dont il faut connaître « la » solution pour la réciter à un jury. Aucune notion ne peut être comprise ou assimilée sans un minimum de pratique, de recherche, d'*échecs*. Un exercice sur lequel on n'a pas « séché » est un exercice inutile.

Avec beaucoup de réticences, j'ai quand même ajouté les solutions de nombreux exercices.

Remarque bibliographique

La difficulté que j'avais à conseiller des livres aux étudiants est une des raisons d'être de ce texte : il y a beaucoup de livres de géométrie, mais ceux qui sont bons sont trop difficiles, trop abstraits ou trop volumineux pour ces étudiants (je pense en particulier à [3, 22, 5]).

Il n'en reste pas moins qu'il y a quelques bons livres, à tous les niveaux... et que j'espère que celui-ci incitera les lecteurs à aller regarder, par exemple, outre

⁽³⁾Il y a quand même un paragraphe de rappels des propriétés des formes quadratiques dans le chapitre sur les coniques.

⁽⁴⁾Les groupes de transformations sont l'essence-même de la géométrie. J'espère que cette idéologie transparait dans ce texte. Pour ne pas masquer cette essence, j'ai choisi de ne *pas* écrire de paragraphe de sorites généraux sur les opérations de groupe. On consultera par exemple [39, 4, 24, 5].

les trois ouvrages déjà cités, [15, 14, 46, 49]. J'ai utilisé aussi de beaux livres de terminale (des cinquante dernières années), comme [16, 30, 34, 47].

Remerciements

Je remercie d'abord tous ceux et celles, parents, enseignants, amis, collègues et étudiants, qui ont contribué, depuis si longtemps, à me faire aimer les mathématiques présentées dans ce livre.

C'est Daniel Guin qui m'a décidée à l'écrire. Puis, Nicole Bopp a lu avec beaucoup d'attention et critiqué une toute première version des trois premiers chapitres. C'est grâce à eux deux que ce livre existe. Je les en remercie.

Une version préliminaire a été utilisée par les étudiants strasbourgeois pendant l'année universitaire 1997-98. Puis le livre corrigé a été publié, plus ou moins bien, diffusé, plus ou moins bien aussi, mais il a visiblement trouvé un public. Il y a eu ensuite la traduction en anglais et, à chaque étape, de nouvelles suggestions, critiques, remarques, corrections, apportées par les collègues ou les étudiants qui utilisaient telle ou telle version. Et maintenant cette nouvelle édition, fruit de toutes ces contributions. Beaucoup de monde à remercier.

Ici, Pierre Baumann, Laure Blasco, Olivier Debarre, Paul Girault, Gilles Halbout, Vilmos Komornik⁽⁵⁾, Jean-Yves Merindol. Ailleurs, Ana Cannas da Silva, Michel Coste⁽⁶⁾, Jérôme Germoni, Daniel Perrin⁽⁷⁾, Emma Previato, François Rouvière⁽⁸⁾. Ici ou là, tous ceux que j'ai oubliés. Plus, encore ici, Vincent Blanlœil, Mihai Damian, Ilia Itenberg et Nathalie Wach pour des exercices supplémentaires. Et encore, tous les étudiants, plus particulièrement Nadine Baldensperger, Régine Barthelmé, Martine Bourst, Sophie Gérardy, Catherine Goetz, Mathieu Hibou, Étienne Mann, Nicolas Meyer, Myriam Oyono-Oyono, Magali Pointeaux, Sandrine Zitt et tous les agrégatifs de ces quelques dernières années, mais enfin, vraiment, tous les étudiants. Enfin Alice Gaertig pour sa détermination à trouver « où était le photographe », Myriam Audin et Juliette Sabbah⁽⁹⁾ pour leur aide

⁽⁵⁾C'est avec plaisir que j'inclus sa courte et élégante démonstration du théorème d'Erdős–Mordell (exercice III.22).

⁽⁶⁾Autour du théorème de Witt.

⁽⁷⁾Son théorème des six birapports, popularisé par la première édition, a obtenu un succès certain auprès des étudiants — tout en énervant pas mal de mes collègues, vexés, comme j'avoue l'avoir été, de ne pas l'avoir inventé eux-mêmes.

⁽⁸⁾Grâce à qui un parfum de lavande agrémenté cette édition.

⁽⁹⁾Qui a même redessiné certaines des figures.

à la rédaction des exercices sur les caustiques. Je les remercie tous et toutes très chaleureusement.

◇
Pour
ce livre,
j'ai utilisé,
comme toujours,
les « paquets » $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$
de la Société mathématique
de France. Je ne peux me re-
mercier ni pour avoir écrit et tapé ce
texte ni pour avoir résolu la plupart des
quatre cent onze exercices et « dessiné »
les cent quatre vingt-quinze figures
qu'il contient, mais je peux
remercier Claude Sabbah
pour son aide singu-
lière, stylistique,
technique, lo-
gistique,
etc.
◇

I

GÉOMÉTRIE AFFINE

Un espace affine est un ensemble de points, il contient des droites, des plans, et la géométrie affine⁽¹⁾ discute, par exemple, des relations entre ces points et ces droites (points alignés, droites parallèles ou concourantes...). Pour définir ces objets et décrire leurs relations, on peut :

– énoncer une liste d’axiomes, d’incidence principalement, comme « par deux points passe une droite et une seule ». C’est la voie d’Euclide (et plus récemment de Hilbert). Même si la démarche et *a fortiori* les axiomes eux-mêmes n’y sont pas explicités, c’est cette méthode qui est utilisée actuellement dans l’enseignement secondaire français ;

– décider que l’essentiel est que deux points déterminent un *vecteur* et tout définir à l’aide de l’algèbre linéaire, c’est-à-dire par les axiomes définissant les espaces vectoriels.

J’ai choisi de développer ici la *deuxième* méthode, parce qu’elle est plus abstraite et plus nette, bien sûr, mais surtout parce que je crois qu’il est temps, en licence de mathématiques, de montrer aux étudiants que l’algèbre linéaire qu’on leur a enseignée pendant deux ans « sert » à quelque chose !

I.1. Le postulat des parallèles

Mais, pour commencer, je vais rappeler quelques aspects de la *première* méthode. Au commencement, il y a donc les axiomes d’Euclide, qui établissent des relations entre des objets appelés « points » et d’autres appelés « droites ». Par exemple,

⁽¹⁾Il s’agit ici de géométrie affine « pure » au sens où il n’y a ni distance, ni angle, ni perpendiculaires, ceux-ci appartenant à la géométrie euclidienne, qui fera l’objet des chapitres suivants.

Postulat I.1.1. *Par deux points passe une droite et une seule.*

Les points sont sur les droites, les droites se coupent en des points. Pour ce qui va nous intéresser ici, deux droites qui ne se rencontrent pas (ou sont confondues) sont dites *parallèles* (notation $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$). Et il y a un des axiomes d'Euclide, le célèbre « cinquième postulat », que l'on peut formuler ainsi (ce n'est pas la formulation d'Euclide, mais elle lui est équivalente) :

Postulat I.1.2. *Par un point hors d'une droite, il passe une unique droite parallèle à cette droite.*

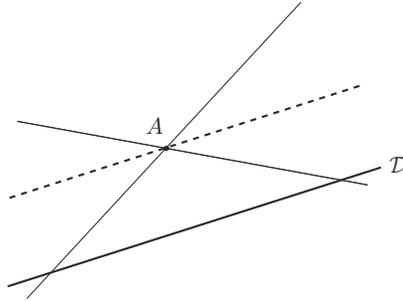


FIGURE 1. Le postulat des parallèles

Si ce cinquième postulat est célèbre, c'est parce que son indépendance des autres est à la source des géométries non-euclidiennes. Il est intéressant de remarquer que ce cinquième postulat a pour conséquence :

Proposition I.1.3. *La relation « être parallèle à » est une relation d'équivalence entre les droites du plan.*

Démonstration. Par définition, elle est réflexive et symétrique. Montrons qu'elle est transitive. On suppose que trois droites \mathcal{D} , \mathcal{D}' et \mathcal{D}'' sont telles que $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}' \parallel \mathcal{D}''$, on veut montrer que \mathcal{D} et \mathcal{D}'' sont parallèles. Supposons donc que $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}''$ ne soit pas vide, soit $A \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}''$. La droite \mathcal{D}' passe par A , elle est parallèle à \mathcal{D} et à \mathcal{D}'' , donc on a $\mathcal{D} = \mathcal{D}''$, grâce à l'unicité dans le cinquième postulat. \square

I.2. Espaces affines

Je m'arrêterai là pour le moment. Passons maintenant à l'algèbre linéaire. Voici la définition d'un espace affine.

Définition I.2.1. Un ensemble \mathcal{E} est muni d'une structure d'espace affine par la donnée d'un espace vectoriel⁽²⁾ E et d'une application Θ qui associe un vecteur de E à tout couple de points de \mathcal{E} :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\longrightarrow E \\ (A, B) &\longmapsto \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

telle que

- pour tout point A de \mathcal{E} , l'application partielle $\Theta_A : B \mapsto \overrightarrow{AB}$ soit une bijection de \mathcal{E} sur E ,
- pour tous points A, B et C de \mathcal{E} , on ait $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ (relation de Chasles).

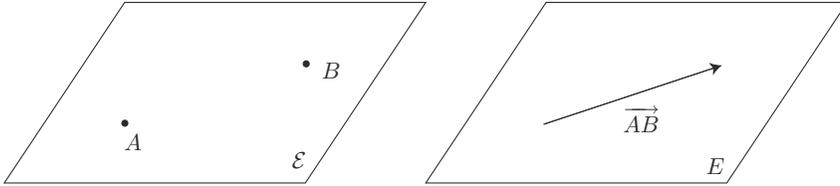


FIGURE 2

L'espace vectoriel E est la *direction* de \mathcal{E} , les éléments de \mathcal{E} sont appelés *points*, on appelle *dimension* de \mathcal{E} la dimension de l'espace vectoriel E qui le dirige.

Exemples I.2.2

(1) Avec cette définition, l'ensemble vide est un espace affine (dirigé par n'importe quel espace vectoriel) dont il est sage de convenir qu'il n'a pas de dimension.

(2) Tout espace vectoriel a une structure naturelle⁽³⁾ d'espace affine : l'application $\Theta : E \times E \rightarrow E$ est simplement celle qui, au couple (u, v) , associe le vecteur $v - u$.

(3) Si \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont deux espaces affines dirigés respectivement par E_1 et E_2 , le produit cartésien $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ est un espace affine dirigé par $E_1 \times E_2$: l'application

$$\Theta : (\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2) \times (\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2) \rightarrow E_1 \times E_2$$

⁽²⁾C'est un espace vectoriel sur un corps \mathbf{K} de caractéristique 0 que je ne précise pas pour ne pas alourdir les définitions. Les lectrices peuvent imaginer que ce corps est \mathbf{R} ou \mathbf{C} .

⁽³⁾Elle est *naturelle* parce qu'elle est définie par la seule structure d'espace vectoriel (sans autre choix). Il serait plus exact, mais moins naturel (!) de dire qu'elle est « canonique ».

est celle qui, au couple $((A_1, A_2), (B_1, B_2))$, associe le couple de vecteurs $(\overrightarrow{A_1 B_1}, \overrightarrow{A_2 B_2})$.

Propriétés

La relation de Chasles donne directement $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$ donc $\overrightarrow{AA} = 0$ puis $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = 0$ donc $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

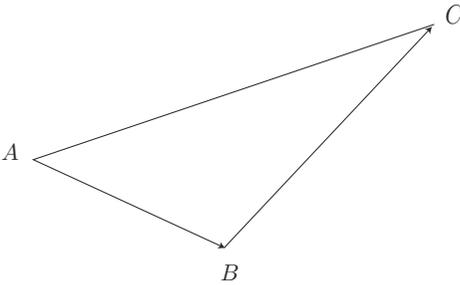


FIGURE 3. Relation de Chasles

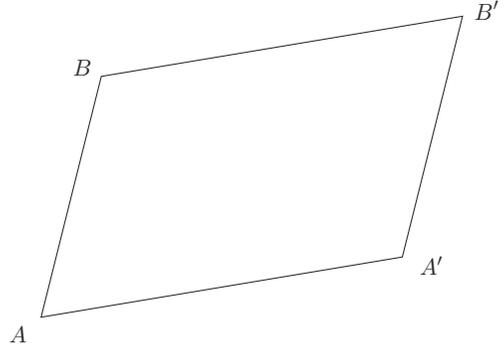


FIGURE 4. Règle du parallélogramme

Règle du parallélogramme

Elle dit que les deux égalités $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ sont équivalentes. Elle se démontre en appliquant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B},$$

ce qui s'écrit aussi

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{BB'}.$$

Quand l'une des deux égalités est vérifiée, on dit que $AA'B'B$ est un *parallélogramme*.

Remarque I.2.3. Si A est un point de l'espace affine \mathcal{E} et si u est un vecteur de l'espace vectoriel E qui le dirige, l'unique point B de \mathcal{E} tel que $\overrightarrow{AB} = u$ est parfois noté

$$B = A + u.$$

Cette notation est cohérente puisqu'on a

$$(A + u) + v = A + (u + v)$$

(c'est une traduction de la relation de Chasles). On en trouvera une justification dans l'exercice I.63.

Vectorialisé d'un espace affine

En fixant un point A d'un espace affine \mathcal{E} , on peut définir sur celui-ci une structure d'espace vectoriel, lequel espace vectoriel est noté \mathcal{E}_A . L'application

$$\begin{array}{ccc} \Theta_A : \mathcal{E} & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \overrightarrow{AM} \end{array}$$

est une bijection, ce qui permet de transporter la structure d'espace vectoriel de E sur \mathcal{E} : on dit que $M + N = Q$ si $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AQ}$. On remarquera que la structure ainsi définie dépend très fortement du point A , celui-ci devenant en effet le zéro de l'espace vectoriel \mathcal{E}_A grâce à la relation $\overrightarrow{AA} = 0$.

Remarque I.2.4. On en conclura que, si l'espace vectoriel E possède une structure naturelle d'espace affine, il n'est pas vrai que l'espace affine \mathcal{E} possède une structure *naturelle* d'espace vectoriel.

Sous-espaces affines

On dit qu'un sous-ensemble \mathcal{F} de \mathcal{E} est un *sous-espace affine* s'il est vide ou s'il contient un point A tel que $\Theta_A(\mathcal{F})$ soit un sous-espace vectoriel de E . On démontre facilement que ce sous-espace vectoriel ne dépend pas du choix du point A . Plus précisément :

Proposition I.2.5. *Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de \mathcal{E} . Il existe un sous-espace vectoriel F de E tel que, pour tout point B de \mathcal{F} , $\Theta_B(\mathcal{F}) = F$. Le sous-espace \mathcal{F} est un espace affine dirigé par F .*

La démonstration est un exercice (exercice I.2). □

Remarque I.2.6. Si M et N sont des points de \mathcal{F} , le vecteur \overrightarrow{MN} est dans F .

Inversement, on a, pratiquement par définition :

Proposition I.2.7. *Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit A un point de \mathcal{E} . Il existe un et un seul sous-espace affine dirigé par F et passant par A .*

Démonstration. Si \mathcal{F} est un sous-espace affine dirigé par F et passant par A , alors $\Theta_A(\mathcal{F}) = F$ et

$$\mathcal{F} = \left\{ M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{AM} \in F \right\}.$$

Inversement, cette égalité définit bien un sous-espace affine dirigé par F et passant par A . □

Exemples 1.2.8

(1) Un espace affine de dimension 0 est constitué d'un unique point (pourquoi?). Tous les points d'un espace affine \mathcal{E} sont des sous-espaces affines.

On appelle *droites*, respectivement *plans*, les espaces ou sous-espaces affines de dimension 1, respectivement 2.

(2) Soient E et F deux espaces vectoriels, et soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Pour tout v dans l'image de f dans F , l'image réciproque $f^{-1}(v)$ est un sous-espace affine de E (on considère, bien sûr, que E est muni de sa structure affine naturelle) de direction le noyau $\text{Ker } f$ de f .

Démonstration. Soit $v \in \text{Im } f$. On veut démontrer que, pour u fixé dans $\mathcal{F} = f^{-1}(v)$, on a

$$\Theta_u(f^{-1}(v)) = \text{Ker } f.$$

Mais $\Theta_u(x) = x - u$ par définition.

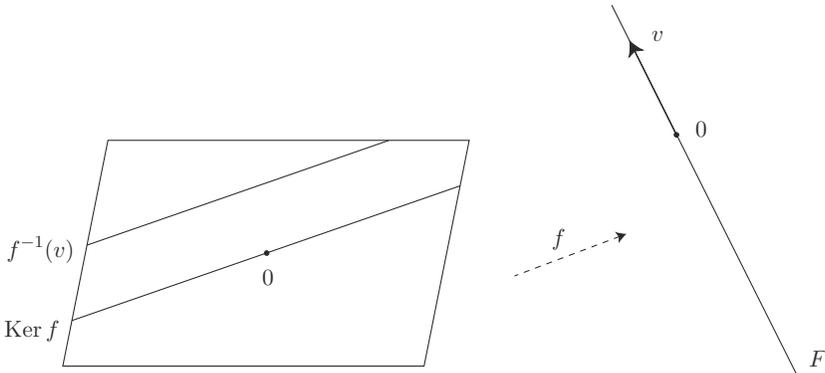


FIGURE 5

Si $y \in \text{Ker } f$, pour $x = y + u$, $f(x) = f(u) = v$, donc $x \in \mathcal{F}$ et on a bien $y = x - u = \Theta_u(x)$ pour un x de \mathcal{F} . Ainsi $\text{Ker } f \subset \Theta_u(\mathcal{F})$.

Réciproquement, si $y \in \Theta_u(\mathcal{F})$, $y = x - u$ pour un x de \mathcal{F} et donc $f(y) = 0$. □

Par exemple, l'ensemble des solutions d'un système linéaire, s'il n'est pas vide, est un sous-espace affine dirigé par l'ensemble des solutions du système sans second membre associé. L'équation $\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$ définit un sous-espace affine de l'espace vectoriel \mathbf{R}^n (ou \mathbf{C}^n , ou \mathbf{K}^n).

(3) Plus généralement, les sous-espaces affines d'un espace vectoriel E sont les sous-espaces de la forme $F + u_0$, où F est un sous-espace vectoriel et u_0 un vecteur de E . Les sous-espaces vectoriels sont donc les sous-espaces affines contenant 0.

Sous-espace engendré par une partie de \mathcal{E}

Proposition I.2.9. *Toute intersection de sous-espaces affines est un sous-espace affine.*

Démonstration. Soit $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces affines de \mathcal{E} . Soit \mathcal{F} leur intersection. Si elle est vide, c'est un sous-espace affine. Sinon, on y choisit un point A . Chaque $\Theta_A(\mathcal{F}_i)$ est un sous-espace vectoriel F_i de la direction E de \mathcal{E} .

Soit F l'intersection des sous-espaces F_i dans E . C'est un sous-espace vectoriel (c'est clair ?) et \mathcal{F} est le sous-espace affine passant par A et dirigé par F : un point M de \mathcal{E} est dans \mathcal{F} si et seulement si il est dans chacun des \mathcal{F}_i , soit si et seulement si \overrightarrow{AM} est dans chacun des F_i donc dans F . \square

Proposition I.2.10. *Soit S une partie de \mathcal{E} . L'intersection de tous les sous-espaces affines de \mathcal{E} contenant S est le plus petit sous-espace affine contenant S .* \square

Ce sous-espace est le *sous-espace engendré par S* . On le note $\langle S \rangle$.

Par exemple, si $S = \{A_0, \dots, A_k\}$ est un ensemble fini, $\langle A_0, \dots, A_k \rangle$ est le sous-espace affine contenant A_0 et dirigé par l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$. En particulier, sa dimension est au plus k .

Définition I.2.11. Les $k + 1$ points A_0, \dots, A_k sont *affinement indépendants* si la dimension de l'espace $\langle A_0, \dots, A_k \rangle$ qu'ils engendrent est k . Si $k = \dim \mathcal{E}$, on dit que (A_0, \dots, A_k) est un *repère affine* de \mathcal{E} .

Par exemple, un repère affine d'une droite est constitué de deux points (distincts). Les lecteurs devraient d'ailleurs s'assurer qu'ils savent *démontrer* que par deux points passe une droite et une seule⁽⁴⁾ (exercice I.3). Trois points sont indépendants s'ils ne sont pas alignés et plus généralement $k + 1$ points sont indépendants si et seulement si aucun n'est dans le sous-espace engendré par les autres (exercice I.9).

⁽⁴⁾Cette propriété, que la méthode axiomatique doit énoncer comme axiome, précisément, est ici une conséquence de la structure d'espace vectoriel.

Remarque I.2.12. On peut considérer un repère affine (A_0, \dots, A_k) d'un espace \mathcal{E} comme la donnée d'une *origine* A_0 et d'une base $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k})$ de sa direction. Ce qui permet d'attribuer à chaque point M de \mathcal{E} des *coordonnées*, les composantes du vecteur $\overrightarrow{A_0M}$ dans la base en question. Voir le § I.7.

Notations

Le symbole $\langle A, B \rangle$ désigne donc, si A et B sont distincts, la droite passant par A et B . On la notera aussi AB , bien sûr. Profitons-en pour donner une notation pour les segments, dans le cas des espaces affines réels, bien entendu⁽⁵⁾. Si A et B sont deux points, l'ensemble des points M de la droite AB tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$, en bon français le segment AB , sera noté, en cas de risque d'ambiguïté, $[AB]$. Je préciserai toujours en français (« la droite AB », « le segment AB »...).

Position relative de deux sous-espaces affines, parallélisme

Définition I.2.13. On dit que deux sous-espaces affines \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathcal{E} sont *parallèles* (notation $\mathcal{F} \parallel \mathcal{G}$, ce qui se lit « \mathcal{F} est parallèle à \mathcal{G} ») s'ils ont la même direction.

Comme le parallélisme est défini par les mots « la même », c'est une relation d'équivalence.

Remarque I.2.14. Avec cette définition, deux sous-espaces peuvent être disjoints ($\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$) sans être parallèles. Par exemple, une droite n'est jamais parallèle à un plan (figure 6). Par contre, dans un plan, deux droites qui ne se rencontrent pas sont parallèles. Certains auteurs qualifient de *faiblement parallèles* deux sous-espaces \mathcal{F} et \mathcal{G} dont les directions vérifient $F \subset G$ (comme sur la figure 6). Je n'aime pas beaucoup cette terminologie, surtout parce que le « faible parallélisme » n'est pas une relation d'équivalence (c'est clair ?).

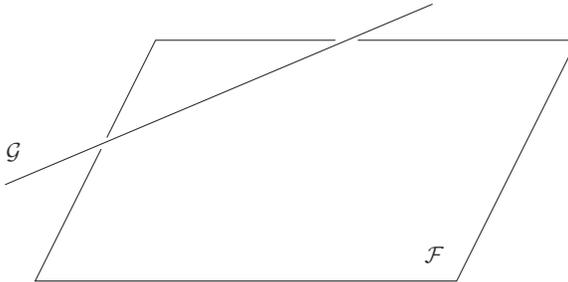


FIGURE 6

⁽⁵⁾Pourquoi, au fait ?

Exemple I.2.15. Si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire, tous les sous-espaces $f^{-1}(v)$ (pour v dans l'image de f) sont parallèles puisqu'ils sont tous dirigés par $\text{Ker } f$.

Proposition I.2.16. Si \mathcal{F} est parallèle à \mathcal{G} , alors \mathcal{F} et \mathcal{G} sont égaux ou disjoints.

Démonstration. Supposons que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ ne soit pas vide. Soit A un point de l'intersection. La direction F de \mathcal{F} et le point A définissent un unique sous-espace affine, si l'on en croit la proposition I.2.7. Donc, si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ n'est pas vide, on a l'égalité $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. \square

Remarquons que le « postulat des parallèles⁽⁶⁾ » est vrai dans les espaces affines :

Proposition I.2.17 (« Postulat des parallèles »). Par tout point d'un espace affine, il passe une unique droite parallèle à une droite donnée.

Démonstration. Le point A et la direction D de la droite \mathcal{D} déterminent la parallèle en question :

$$\mathcal{D}' = \left\{ M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{AM} \in D \right\}. \quad \square$$

Proposition I.2.18. Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sous-espaces affines d'un espace affine \mathcal{E} , dirigés respectivement par F et G . On suppose que F et G engendrent E (en symboles, $F + G = E$). Alors tout sous-espace parallèle à \mathcal{G} rencontre \mathcal{F} .

La démonstration est fondée sur le lemme suivant.

Lemme I.2.19. Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sous-espaces affines d'un espace affine \mathcal{E} , dirigés respectivement par F et G . Soient A un point de \mathcal{F} , B un point de \mathcal{G} . Pour que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ ne soit pas vide, il faut et il suffit que le vecteur \overrightarrow{AB} soit dans $F + G$.

Démonstration de la proposition. Soient A un point de \mathcal{F} et B un point de \mathcal{E} . On veut montrer que le sous-espace affine \mathcal{G}' passant par B et parallèle à \mathcal{G} rencontre \mathcal{F} . On écrit

$$\overrightarrow{AB} \in E = F + G$$

et on applique le lemme à \mathcal{F} et \mathcal{G}' pour conclure. \square

⁽⁶⁾Il est contenu dans la définition du parallélisme, et donc, en dernière instance, dans la définition d'un espace vectoriel. Au sujet du postulat des parallèles, voir aussi le corollaire III.1.16, le corollaire V.3.2 et l'exercice VI.52.

Démonstration du lemme. Si l'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ n'est pas vide, choisissons-y un point M . On a alors

$$\overrightarrow{AM} = u \in F, \quad \overrightarrow{BM} = v \in G$$

donc

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} \in F + G.$$

Inversement, si le vecteur \overrightarrow{AB} est dans $F + G$, écrivons

$$\overrightarrow{AB} = u - v \text{ avec } u \in F \text{ et } v \in G.$$

Le point M défini par $u = \overrightarrow{AM}$ est dans \mathcal{F} et

$$\overrightarrow{AB} = u + \overrightarrow{MB}$$

donc $\overrightarrow{BM} = v$ est dans G , donc M est dans \mathcal{G} et finalement M est dans $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. \square

I.3. Applications affines

Les applications affines sont le pendant en géométrie affine des applications linéaires en algèbre linéaire.

Définition I.3.1. Soient \mathcal{E} et \mathcal{F} deux espaces affines dirigés respectivement par E et F . Une application $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est dite *affine* s'il existe un point O dans \mathcal{E} et une application linéaire $f : E \rightarrow F$ tels que

$$\forall M \in \mathcal{E}, \quad f(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}.$$

Remarque I.3.2. L'application linéaire f ne dépend alors pas du choix du point O . En effet, si O' est un autre point, on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\varphi(O')\varphi(M)} &= \overrightarrow{\varphi(O')\varphi(O)} + \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} \\ &= -\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(O')} + \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} \\ &= -f(\overrightarrow{OO'}) + f(\overrightarrow{OM}) \\ &= f(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}) \text{ puisque } f \text{ est linéaire} \\ &= f(\overrightarrow{O'M}). \end{aligned} \quad \square$$

Comme l'application linéaire f ne dépend que de φ , on a ainsi une application de l'ensemble des applications affines dans celui des applications linéaires. Je noterai $\overrightarrow{\varphi}$ l'image de φ par cette application (donc ici $f = \overrightarrow{\varphi}$).

Ce que nous venons de démontrer s'écrit, avec cette notation :

$$\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AB}) \text{ pour tous points } A, B \text{ de } \mathcal{E}.$$

Je vais utiliser des applications affines et des applications linéaires. Pour faciliter la lecture, je vais réserver les lettres latines f, g etc. aux applications linéaires et les lettres grecques φ, ψ etc. aux applications affines. Dans tous les cas, je préciserai naturellement « qui est quoi ».

Remarque I.3.3. Soit φ une application de l'espace affine \mathcal{E} dans l'espace affine \mathcal{F} . Soit O un point de \mathcal{E} . Vectorialisons \mathcal{E} en O et \mathcal{F} en $\varphi(O)$. On a des isomorphismes linéaires

$$(\Theta_O)^{-1} : E \longrightarrow \mathcal{E}_O \quad \text{et} \quad \Theta_{\varphi(O)} : \mathcal{F}_{\varphi(O)} \longrightarrow F.$$

Considérons l'application composée $\overrightarrow{\varphi}$

$$\begin{array}{ccccccc} E & \longrightarrow & \mathcal{E}_O & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{F}_{\varphi(O)} & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & M & \longmapsto & \varphi(M) & \longmapsto & v \end{array}$$

où M et v sont définis par $\overrightarrow{OM} = u$ et $v = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}$. L'application $\overrightarrow{\varphi}$ vérifie

$$\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}.$$

Dire que l'application φ est affine, c'est dire que $\overrightarrow{\varphi}$ est linéaire, ce qui est équivalent à dire que φ elle-même est *linéaire* comme application de l'espace vectoriel \mathcal{E}_O dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}_{\varphi(O)}$.

Exemples I.3.4

(1) L'application constante envoyant \mathcal{E} sur un point est affine, l'application linéaire associée est l'application nulle.

(2) Si $\mathcal{E} = \mathcal{F} = \mathbf{R}$, les applications affines sont les applications de la forme $x \mapsto ax + b$ (l'application linéaire associée est $x \mapsto ax$).

(3) Plus généralement, si E et F sont deux espaces vectoriels munis de leurs structures affines naturelles, une application

$$\varphi : E \longrightarrow F$$

est affine si et seulement si il existe un vecteur v_0 dans F et une application linéaire

$$f : E \longrightarrow F$$

telle que l'on ait $\varphi(u) = f(u) + v_0$ pour tout u dans E .

Démonstration. On choisit $O = 0$, la relation $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}$ s'écrit, par définition de la structure affine de l'espace vectoriel F ,

$$\overrightarrow{\varphi}(u) = \varphi(u) - \varphi(0),$$

ce qui est bien la relation annoncée, avec $v_0 = \varphi(0)$ et $f = \overrightarrow{\varphi}$. □

Les applications linéaires de E dans F sont donc les applications affines qui envoient 0 sur 0.

(4) Supposons que $\mathcal{E} = \mathcal{F}$. Les applications affines dont l'application linéaire associée est Id_E sont les applications

$$\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

telles que $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \overrightarrow{AB}$ pour tous A et B dans \mathcal{E} . La règle du parallélogramme donne alors $\overrightarrow{A\varphi(A)} = \overrightarrow{B\varphi(B)}$ pour tous A et B . Autrement dit, le vecteur $\overrightarrow{M\varphi(M)}$ est un vecteur constant u . On dit que φ est la *translation* de vecteur u et on la note t_u (figure 7).

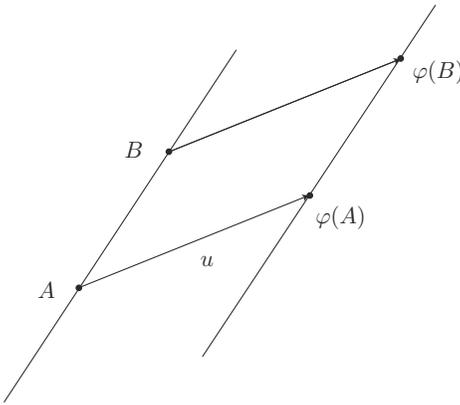


FIGURE 7. Translation

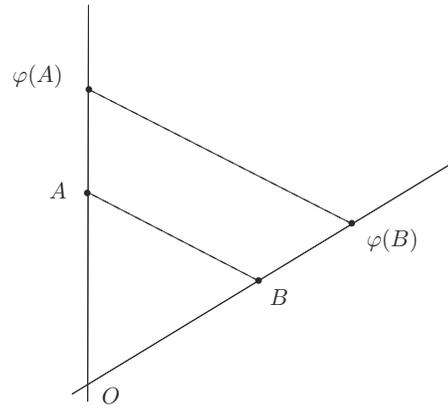


FIGURE 8. Homothétie

(5) Soient O un point, λ un scalaire et φ l'application définie par $\overrightarrow{O\varphi(M)} = \lambda \overrightarrow{OM}$. C'est une application affine. L'application linéaire associée est l'homothétie vectorielle de rapport λ . Le point O est fixe, on appelle φ l'*homothétie* de centre O et de rapport λ et on la note $h(O, \lambda)$ (figure 8).

Effet sur les sous-espaces

De même que (et parce que) l'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel, on a :

Proposition I.3.5. *L'image d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine.*

Démonstration. Soit $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ une application affine. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine, de direction F . Si \mathcal{F} est vide, son image par φ est vide et en particulier,

c'est un sous-espace affine. Sinon, soit A un point de \mathcal{F} . Il est clair qu'alors $\varphi(\mathcal{F})$ est le sous-espace affine de \mathcal{E}' dirigé par $\vec{\varphi}(F)$ et passant par $\varphi(A)$. \square

Corollaire I.3.6. *Toute application affine envoie trois points alignés sur trois points alignés.* \square

Le même argument, c'est-à-dire l'utilisation du résultat vectoriel analogue, permet de démontrer :

Proposition I.3.7. *L'image inverse d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine.*

La démonstration est laissée en exercice aux lectrices. \square

Effet sur les barycentres⁽⁷⁾

La traduction en termes affines de la linéarité est, comme on dit souvent : « les applications affines conservent le barycentre », et plus précisément :

Proposition I.3.8. *L'image du barycentre de $((A_1, \alpha_1), \dots, (A_k, \alpha_k))$ par l'application affine φ est le barycentre de $((\varphi(A_1), \alpha_1), \dots, (\varphi(A_k), \alpha_k))$. Réciproquement, si une application φ transforme le barycentre de tout système de deux points pondérés $((A, \alpha), (B, 1 - \alpha))$ en celui du système $((\varphi(A), \alpha), (\varphi(B), 1 - \alpha))$, alors elle est affine.*

Démonstration. Supposons d'abord que φ soit une application affine. En notant systématiquement M' l'image $\varphi(M)$, on a, pour tout point P de \mathcal{E} ,

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}(\alpha_1 \overrightarrow{PA_1} + \dots + \alpha_k \overrightarrow{PA_k}) &= \alpha_1 \vec{\varphi}(\overrightarrow{PA_1}) + \dots + \alpha_k \vec{\varphi}(\overrightarrow{PA_k}) \\ &= \alpha_1 \overrightarrow{P'A'_1} + \dots + \alpha_k \overrightarrow{P'A'_k}. \end{aligned}$$

Si P est le barycentre du système des (A_i, α_i) , la relation donne

$$\alpha_1 \overrightarrow{P'A'_1} + \dots + \alpha_k \overrightarrow{P'A'_k} = 0$$

et P' est bien le barycentre du système image.

Réciproquement, soit G le barycentre du système $((A, \alpha), (B, 1 - \alpha))$. Pour tout point O de \mathcal{E} , on a

$$\overrightarrow{OG} = \alpha \overrightarrow{OA} + (1 - \alpha) \overrightarrow{OB}.$$

Comme G' est le barycentre de $((A', \alpha), (B', 1 - \alpha))$, il vérifie une relation du même type pour n'importe quel point et en particulier pour l'image O' de O :

$$\overrightarrow{O'G'} = \alpha \overrightarrow{O'A'} + (1 - \alpha) \overrightarrow{O'B'}.$$

⁽⁷⁾Voir le §I.5 pour un rappel de la définition du barycentre.

Un point O et son image O' par φ étant fixés, on *définit* une application f par $f(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'M'}$... et on veut montrer que f est linéaire. Remarquons déjà qu'en « faisant $M = O$ », on trouve que $f(0) = 0$. On a ensuite

$$f(\alpha\overrightarrow{OA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{OB}) = f(\overrightarrow{OG}) = \overrightarrow{O'G'} = \alpha\overrightarrow{O'A'} + (1 - \alpha)\overrightarrow{O'B'}$$

et donc, pour tous α , A et B ,

$$f(\alpha\overrightarrow{OA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{OB}) = \alpha f(\overrightarrow{OA}) + (1 - \alpha)f(\overrightarrow{OB}).$$

En particulier, si $B = O$, en posant $u = \overrightarrow{OA}$,

$$f(\alpha u) = \alpha f(u) + (1 - \alpha)f(0) = \alpha f(u).$$

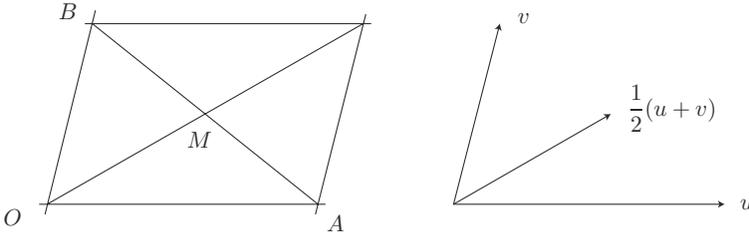


FIGURE 9

Enfin, si u et v sont deux vecteurs de E , on définit A et B de façon que $u = \overrightarrow{OA}$ et $v = \overrightarrow{OB}$. Pour $\alpha = 1/2$, on a⁽⁸⁾

$$\frac{1}{2}f(u + v) = f\left(\frac{u + v}{2}\right)$$

d'après ce qu'on vient de voir. Mais $(u + v)/2 = \overrightarrow{OM}$ où M est le milieu de AB (figure 9), donc

$$f\left(\frac{u + v}{2}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{O'A'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{O'B'} = \frac{1}{2}(f(u) + f(v)).$$

On en déduit (en multipliant par 2) que

$$f(u + v) = f(u) + f(v).$$

Ainsi f est bien linéaire, donc φ est affine, avec $\overrightarrow{\varphi} = f$. □

De la partie directe (et facile) de la proposition I.3.8, on déduit par exemple, en considérant les barycentres de deux points affectés de coefficients positifs (dans le cas d'un espace affine réel) :

⁽⁸⁾On utilise ici le fait que la caractéristique du corps est différente de 2.

Corollaire I.3.9. *L'image d'un segment par une application affine est un segment.* \square

Applications affines et repères

De même qu'une application linéaire est déterminée par les images des vecteurs d'une base, une application affine est déterminée par l'image d'un repère affine (c'est immédiat, exercice I.22). On utilise souvent la conséquence suivante de cette propriété :

Proposition I.3.10. *La seule transformation affine de l'espace affine \mathcal{E} de dimension n qui fixe $n + 1$ points indépendants est l'identité.* \square

Par exemple, une application affine du plan dans lui-même qui a trois points fixes non alignés est l'identité, une application affine qui a deux points fixes (distincts) fixe la droite qu'ils définissent.

Le groupe affine

Commençons par étudier la composition de deux applications affines.

Proposition I.3.11. *La composée $\psi \circ \varphi$ de deux applications affines $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ et $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est une application affine. L'application linéaire associée est la composée des applications linéaires associées (en formules $\overrightarrow{\psi \circ \varphi} = \overrightarrow{\psi} \circ \overrightarrow{\varphi}$).*

Une application affine φ est bijective si et seulement si l'application linéaire associée $\overrightarrow{\varphi}$ l'est. Alors φ^{-1} est affine et l'application linéaire qui lui est associée est l'application réciproque de $\overrightarrow{\varphi}$ (en formules $\overrightarrow{\varphi^{-1}} = \overrightarrow{\varphi}^{-1}$).

Démonstration. L'assertion sur la composition est claire. En effet, avec des notations évidentes, on a :

$$\overrightarrow{\psi(P')\psi(M')} = \overrightarrow{\psi(P'M')} = \overrightarrow{\psi} \circ \overrightarrow{\varphi}(PM).$$

Supposons maintenant que $\overrightarrow{\varphi}$ soit une application linéaire bijective. Pour M dans \mathcal{F} , on cherche les points P de \mathcal{E} tels que $\varphi(P) = M$, mais ceci est équivalent à $\overrightarrow{O'P'} = \overrightarrow{O'M}$, soit à $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{O'M}$ soit enfin à $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{\varphi}^{-1}(\overrightarrow{O'M})$ d'où l'existence et l'unicité de P . L'application affine φ est donc bien bijective.

Inversement, si φ est bijective, donnons-nous un vecteur u de F et cherchons les v tels que $\overrightarrow{\varphi}(v) = u$. Fixons un point O et son image O' , ainsi que le point M tel que $O'M = u$. Comme φ est bijective, il y a un unique point P dans \mathcal{E} tel que $M = \varphi(P)$. On a alors $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)} = \overrightarrow{O'M} = u$ et \overrightarrow{OP} est l'unique solution, donc $\overrightarrow{\varphi}$ est bijective. \square

Corollaire I.3.12. *Les bijections affines de \mathcal{E} dans lui-même forment un groupe, le groupe affine $\text{GA}(\mathcal{E})$.* □

Proposition I.3.13. *L'application du groupe affine dans le groupe linéaire,*

$$\begin{array}{ccc} \text{GA}(\mathcal{E}) & \longrightarrow & \text{GL}(E) \\ \varphi & \longmapsto & \vec{\varphi} \end{array}$$

qui envoie une application affine sur l'application linéaire associée, est un homomorphisme surjectif de groupes, dont le noyau est le groupe des translations de \mathcal{E} , isomorphe au groupe additif de l'espace vectoriel E .

Démonstration. C'est une conséquence directe de ce qui précède. Le noyau est formé des applications affines dont l'application linéaire associée est Id_E , c'est-à-dire des translations, comme on l'a déjà dit. Il est clair que le groupe des translations est isomorphe au groupe additif de E : ce n'est qu'une façon pédante de dire que $t_u \circ t_v = t_{u+v}$.

La seule chose restant à vérifier est la surjectivité de notre homomorphisme. On va montrer un résultat un peu plus précis qui mérite d'être énoncé à part :

Lemme I.3.14. *Soit O un point de \mathcal{E} . Soit f un isomorphisme linéaire de E . Il existe une unique application affine φ dont f est l'application linéaire associée et qui fixe O (en formules $f = \vec{\varphi}$ et $\varphi(O) = O$).*

Ce lemme achève la démonstration de la proposition. □

Sa démonstration est immédiate : $\varphi(M)$ est en effet le point défini par

$$\overrightarrow{O\varphi(M)} = f(\overrightarrow{OM}).$$

Cet argument donne d'ailleurs un résultat un peu plus général :

Lemme I.3.15. *Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Soient \mathcal{E} et \mathcal{F} deux espaces affines dirigés par E et F respectivement. Pour tous points O de \mathcal{E} , O' de \mathcal{F} , il existe une unique application affine*

$$\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$$

qui envoie O sur O' et dont l'application linéaire associée est f . □

Remarquons que ces énoncés fournissent beaucoup d'exemples d'applications affines. Ils affirment aussi :

Corollaire I.3.16. *Étant donné un point O de \mathcal{E} , toute application affine φ de \mathcal{E} dans lui-même s'écrit de façon unique sous la forme*

$$\varphi = t_u \circ \psi$$

où ψ fixe O . □

Remarque I.3.17. On a déjà noté une propriété équivalente si l'on vectorialise \mathcal{E} en O (voir les exemples I.3.4).

Conjugaison des translations

On aurait pu, dans l'énoncé du corollaire précédent (corollaire I.3.16), remplacer

$$\varphi = t_u \circ \psi \text{ par } \varphi = \psi \circ t_v.$$

L'application affine fixant O et ayant même application linéaire associée que φ est bien la même dans les deux écritures. Les vecteurs des translations, eux, sont différents : on a

$$t_u = \psi \circ t_v \circ \psi^{-1},$$

les deux translations sont *conjuguées*.

Proposition I.3.18. *La conjuguée $\varphi \circ t_v \circ \varphi^{-1}$ d'une translation par un élément φ du groupe affine $\text{GA}(\mathcal{E})$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{\varphi}(v)$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que, pour tout point M de \mathcal{E} , on a l'égalité

$$\overrightarrow{M\varphi \circ t_v \circ \varphi^{-1}(M)} = \overrightarrow{\varphi}(v).$$

Soient donc M un point quelconque et $N = \varphi^{-1}(M)$. On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M\varphi \circ t_v \circ \varphi^{-1}(M)} &= \overrightarrow{\varphi(N)\varphi \circ t_v(N)} \\ &= \overrightarrow{\varphi(\overrightarrow{Nt_v(N)})} \text{ par définition de } \overrightarrow{\varphi} \\ &= \overrightarrow{\varphi}(v) \text{ par définition de } t_v. \end{aligned} \quad \square$$

Une digression : la conjugaison

On peut lire l'énoncé précédent de la façon suivante : quand on conjugue une translation (par une transformation affine), on trouve une translation ; de plus, le vecteur de la nouvelle translation est donné, en fonction du vecteur originel et de la transformation qui conjugue, par la seule formule qui ait un sens. C'est une illustration d'un « principe » général en géométrie, que nous aurons l'occasion de rencontrer souvent dans ce livre et dont l'énoncé, très vague, est le suivant.

« **Principe** » **I.3.19 (Transport par conjugaison)**. Si τ est un élément d'un groupe de transformations G ,

- son conjugué $\varphi \circ \tau \circ \varphi^{-1}$ par un élément de G est un élément « de même nature géométrique » que τ ,
- les éléments définissant cette « nature » sont, pour le conjugué $\varphi \circ \tau \circ \varphi^{-1}$, les images de ceux de τ par φ .

Il ne s'agit pas d'un théorème, mais plutôt d'un cadre général qui peut se transformer, dans chaque situation particulière, en énoncé précis en remplaçant les parties entre guillemets par des objets définis précisément, par exemple

- translations, vecteurs des translations,
- symétries centrales, centres, ou plus généralement
- homothéties, centres (voir l'exercice I.29),
- (dans le groupe symétrique) transpositions, éléments échangés par la transposition.

Points fixes

Les lecteurs auront compris (voir au besoin la remarque I.3.3) qu'on peut considérer une application affine de \mathcal{E} dans lui-même qui a (au moins) un point fixe comme une application linéaire du vectorialisé de \mathcal{E} en ce point dans lui-même. Il est donc intéressant de savoir quand une application affine a un point fixe.

Proposition I.3.20. Soit φ une transformation affine de \mathcal{E} . Pour qu'elle ait un unique point fixe dans \mathcal{E} , il faut et il suffit que l'isomorphisme $\vec{\varphi}$ n'ait aucun vecteur fixe autre que 0.

Remarque I.3.21. La condition signifie que 1 n'est pas une valeur propre de $\vec{\varphi}$.

Démonstration. Si φ a un point fixe O , on vectorialise \mathcal{E} en O pour voir que les autres points fixes de φ correspondent aux vecteurs fixes non nuls de $\vec{\varphi}$. Alors O est l'unique point fixe si et seulement si le seul vecteur fixe de $\vec{\varphi}$ est le vecteur nul.

Si $\vec{\varphi}$ n'a pas de vecteur fixe non nul (en d'autres termes, si cet endomorphisme n'a pas la valeur propre 1), on recherche d'éventuels points fixes de φ . Soient O un point et O' son image. Un point fixe M vérifie

$$\vec{\varphi}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'\varphi(M)} = \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM},$$

soit encore

$$\vec{\varphi}(\overrightarrow{OM}) - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'O}.$$

Par hypothèse, $\overrightarrow{\varphi} - \text{Id}$ est injectif. Comme c'est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, il est aussi surjectif et l'équation $\overrightarrow{\varphi}(u) - u = \overrightarrow{O'O}$ a une unique solution \overrightarrow{OM} . Donc φ a un point fixe.

Enfin, si M et N sont deux points fixes de φ , $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{MN}$, de sorte que $\overrightarrow{MN} = 0$ et $M = N$. Donc φ a un unique point fixe. On en déduit la proposition. \square

Sous certaines hypothèses, on peut préciser ce qui se passe quand l'application linéaire a la valeur propre 1 :

Proposition I.3.22. *Soit φ une transformation affine de \mathcal{E} . On suppose que l'espace vectoriel E se décompose en somme directe*

$$E = \text{Ker}(\overrightarrow{\varphi} - \text{Id}) \oplus \text{Im}(\overrightarrow{\varphi} - \text{Id}).$$

Alors il existe un unique vecteur v et une unique application affine ψ avec un point fixe tels que

- $\overrightarrow{\varphi}(v) = v$,
- $\varphi = t_v \circ \psi$.

De plus, t_v et ψ commutent. L'application affine φ a un point fixe si et seulement si $v = 0$, auquel cas l'ensemble des points fixes de φ est un sous-espace affine dirigé par le sous-espace propre des points fixes de $\overrightarrow{\varphi}$.

Démonstration. On commence par choisir un point O de \mathcal{E} et on utilise la décomposition de E en somme directe pour écrire

$$\overrightarrow{O\varphi(O)} = v + \overrightarrow{\varphi}(z) - z, \text{ où } v \text{ satisfait } \overrightarrow{\varphi}(v) = v.$$

Considérons le point A défini par $z = \overrightarrow{AO}$. On a

$$\overrightarrow{A\varphi(A)} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{O\varphi(O)} + \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(A)} = z + v + \overrightarrow{\varphi}(z) - z + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OA}) = v.$$

On pose $\psi = t_{-v} \circ \varphi$. Pour cette nouvelle application affine, on a

$$\psi(A) = t_{-v}(\varphi(A)) = A,$$

donc ψ a un point fixe. On a aussi

$$\psi \circ t_v \circ \psi^{-1} = t_{\overrightarrow{\psi(v)}} = t_{\overrightarrow{\varphi(v)}} = t_v$$

(en utilisant la proposition I.3.18) de sorte que ψ et t_v commutent.

Démontrons maintenant l'unicité du couple (v, ψ) . On suppose que

$$\varphi = t_v \circ \psi = t_{v'} \circ \psi'$$

où les deux applications ψ et ψ' ont des points fixes, disons $\psi(A) = A$ et $\psi'(A') = A'$, et où les deux vecteurs v, v' sont fixés par $\vec{\varphi}$. Alors $\overrightarrow{A\varphi(A)} = v$ et $\overrightarrow{A'\varphi(A')} = v'$, donc

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A\varphi(A)} + \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(A')} + \overrightarrow{\varphi(A')A'} = v + \vec{\varphi}(\overrightarrow{AA'}) - v'$$

et

$$\overrightarrow{AA'} - \vec{\varphi}(\overrightarrow{AA'}) = v - v'.$$

Ce vecteur est dans $\text{Ker}(\vec{\varphi} - \text{Id}_E) \cap \text{Im}(\vec{\varphi} - \text{Id}_E) = 0$, ce pourquoi $v = v'$ et $\psi = \psi'$. Si $v = 0$, on a $\varphi = \psi$ et φ a un point fixe.

Réciproquement, si φ a un point fixe, on l'utilise comme point O , on en déduit que $v = 0$. En vectorialisant l'espace affine \mathcal{E} en O , on voit que les points fixes de φ correspondent aux vecteurs fixes de $\vec{\varphi}$. L'ensemble des points fixes est donc le sous-espace affine passant par O et dirigé par l'espace vectoriel des vecteurs fixes de l'application linéaire $\vec{\varphi}$. \square

I.4. Trois théorèmes de géométrie plane

On utilise les applications affines pour démontrer trois théorèmes classiques de géométrie plane, les théorèmes de Thalès, Pappus et Desargues. On se place donc maintenant dans un plan affine.

Remarque I.4.1 (Notation). Soient A, B et C trois points alignés et soit u un vecteur directeur de la droite qu'ils définissent. On peut écrire $\overrightarrow{AB} = \lambda u$, où $\lambda = \overline{AB}$, la « mesure algébrique » dépend du choix de u ... Rappelons toutefois que le rapport $\overline{AB}/\overline{AC}$, lui, n'en dépend pas.

Le théorème de Thalès

Théorème I.4.2. Soient d, d' et d'' trois droites parallèles distinctes, \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 deux droites dont aucune n'est parallèle à d . Soient, pour $i = 1, 2$, $A_i = \mathcal{D}_i \cap d$, $A'_i = \mathcal{D}_i \cap d'$, $A''_i = \mathcal{D}_i \cap d''$. Alors on a

$$\frac{\overline{A_1 A''_1}}{\overline{A_1 A'_1}} = \frac{\overline{A_2 A''_2}}{\overline{A_2 A'_2}}.$$

Réciproquement, si un point B de \mathcal{D}_1 vérifie l'égalité

$$\frac{\overline{A_1 B}}{\overline{A_1 A'_1}} = \frac{\overline{A_2 A''_2}}{\overline{A_2 A'_2}},$$

alors il est sur d'' (et $B = A''_1$).

Démonstration. Soit π la projection sur \mathcal{D}_2 parallèlement à d et soit p la projection linéaire associée. Alors π envoie A_1 sur A_2 etc. De plus, si $\overrightarrow{A_1A_1''} = \lambda \overrightarrow{A_1A_1'}$, on a $p(\overrightarrow{A_1A_1''}) = \lambda p(\overrightarrow{A_1A_1'})$ car p est linéaire. C'est dire que $\overrightarrow{A_2A_2''} = \lambda \overrightarrow{A_2A_2'}$, égalité dont on déduit le sens direct du théorème.

La réciproque en est conséquence. On a

$$\overrightarrow{A_1A_1''} = \frac{\overrightarrow{A_2A_2''}}{\overrightarrow{A_2A_2'}} \overrightarrow{A_1A_1'}$$

de sorte que $\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{A_1A_1''}$ et donc que $B = A_1''$. □

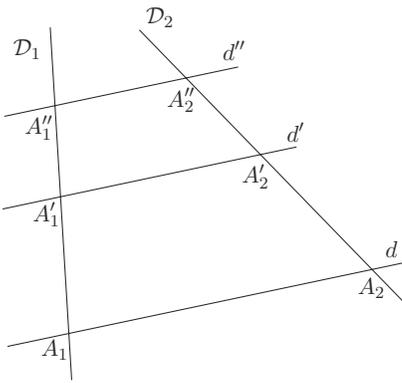


FIGURE 10. Le théorème de Thalès...

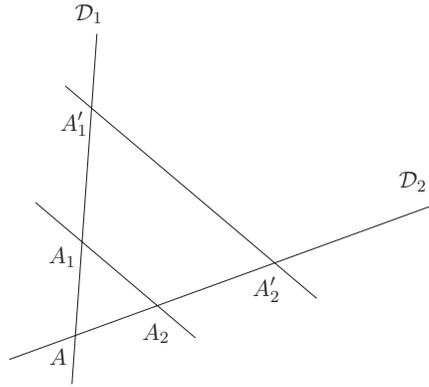


FIGURE 11. ... et un de ses corollaires

Corollaire I.4.3. Soient \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 deux droites sécantes en A , d et d' deux droites parallèles coupant \mathcal{D}_i en A_i, A_i' distincts de A . Alors

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AA_1'}} = \frac{\overline{AA_2}}{\overline{AA_2'}} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1'A_2'}}$$

Démonstration. On fait passer par A une droite parallèle à d et d' . On peut appliquer le théorème de Thalès. On obtient ainsi

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AA_1'}} = \frac{\overline{AA_2}}{\overline{AA_2'}}$$

la première égalité recherchée. On voit aussi ainsi que l'homothétie de centre A qui envoie A_1 sur A_1' envoie A_2 sur A_2' . On en déduit la deuxième égalité. □

Remarque I.4.4. Le théorème de Thalès exprime simplement le fait que les projections sont des applications affines (exercice I.17). On utilise maintenant, pour

le théorème de Pappus, les homothéties et les translations, et précisément le fait que deux translations, ou deux homothéties de même centre, commutent.

Le théorème de Pappus

Théorème I.4.5. Soient A, B, C trois points d'une droite \mathcal{D} et A', B', C' trois points d'une droite \mathcal{D}' distincte de \mathcal{D} . Si AB' est parallèle à BA' et BC' est parallèle à CB' , alors AC' est parallèle à CA' .

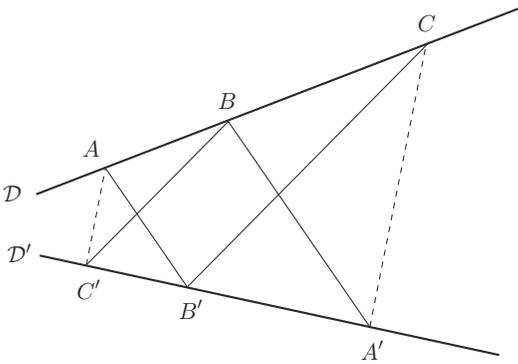


FIGURE 12. Le théorème de Pappus

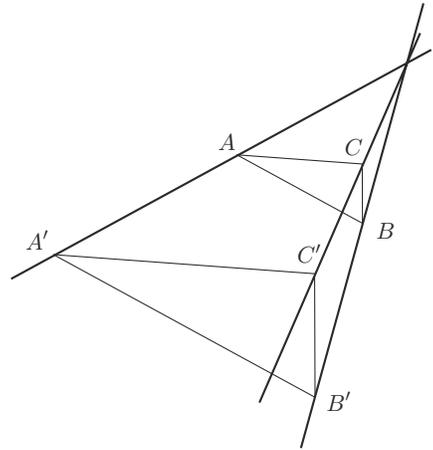


FIGURE 13. Le théorème de Desargues

Démonstration. Supposons d'abord que \mathcal{D} et \mathcal{D}' ne soient pas parallèles. Soit O leur point d'intersection. Soient φ l'homothétie de centre O qui envoie A sur B et ψ celle qui envoie B sur C . Alors, grâce au théorème de Thalès (ou simplement parce qu'une homothétie vectorielle transforme tout vecteur en un vecteur colinéaire), φ envoie B' sur A' et ψ envoie C' sur B' . Ainsi $\psi \circ \varphi$ envoie A sur C et $\varphi \circ \psi$ envoie C' sur A' . Comme φ et ψ sont des homothéties de même centre, elles commutent. Il y a donc une homothétie de centre O qui envoie A sur C et C' sur A' , mais alors AC' et CA' sont parallèles comme l'affirme la réciproque du théorème de Thalès.

Si \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont parallèles, on peut remplacer les homothéties par des translations dans le raisonnement. □

Le théorème de Desargues

Encore des homothéties et des translations pour le théorème de Desargues.

Théorème I.4.6. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles sans sommet commun et à côtés respectivement parallèles. Alors les droites AA' , BB' et CC' sont concourantes ou parallèles.

Démonstration. Si AA' et BB' se coupent en O , l'homothétie φ de centre O qui envoie A sur A' envoie aussi B sur B' (encore Thalès). Soit λ son rapport et soit $C'' = \varphi(C)$. Ainsi $\overrightarrow{OC''} = \lambda\overrightarrow{OC}$. Mais $\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OA}$ et donc $A'C''$ et AC sont parallèles. Alors C'' est sur la parallèle à AC passant par A' , c'est-à-dire $A'C'$, mais il est aussi sur la parallèle à BC passant par B' , c'est-à-dire $B'C'$. Donc $C'' = C'$. Mais bien sûr, O , C et C'' sont alignés, ce qui fait que CC' passe par O .

Si AA' et BB' sont parallèles, on raisonne de façon analogue avec des translations. □

On trouvera d'autres versions des théorèmes de Pappus et Desargues dans les exercices I.59 et I.60. Ils révéleront leur nature et leur unité profondes au chapitre VI.

I.5. Appendice : rappels succincts sur les barycentres

Dans ce paragraphe, je rappelle très brièvement quelques propriétés et définitions utiles sur les barycentres. Les lectrices sont invitées à compléter les démonstrations, en utilisant, si le besoin s'en fait sentir, leur livre de terminale préféré.

Si les A_i sont des points d'un espace affine \mathcal{E} et les α_i des scalaires, on dit que le système $((A_1, \alpha_1), \dots, (A_k, \alpha_k))$ est un système de points pondérés.

Proposition I.5.1. Si $((A_1, \alpha_1), \dots, (A_k, \alpha_k))$ est un système de points pondérés tel que $\sum \alpha_i \neq 0$, il existe un unique point G de \mathcal{E} vérifiant l'égalité

$$\sum \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = 0.$$

De plus, pour tout point O de \mathcal{E} , on a

$$\left(\sum \alpha_i\right)\overrightarrow{OG} = \sum \alpha_i \overrightarrow{OA_i}.$$

L'unique point G défini par cette proposition est appelé le *barycentre* du système. Les lecteurs sont invités à se demander ce qui se passe quand la somme des coefficients est nulle.

Le barycentre du système $((A_1, \lambda\alpha_1), \dots, (A_k, \lambda\alpha_k))$ est, par définition et pour tout scalaire λ non nul, le même que celui du système $((A_1, \alpha_1), \dots, (A_k, \alpha_k))$.

Quand tous les coefficients α_i sont égaux, on parle d'*isobarycentre* des points A_1, \dots, A_n . L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment AB ,

celui de trois points A , B et C non alignés est appelé le *centre de gravité* du triangle ABC .

Le barycentre (ou plutôt l'opération de « barycentration ») satisfait à une propriété d'associativité un peu pénible à énoncer mais de vérification immédiate :

Proposition I.5.2 (Associativité du barycentre). *Étant donnés des scalaires*

$$\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,k_1}, \dots, \alpha_{r,1}, \dots, \alpha_{r,k_r}$$

tels qu'aucune des sommes $\sum_j \alpha_{i,j}$, $\sum_{i,j} \alpha_{i,j}$ ne soit nulle, soit

$$((A_{1,1}, \alpha_{1,1}), \dots, (A_{1,k_1}, \alpha_{1,k_1}), \dots, (A_{r,1}, \alpha_{r,1}), \dots, (A_{r,k_r}, \alpha_{r,k_r}))$$

un système de points pondérés et soit G son barycentre. Soit B_i le barycentre du système $((A_{i,1}, \alpha_{i,1}), \dots, (A_{i,k_i}, \alpha_{i,k_i}))$. Le barycentre du système $((B_1, \sum_j \alpha_{1,j}), \dots, (B_r, \sum_j \alpha_{r,j}))$ est G . \square

En d'autres termes, pour trouver le barycentre d'un grand système, on peut d'abord regrouper des termes et considérer leur barycentre, puis prendre le barycentre des nouveaux points, affectés de coefficients convenables (sommés des coefficients des points utilisés dans les regroupements). Un cas particulier simple et utile est le corollaire suivant :

Corollaire I.5.3. *Soit G le barycentre de $((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma))$. On suppose que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et que $\beta + \gamma \neq 0$. Le point d'intersection A' de AG et de BC est le barycentre de $((B, \beta), (C, \gamma))$. \square*

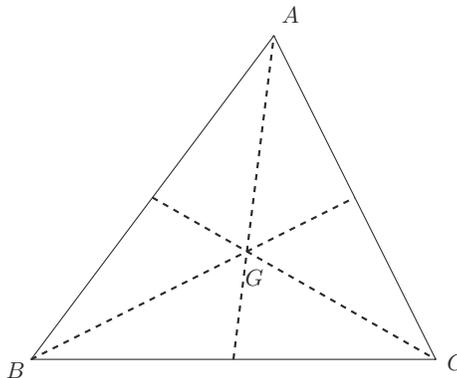


FIGURE 14. Centre de gravité d'un triangle

On en déduit par exemple que, dans un triangle, les trois médianes (droites joignant les sommets aux milieux des côtés opposés) sont concourantes au centre de gravité du triangle (figure 14).

Liée à celle de barycentre, la notion de convexité est une notion de géométrie affine importante et utile (pas seulement en géométrie !). On l'utilisera beaucoup au chapitre V.

I.6. Appendice : notion de convexité

Donnons-en ici quelques rudiments, renvoyant les lectrices à [5] pour plus de renseignements.

Plaçons-nous dans un espace affine réel (pour pouvoir parler de « segments »). Une partie $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ est dite *convexe* si pour tous points A et B de \mathcal{C} , le segment AB est entièrement contenu dans \mathcal{C} (figure 15).

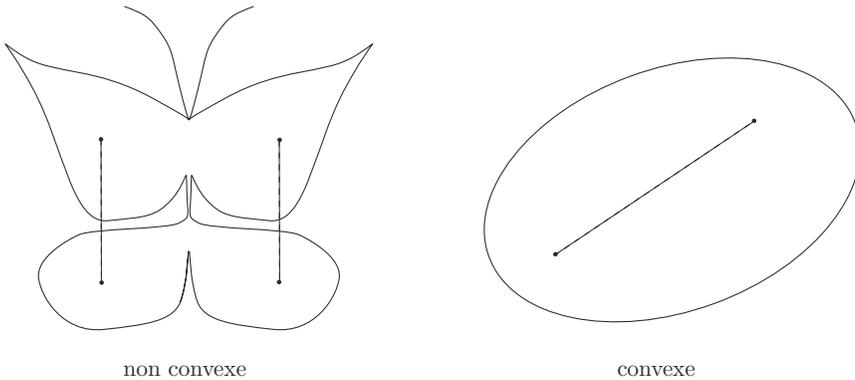


FIGURE 15

Exemple I.6.1. Avec cette définition, il est clair que l'ensemble vide, un point, un segment, une droite, un plan sont des convexes. Il est clair aussi que l'ensemble constitué de deux points (distincts) n'est pas convexe. On trouvera d'autres exemples et contre-exemples dans l'exercice I.45.

On construit de nouveaux convexes grâce à la proposition suivante, dont la démonstration (facile) est laissée aux lecteurs.

Proposition I.6.2. *Toute intersection de convexes est convexe.* □

La réunion de deux parties convexes n'est pas convexe en général (penser par exemple à une partie formée de deux points).

La convexité est une « notion affine », ce qui peut s'exprimer par l'énoncé suivant.

Proposition I.6.3. *L'image de tout convexe par une application affine est convexe.*

Démonstration. Soit \mathcal{C} un convexe de l'espace affine \mathcal{E} et soit φ une application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{E}' . Soient A' et B' deux points quelconques de $\varphi(\mathcal{C})$. On veut montrer que le segment $A'B'$ est contenu dans \mathcal{C} . On peut trouver deux points A et B de \mathcal{C} dont A' et B' soient les images. Comme \mathcal{C} est convexe, il contient le segment AB . L'image de ce segment par φ est le segment $A'B'$ (c'est ce que dit le corollaire I.3.9), qui est donc bien contenu dans $\varphi(\mathcal{C})$. \square

On démontre (et les lectrices vérifieront) de la même façon que

Proposition I.6.4. *L'image réciproque de tout convexe par une application affine est convexe.* \square

Définition I.6.5. L'intersection de tous les convexes contenant la partie S de \mathcal{E} est une partie convexe de \mathcal{E} , appelée l'enveloppe convexe de S .

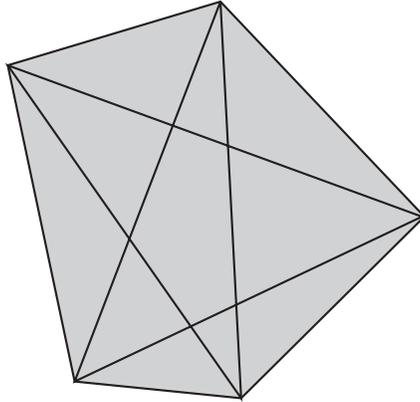


FIGURE 16. L'enveloppe convexe d'un polygone étoilé

Proposition I.6.6. *L'enveloppe convexe de S est formée des barycentres des points de S affectés de coefficients positifs ou nuls.*

Démonstration. Notons $\mathcal{C}(S)$ l'enveloppe convexe de S et S_+ l'ensemble des barycentres des points de S affectés de coefficients positifs ou nuls.

Remarquons d'abord que S_+ est convexe : si M et N sont deux barycentres de points de S affectés de coefficients positifs ou nuls, les points du segment MN sont les barycentres des systèmes $((M, \alpha), (N, 1 - \alpha))$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$. Grâce à l'associativité de la barycentration, ces points sont tous dans S_+ .

Comme tout point M de S est barycentre du système $((M, 1))$, on a l'inclusion $S \subset S_+$ et donc aussi, comme S_+ est convexe, on a $\mathcal{C}(S) \subset S_+$.

Montrons, inversement, que S_+ est contenu dans $\mathcal{C}(S)$. Pour ce faire, montrons, par récurrence sur k , que, si $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont des réels positifs ou nuls et A_1, \dots, A_k des points de $\mathcal{C}(S)$, alors le barycentre de $((A_1, \alpha_1), \dots, (A_k, \alpha_k))$ est dans l'enveloppe convexe $\mathcal{C}(S)$.

Si $k = 1$, le barycentre est A_1 et l'assertion est vraie. Pour $k = 2$, le barycentre est un point du segment A_1A_2 ; il est dans $\mathcal{C}(S)$ par convexité.

Montrons maintenant comment passer d'un système de $k-1$ points à un système de k points. Si l'un des α_i est nul, on peut retirer (A_i, α_i) de la liste. Supposons donc que tous les α_i sont non nuls. En particulier, α_k n'est pas nul et la somme $\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1}$ non plus. Soit G' le barycentre du système $((A_1, \alpha_1), \dots, (A_{k-1}, \alpha_{k-1}))$. Le point G qui nous intéresse est le barycentre de $((G', \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1}), (A_k, \alpha_k))$, qui est un point du segment $G'A_k$. Mais G' est dans l'enveloppe convexe $\mathcal{C}(S)$ par hypothèse de récurrence et donc, grâce à la convexité de $\mathcal{C}(S)$, G est aussi un point de $\mathcal{C}(S)$. \square

I.7. Appendice : coordonnées cartésiennes

Un repère affine (O, A_1, \dots, A_n) (et une origine O) de l'espace affine \mathcal{E} étant fixé(s), on peut repérer tout point M de \mathcal{E} par les composantes du vecteur \overrightarrow{OM} dans la base $(\overrightarrow{OA_1}, \dots, \overrightarrow{OA_n})$ de la direction E de \mathcal{E} , que l'on appelle les *coordonnées cartésiennes* de M dans le repère affine en question.

En d'autres termes, le choix du repère affine (O, A_1, \dots, A_n) définit un isomorphisme affine de \mathcal{E} dans \mathbf{K}^n , celui qui, au point M , associe ses coordonnées cartésiennes.

Sous-espaces affines

Un sous-espace affine peut être décrit par un point A et une direction, elle-même définie par une base (u_1, \dots, u_k) , comme ceci :

$$\mathcal{F} = \left\{ M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{AM} = \sum \lambda_i u_i \right\}.$$

Ce qui se traduit, pour les coordonnées (x_1, \dots, x_n) de M , par

$$\begin{cases} x_1 &= a_1 + \lambda_1 u_1^1 + \dots + \lambda_k u_k^1 \\ \vdots & \\ x_n &= a_n + \lambda_1 u_1^n + \dots + \lambda_k u_k^n \end{cases}$$

où (a_1, \dots, a_n) sont les coordonnées du point A , (u_i^1, \dots, u_i^n) sont les composantes du vecteur u_i dans la base $(\overrightarrow{OA_1}, \dots, \overrightarrow{OA_n})$ de E . On appelle ces équations un *système d'équations paramétriques* de \mathcal{F} .

Par exemple, si (b_1, \dots, b_n) sont les coordonnées d'un point B distinct de A , les équations

$$\begin{cases} x_1 &= a_1 + \lambda(b_1 - a_1) \\ \vdots & \\ x_n &= a_n + \lambda(b_n - a_n) \end{cases}$$

décrivent la droite AB (voir plus généralement l'exercice I.11).

Un sous-espace affine peut aussi se décrire par des *équations cartésiennes*. Une base de E étant donnée, le sous-espace vectoriel F peut être décrit par un système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \dots + \alpha_{1,n}x_n &= 0 \\ \vdots & \\ \alpha_{m,1}x_1 + \dots + \alpha_{m,n}x_n &= 0. \end{cases}$$

Les points M du sous-espace affine \mathcal{F} sont caractérisés par l'équation $\overrightarrow{AM} \in \mathcal{F}$, soit par

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}(x_1 - a_1) + \dots + \alpha_{1,n}(x_n - a_n) &= 0 \\ \vdots & \\ \alpha_{m,1}(x_1 - a_1) + \dots + \alpha_{m,n}(x_n - a_n) &= 0 \end{cases}$$

ou encore par

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 + \dots + \alpha_{1,n}x_n &= b_1 \\ \vdots & \\ \alpha_{m,1}x_1 + \dots + \alpha_{m,n}x_n &= b_m. \end{cases}$$

Ce sont des équations cartésiennes de \mathcal{F} . Par exemple le système

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z &= 1 \\ 2x - 2y + 3z &= 0 \end{cases}$$

décrit une droite affine de \mathbf{R}^3 (pourquoi?).

Les équations cartésiennes décrivent le sous-espace affine comme

$$\mathcal{F} = f^{-1}((b_1, \dots, b_m))$$

où $f : E \rightarrow \mathbf{K}^m$ est l'application linéaire dont la matrice dans les bases

- $(\overrightarrow{OA_1}, \dots, \overrightarrow{OA_n})$, base de E , d'une part,
- base canonique de \mathbf{K}^m , de l'autre,

est la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \cdots & \alpha_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Les lecteurs sont invités à vérifier qu'ils ont compris en faisant l'exercice I.12.

Applications affines

Considérons maintenant une application affine $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ et supposons que l'espace affine \mathcal{E}' soit, lui aussi, muni d'un repère affine, noté (O', A'_1, \dots, A'_m) . On représente les points de \mathcal{E}' par leurs coordonnées (x'_1, \dots, x'_m) ... autant dire qu'on utilise, en plus de l'isomorphisme $\mathcal{E} \rightarrow \mathbf{K}^n$, un isomorphisme $\mathcal{E}' \rightarrow \mathbf{K}^m$. À travers ces isomorphismes⁽⁹⁾, φ devient une application affine

$$\mathbf{K}^n \longrightarrow \mathbf{K}^m$$

dont nous savons (voir les exemples I.3.4) qu'elle est de la forme « application linéaire plus constante ». C'est dire que les coordonnées (x'_1, \dots, x'_m) de l'image $\varphi(M)$ du point M de coordonnées (x_1, \dots, x_n) sont données par

$$\begin{cases} x'_1 &= \alpha_{1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{1,n}x_n + b_1 \\ \vdots & \\ x'_m &= \alpha_{m,1}x_1 + \cdots + \alpha_{m,n}x_n + b_m. \end{cases}$$

Les lectrices sont invitées à vérifier qu'elles ont bien compris cette écriture en essayant de changer de repères (exercice I.34).

Exercices et problèmes

Espaces affines, sous-espaces affines

Exercice I.1. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu⁽¹⁰⁾ (si $AA'B'B$ est un parallélogramme et si M vérifie $\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AM}$, alors il vérifie

⁽⁹⁾Si $\eta : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{K}^n$ et $\eta' : \mathcal{E}' \rightarrow \mathbf{K}^m$ sont les noms des isomorphismes définis par les repères, c'est $\eta' \circ \varphi \circ \eta^{-1}$ que l'on décrit ici.

⁽¹⁰⁾Suivant l'exemple de [15], j'ai souvent omis les mots « Montrer que » dans la rédaction des énoncés.